Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П.О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С.И. Тимошин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пособие
для студентов технических вузов

Гомель 2005

УДК 517.91(075)
ББК 22.161.6я73
Т41

Рекомендовано научно-методическим советом ГГТУ им. П.О. Сухого

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» ГГТУ им. П.О. Сухого *С.Л. Авакян*;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая физика» ГГУ им. Ф. Скорины *В.В. Андреев*

Тимошин, С.И.
Т41 **Дифференциальные** уравнения и их приложения: пособие для студентов техн. вузов /С.И. Тимошин. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2005. – 107 с.
ISBN 985-420-314-Х.

В пособии изложены основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложения для решения физических, геометрических и инженерных задач.
Издание предназначено для студентов технических вузов.

УДК 517.91(075)
ББК 22.161.6я73

ISBN 985-420-314-Х

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В приложениях математики к различным отраслям науки дифференциальные уравнения (ДУ) занимают важное место. Использование их – наиболее эффективное и распространенное средство решения большинства задач. Многие реальные процессы с помощью ДУ описываются просто и полно. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального явления или процесса, называют дифференциальной моделью этого процесса. При построении таких моделей важное значение имеет знание законов физики, например, в механике это могут быть законы Ньютона, в теории электрических цепей – законы Кирхгофа и т. д.

На практике приходится иметь дело и с такими случаями, когда неизвестны законы, позволяющие составить ДУ, и поэтому необходимо прибегать к различным предположениям, касающимся протекания процесса при малых изменениях параметров (переменных). С помощью математического моделирования решение задачи сводится к решению соответствующего ДУ.

Цель настоящего пособия – научить студентов решать задачи путем составления ДУ, т. е. дифференциального моделирования. В первых пяти главах изложены основы теории обыкновенных ДУ. Главы 6–8 посвящены применению ДУ для решения физических, геометрических и инженерных задач.

ГЛАВА 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия и определения

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее первую производную (или дифференциалы переменных), называется *ДУ первого порядка.*

В общем случае эти уравнения представляют собой соотношение вида

$$F(x, y(x), \quad y'(x)) = 0.$$

В отличие от алгебраических уравнения, где в качестве неизвестной выступает независимая переменная (x), в ДУ неизвестной является уже функция $(y(x))$. Поэтому теория ДУ дает возможность находить законы зависимости одних величин от других. Этим объясняется столь широкое применение ДУ для решения прикладных задач.

Здесь мы ограничимся рассмотрением ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производной,

$$y' = f(x, y)$$

или (1.1)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Общим решением ДУ (1.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C)$$

или в неявном виде (1.2)

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

где C – произвольная постоянная.

Решение (1.2) называют *общим интегралом* ДУ.

Если некоторому значению $x = x_0$ соответствует определенное значение $y = y_0$ функции $y(x)$, то говорят, что задано *начальное условие* (НУ):

$$y(x_0) = y_0. \qquad (1.3)$$

Решение ДУ (1.1) с НУ (1.3) называется *задачей Коши*. Для ее решения необходимо:

- найти общее решение (1.2) ДУ;
- в общее решение подставить НУ (1.3) и найти значение произвольной постоянной $C = C_0$;
- полученное значение подставить в общее решение, т. е.

$$y = \varphi(x, C_0) \equiv \Psi(x)$$

или (1.4)

$$\Phi(x, y, c_0) \equiv P(x, y) = 0.$$

Функции $\Psi(x)$ или $F(x, y) = 0$ называют *частным* решением ДУ (1.1).

С геометрической точки зрения (*рис. 1.1*) общее решение представляет собой однопараметрическое семейство кривых, а частное – единственная кривая этого семейства, проходящая через заданную точку (x_0, y_0).

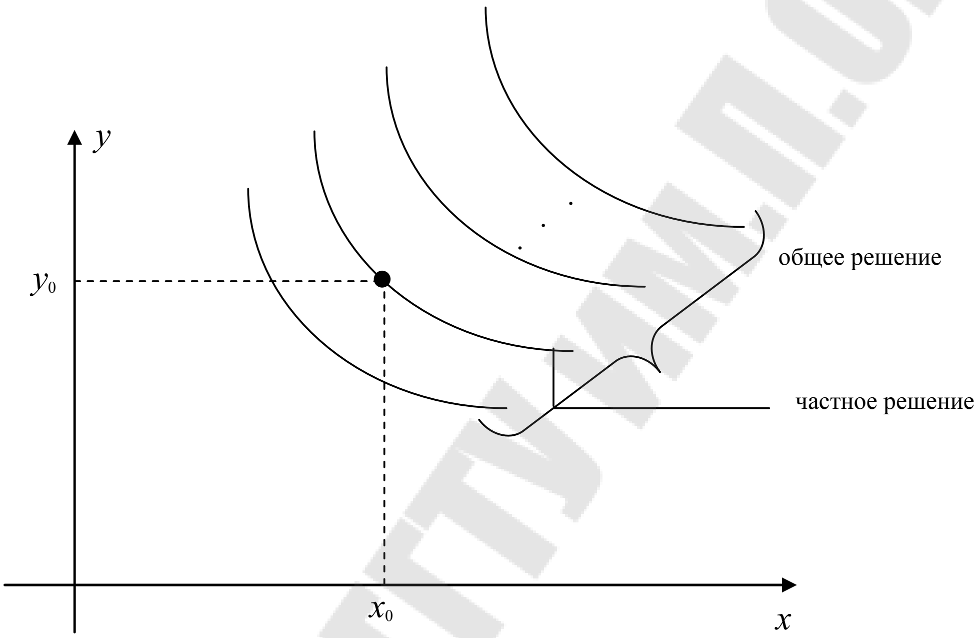

Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация общего и частного решений ДУ (1.1)

Рассмотрим важные частные случаи ДУ (1.1).

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Допустим, что $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$.

Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

и, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx.$$

Далее путем интегрирования

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$$

приходим к общему решению (1.2).

В случае уравнения (1.1) переменные x и y в функциях $M(x, y)$ и $N(x, y)$ должны разделяться, т. е.

$$M(x, y) = M_1(x)M_2(y) \quad \text{и} \quad N(x, y) = N_1(x)N_2(y).$$

Затем делим обе части уравнения на $N_1(x)\,M_2(y)$ и интегрируем

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C.$$

Если речь идет о нахождении частного решения при заданном НУ (1.3), то можно проводить интегрирование ДУ следующим образом:

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f_2(y)} = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)dx \quad \text{или} \quad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C.$$

Пример 1.1. Найти частное решение уравнения

$$x(y^2 + 1)dx - \sqrt{x^2 - 1}\, ydy = 0, \; y(0) = 0.$$

Решение. Для разделения переменных обе части уравнения разделим на $(y^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}dx = \frac{y}{y^2 + 1}dy.$$

Интегрируя с учетом НУ, получаем

$$\int\limits_0^x \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int\limits_0^y \frac{ydy}{y^2 + 1}.$$

Интегралы вычисляем методом подведения под знак дифференциала:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{d(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{d(y^2 + 1)}{y^2 + 1},$$

$$2\sqrt{x^2 - 1}\Big|_0^x = \ln(y^2 + 1)\Big|_0^y,$$

$$2\sqrt{x^2-1}-2=\ln(y^2+1).$$

Итак, искомое частное решение ДУ равно

$$2\sqrt{x^2-1}-\ln(y^2+1)=2.$$

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

ДУ 1-го порядка вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.5}$$

называется *однородным*.

Характерной особенностью его является зависимость правой части уравнения только от отношения переменных y и x, т. е. $f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $f\left(\frac{x}{y}\right)$.

Однородное ДУ с помощью подстановки

$$u=\frac{y}{x} \tag{1.6}$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, подставляя (1.6) и $y'=u'x+u$ в (1.5), получаем

$$u'x+u=f(u)$$

или

$$\frac{du}{dx}x=f(u)-u.$$

После разделения переменных и интегрирования получаем

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

Пример 1.2. Решить уравнение $y'=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$.

Решение. Прежде всего, убедимся, что данное уравнение является однородным, т. е. приведем его к виду (1.5). Для этого числитель и знаменатель дроби в правой части уравнения разделим на x^2:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\frac{y}{x}}. \tag{1.7}$$

Введем подстановку $u = \dfrac{y}{x}$; отсюда

$$y' = u'x + u.$$

Подставляя в уравнение (1.7), получаем

$$u'x + u = \frac{u - u^2}{1 - 2u},$$

или

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u^2}{1 - 2u}.$$

После разделения переменных и интегрирования имеем

$$\int \frac{1 - 2u}{u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u^2} - 2\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} - 2\ln|u| = \ln|x| - C,$$

$$\frac{1}{u} + \ln|u^2 x| = C.$$

С учетом $u = \dfrac{y}{x}$ получаем общий интеграл уравнения (1.7)

$$\frac{x}{y} + \ln\left|\frac{y^2}{x}\right| = C.$$

1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

ДУ 1-го порядка вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.8}$$

называется *линейным* относительно *y*.

Рассмотрим методы решения уравнения (1.8).

Метод вариации произвольной постоянной

Запишем однородное уравнение $(Q(x)=0)$

$$y' + P(x)y = 0. \tag{1.9}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Найдем его решение.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -C,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx$$

или

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{1.10}$$

Чтобы учесть, что в уравнении (1.8) правая часть есть функция $Q(x)$, общее решение уравнения (1.8) будем искать в виде, аналогичном (1.10), но с заменой C на $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.11}$$

Неизвестную функцию $C(x)$ найдем из условия, что функция (1.11) есть решение линейного уравнения (1.8) и должно удовлетворять. Для этого продифференцируем (1.11) по x:

$$y' = C'(x)e^{\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

и полученное выражение вместе с (1.11) подставим в уравнение (1.8). В результате имеем

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Интегрированием находим саму функцию $C(x)$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Наконец, подставляя полученное выражение для $C(x)$ в (1.11), получим общее решение линейного уравнения (1.8):

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1]e^{-\int P(x)dx}. \qquad (1.12)$$

Заметим, что формулу (1.12) не следует непосредственно использовать для нахождения решения линейного уравнения, а описанная процедура выполняется всякий раз заново при решении линейных уравнений.

Метод подстановки

Линейное уравнение (1.8) можно решить с помощью подстановки

$$y=u(x)\upsilon(x), \qquad (1.13)$$

где $u(x)$ и $\upsilon(x)$ – неизвестные функции от *x*, одна из которых, например, может быть выбрана произвольно. Подставляя (1.13) в (1.8), после преобразования получаем

$$\upsilon u'+(P\upsilon+\upsilon')u=Q(x). \qquad (1.14)$$

Определяя $\upsilon(x)$ из условия

$$\upsilon'+P\upsilon=0,$$

найдем затем из (1.14) функцию $u(x)$, а следовательно, и решение $y=u\upsilon$ уравнения (1.8).

Пример 1.3. Решить уравнение: $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$, $y(2)=4$.

Решение. Имеем общее решение в виде $y=u(x)\upsilon(x)$; имеем $y'=u'\upsilon+u\upsilon'$.

Подставляя выражения для y и y' в уравнение, получаем

$$x(x-1)(u'\upsilon+u\upsilon')+u\upsilon=x^2(2x-1)$$

или

$$x(x-1)\upsilon u'+[x(x-1)\upsilon'+\upsilon]u=x^2(2x-1). \qquad (1.15)$$

Функцию $\upsilon(x)$ находим из условия

$$x(x-1)\upsilon'+\upsilon=0,$$

которое есть уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его любое частное решение:

$$\int\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\int\frac{dx}{x(x-1)},$$

$$\ln|\upsilon| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

и

$$\upsilon = \frac{x}{x-1}.$$

Подставляя его в (1.15), получаем тоже уравнение с разделяющимися переменными

$$u' = 2x - 1,$$

из которого находим функцию $u(x)$:

$$u(x) = x^2 - x + C.$$

Следовательно, общее решение уравнения будет

$$y = u\upsilon = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1} \quad \text{или} \quad y = \frac{Cx}{x-1} + x^2. \tag{1.16}$$

Используя НУ, получаем

$$4 = \tilde{N}\frac{2}{2-1} + 2^2, \text{ откуда } C = 0;$$

так что искомым частным решением будет

$$y = x^2.$$

Пример 1.4. Решить уравнение

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Решение. Применим метод вариации произвольной постоянной. Рассмотрим однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\int\frac{dy}{y} = -2\int x dx \quad \text{или} \quad \ln|y| = -x^2 + \ln C$$

и общее решение имеет вид

$$y_0 = Ce^{-x^2}. \tag{1.17}$$

Общее решение неоднородного уравнения (1.16) ищем в виде, аналогичном (1.17), только с заменой $C \to C(x)$:

$$y = C(x)e^{-x^2}. \tag{1.18}$$

Дифференцируем эту функцию по x:

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2x \cdot C(x)e^{-x^2}$$

и вместе с y подставляем в (1.16); получаем

$$C'(x) = 2x \quad \text{и} \quad C(x) = x^2 + C_1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1.16) будет

$$y = (x^2 + C_1)e^{-x^2}.$$

Замечание. Если ДУ является линейным относительно x, то оно имеет вид $\dfrac{dx}{dy} + \varphi(y)x = \Psi(y)$.

Для его решения применяются описанные выше методы с учетом того, что переменные x и y меняются ролями. Например, в методе подстановки $x = u(y)\upsilon(y)$.

1.5. Уравнение Бернулли

Уравнение имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{1.19}$$

где $n \neq 0{,}1$ (при $n = 0$ это уравнение является линейным, а при $n = 1$ – с разделяющимися переменными).

С помощью замены переменной $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению. Уравнение Бернулли может быть проинтегрировано непосредственно методом вариации произвольной постоянной и с помощью подстановки $y = u(x)\upsilon(x)$.

Пример 1.5. Решить уравнение Бернулли

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Решение. Разделим обе части на y^2:

$$xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x.$$

Положим $z = y^{-1}$, тогда $z' = -y^{-2} y'$. После подстановки последнее уравнение обратится в линейное уравнение

$$-xz' + z = \ln x; \tag{1.20}$$

общее решение которого найдем, например, методом вариации постоянной. Для этого решаем сначала соответствующее однородное уравнение

$$-xz' + z = 0, \text{ отсюда } z_0 = Cx.$$

Следовательно, решение неоднородного уравнения ищем в виде $z = C(x)x$. Отсюда $z' = C'(x)x + C(x)$ и, подставляя в (1.20), получаем $C'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$. Тогда $C(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + C$ и $z = \ln x + 1 + C_1 x$.

Поэтому общее решение исходного уравнения Бернулли равно

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\ln x + 1 + C_1 x}.$$

1.6. Уравнения в полных дифференциалах

ДУ 1-го порядка вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.21}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1.22}$$

т. е. левая часть (1.21) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. В этом случае уравнение (1.21) принимает вид

$$du(x, y) = 0$$

и, следовательно, его общий интеграл равен

$$u(x, y) = c. \tag{1.23}$$

Функция $u(x, y)$ находится по ее известному полному дифференциалу (левая часть (1.21)).

Пример 1.6. Решить уравнение

$$[\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + x^2\cos(xy)dy = 0.$$

Решение. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy),$$

так что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. условие (1.22) выполнено.

Поэтому

$$[\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + x^2\cos(xy)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos(xy).$$

Интегрируя первое соотношение, получаем

$$u(x, y) = \int[\sin(xy) + xy\cos(xy)]dx + \varphi(y) = x\sin(xy) + \varphi(y).$$

Найдем $\varphi(y)$. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ должна равняться $x^2\cos(xy)$, что дает

$$x^2\cos(xy) + \varphi'(y) = x^2\cos(xy),$$

откуда $\varphi'(y) = 0$, так что $\varphi(y) = C$. Таким образом, $u(x, y) = x\sin(xy) + c$.

Поэтому общий интеграл ДУ, согласно (1.23), равен

$$x\sin(xy) = C.$$

Замечание. В некоторых случаях, когда условие (1.22) не выполняется, удается подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (1.21) становится полным дифференциалом. Такая функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Укажем частные случаи, когда можно сравнительно легко найти интегрирующий множитель:

- если $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ есть функция только *x*, то $\mu = \mu(x)$ находится из уравнения

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

• если $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ зависит только от y, то $\mu=\mu(y)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

ГЛАВА 2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Основные понятия и определения

ДУ n-го порядка имеет вид

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$$

или (2.1)

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}),$$

если оно разрешено относительно старшей производной $y^{(n)}$.

Общим решением ДУ (2.1) называется функция

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,c_n), \tag{2.2}$$

содержащая n произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$.

Уравнение вида $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, которое определяет общее решение ДУ в неявном виде, называется его *общим интегралом*. Задача нахождения решения уравнения (2.1), удовлетворяющего НУ

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{2.3}$$

называется *задачей Коши* для ДУ (2.1), а соответствующее решение – частным решением. В дальнейшем основное внимание мы сосредоточим на ДУ 2-го порядка, которые широко применяются для решения прикладных задач. При необходимости рассмотрение будет обобщаться и на ДУ произвольного, т. е. n-го порядка.

2.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Укажем некоторые виды ДУ, допускающих понижение порядка.

1. $y''=f(x)$

Общее решение получается после двукратного интегрирования

$$y' = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1,$$

$$y = \int \varphi_1(x)dx + C_1 x = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2.$$

Замечание. Этот случай легко обобщить на уравнениях вида $y^{(n)} = f(x)$, для решения которых требуется *n*-кратное интегрирование.

2. *Уравнение не содержит искомой функции* $y(x)$:

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{2.4}$$

Тогда, полагая $y' = P(x)$, получаем

$$y'' = P' \quad \text{и} \quad F(x, P, P') = 0.$$

Тем самым первоначальное уравнение сводится к последовательному решению двух уравнений первого порядка

$$F(x, P, P') = 0 \text{ и } y' = P.$$

Пример 2.1. Найти общее решение уравнения $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$ и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 0, \; y'(1) = 1.$$

Решение. Пусть $y' = P(x)$. Тогда $y'' = P'$ и получаем ДУ первого порядка

$$P' + \frac{P}{x} = x,$$

которое является линейным относительно *P*. Его решение будем искать в виде $P = u\upsilon$. Поскольку $P' = u'\upsilon + u\upsilon'$, то получаем

$$u\left(u' + \frac{\upsilon}{x}\right) + u'\upsilon = x.$$

Полагая $\upsilon' + \dfrac{\upsilon}{x} = 0$, получаем

$$\upsilon = \frac{1}{x},$$

а из уравнения $u'\upsilon = x$ находим функцию $u = \dfrac{x^3}{3} + C_1$.

Следовательно, $P = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$.

Учитывая $y' = P$, имеем уравнение

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \tag{2.5}$$

общее решение которого находится интегрированием

$$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2. \tag{2.6}$$

Для отыскания частного решения в последние два соотношения подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{3} + C_1, \quad 0 = \frac{1}{9} + C_2;$$

отсюда $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_2 = -\frac{1}{9}$.

Поэтому искомое решение имеет вид

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + 2\ln|x| - \frac{1}{3}\right).$$

3. *Уравнение не содержит явной зависимости от независимой переменной x:*

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Как и в п. 2, данное ДУ 2-го порядка сводится к последовательному решению двух уравнений 1-го порядка.

Однако здесь уже $y' = P(y)$ и $y'' = P\frac{dP}{dy}$.

Пример 2.2. Решить задачу Коши для уравнения $y'' = 2y^3$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Полагая $y' = P(y)$, получаем $y'' = \frac{dP}{dy}y' = P\frac{dP}{dy}$; поэтому $P\frac{dP}{dy} = 2y^3$, откуда

$$P^2 = y^4 + C_1 \quad \text{или} \quad P = \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + C_1}.$$

Для определения C_1 воспользуемся НУ

$$y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Тогда

$$1 = \sqrt{1 + C_1} \quad \text{и} \quad C_1 = 0.$$

Поэтому получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y^2} = dx;$$

отсюда

$$-\frac{1}{y} = x + C_2.$$

При заданных НУ $C_2 = -1$ и искомое частное решение будет

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

2.3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

2.3.1. Основные понятия и определения

ДУ n-го порядка вида

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = f(x) \qquad (2.7)$$

называется *линейным.*

Если $f(x) = 0$, то линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ)

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0 \qquad (2.8)$$

называется *однородным.*

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются некоторыми частными решениями уравнения (2.8). Совокупность этих решений называется *линейно независимой* на отрезке $[a, b]$ переменной x, если равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \qquad (2.9)$$

выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Если (2.9) справедливо и при этом постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равны нулю, то частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно зависимыми*.

Определитель n-го порядка, составленный из частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$ и их производных до порядка $(n-1)$ включительно, т. е.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

называется *определителем Вронского*.

2.3.2. Свойства решений однородного линейного дифференциального уравнения

1. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ являются частными решениями однородного ЛДУ, то их линейная комбинация

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n, \tag{2.11}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – постоянные, также является решением этого уравнения.

2. Если частные решения однородного ЛДУ являются линейно зависимыми на некотором отрезке $[a, b]$ переменной x, то в каждой точке этого отрезка $W(x) = 0$.

3. Для линейно независимой совокупности частных решений однородного ЛДУ $W(x) \neq 0$ в любой точке отрезка $[a, b]$.

2.3.3. Структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения

Теорема. Если частные решения $y_1, y_2, ... y_n$ являются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, то *общее решение* однородного ЛДУ (2.8) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{2.12}$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Функция (2.12) является решением однородного ЛДУ в силу свойства 1 (см. (2.11)). В произвольной точке $x_0 \in [\grave{a}, b]$ зададим НУ:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', ..., y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{2.13}$$

Продифференцируем (2.12) $(n-1)$ раз и в полученные соотношения подставим НУ (2.13):

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} \\ y_0' = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \ldots + C_n y_{n0}' \\ y_0^{(n-1)} = C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Система (2.14) является системой линейных уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_n. Определитель этой системы есть определитель Вронского в точке x_0, который отличен от нуля, поскольку частные решения являются линейно независимыми, т. е. $W(x_0) \neq 0$.

Поэтому система (2.14) имеет *единственное решение* относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Следовательно, существует единственное частное решение однородного ЛДУ, удовлетворяющее заданным НУ (2.13). Так как точка x_0 была выбрана произвольно, то из (2.12) можно получить любое частное решение, удовлетворяющее заданным НУ. Это и означает, что функция (2.12) будет общим решением однородного ЛДУ.

2.3.4. Структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения

Теорема. Общее решение неоднородного ЛДУ (2.7) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения (2.8) и некоторого частного решения неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + \bar{y}, \tag{2.15}$$

где y_0 – общее решение однородного уравнения (2.8), $\bar{y}$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.7).

Доказательство. Подставим функцию (2.15) в уравнение (2.7):

$$[y_0^{(n)} + P_1(x) y_0^{(n-1)} + \ldots + P_n(x) y_0] + [\bar{y}^{(n)} + P_1(x)\bar{y}^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\bar{y}] = f(x).$$

В последнем выражении первая скобка равна нулю (y_0 удовлетворяет уравнению (2.8)), а вторая – $f(x)$, поскольку $\bar{y}$ есть частное решение уравнения (2.7). Следовательно, функция (2.15) удовлетворяет неоднородному уравнению (2.7), т. е. является его решением. Это решение будет *общим*, так как y_0 содержит *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$.

В настоящее время не существует методов аналитического решения ЛДУ (2.7) и (2.8) в общем случае, когда коэффициентами являются функции $P_1(x), \ldots, P_n(x)$. Поэтому в следующей главе мы рассмотрим важный частный случай – ЛДУ с постоянными коэффициентами.

ГЛАВА 3
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной главе мы рассмотрим ЛДУ, коэффициенты которых являются постоянными. Такие уравнения находят широкое применение в различных приложениях.

3.1. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛДУ 2-го порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.1}$$

где p, q – действительные постоянные.

Согласно (2.12) общее решение уравнения (3.1) запишем как

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2. \tag{3.2}$$

Частные решения y_1 и y_2 будем находить в виде функций $y = e^{\lambda x}$, которые удовлетворяют уравнению (3.1) при условии, что

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) называется *характеристическим уравнением*. При его решении возможны следующие случаи:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – действительные числа.

Тогда частные решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ являются линейно независимыми, так как

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0,$$

и общее решение имеет вид

$$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; \tag{3.4}$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = k$.

В этом случае линейно независимые частные решения запишем как $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = \varphi(x) e^{kx}$. Очевидно, что для нашей цели достаточно считать $\varphi(x) = x$. Функция $\varphi(x)$ подбирается так, чтобы функция y_2 удовлетворяла уравнению (3.1). Легко убедиться, что функция $\varphi(x)$ должна быть линейной функцией вида $\varphi(x) = ax + b$.

Поэтому общее решение уравнения (3.1) принимает вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{kx}; \qquad (3.5)$$

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные числа.

Совокупность частных решений $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ удовлетворяют условию линейной независимости. Однако рассмотрим возможность получить общее решение с помощью действительных функций. Для этого решения $y_{1,2} = e^{(\alpha\pm i\beta)x}$ представим в виде

$$y_{1,2} = u(x) \pm i\upsilon(x), \qquad (3.6)$$

где $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\upsilon(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ есть действительная и мнимая части комплексных функций $y_{1,2}$. Непосредственной подстановкой (3.6) в (3.1) легко убедиться, что $u(x)$ и $\upsilon(x)$ тоже являются частными решениями уравнения (3.1), причем линейно независимыми. Следовательно, их можно использовать для получения общего решения:

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (3.7)$$

На основании вышеизложенного представим схему решения однородного ЛДУ (3.1), которую удобно представить в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

Однородное ЛДУ	$y'' + py' + qy = 0$
Характеристическое уравнение	$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
Корни характеристического уравнения	1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – действительные 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = k$ 3. $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\beta$ – комплексные
Общее решение однородного ЛДУ	1. $y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 2. $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$ 3. $y_0 = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Пример 3.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Так как его дискриминант имеет отрицательное значение, то корни комплексные и равны $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Поэтому общее решение исходного уравнения есть

$$y_0 = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 3.2. Решить задачу Коши для ДУ $y'' - y' - 2y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$.

Согласно табл. 3.1 общее решение уравнения равно

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Дифференцируя это решение, получаем

$$y_0' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}.$$

Подставляем в y_0 и y_0' начальные условия

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ -5 = 2C_1 - C_2. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 1$ и $C_2 = 3$.

Следовательно, $y_0 = 3e^{-x} - e^{2x}$ есть искомое частное решение.

3.2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим методы решения неоднородных ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + Py' + qy = f(x). \tag{3.8}$$

3.2.1. Метод вариации произвольных постоянных

Рассматриваемый метод предполагает нахождение сначала общего решения соответствующего однородного уравнения (см. параграф 3.1)

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{3.9}$$

Общее решение неоднородного уравнения (3.8) будем искать в виде, аналогичном (3.9), но C_1 и C_2 полагаем зависящими от x из-за наличия отличной от нуля правой части $f(x)$, т. е.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 . \tag{3.10}$$

Неизвестные пока функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определим из условия, что (3.10) должно быть решением неоднородного уравнения (3.8), а значит удовлетворять ему.

Дифференцируя (3.10), получаем

$$y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'. \tag{3.11}$$

Так как для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ необходимы два соотношения, то одно из них можно задать произвольно, например,

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 . \tag{3.12}$$

Тогда (3.11) принимает вид

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' ;$$

откуда

$$y'' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''.$$

Подставляя (3.10), y' и y'' в уравнение (3.8), получаем, что последнее обращается в тождество, если

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) . \tag{3.13}$$

Итак, система уравнений (3.12), (3.13) позволяет однозначно определить $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, поскольку ее определитель есть определитель Вронского, отличный от нуля в силу линейной независимости y_1 и y_2. Сами функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ находятся последующим интегрированием, и подстановка их в (3.10) дает общее решение неоднородного ЛДУ (3.8). Таким образом, схема решения неоднородного ЛДУ методом вариации выглядит следующим образом:

- найти общее решение соответствующего однородного уравнения (3.9)

$$y_0 = \tilde{N}_1 y_1 + \tilde{N}_2 y_2 ;$$

- записать общее решение неоднородного ЛДУ в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 ;$$

- составить систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \tag{3.14}$$

и решить ее относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$;

- путем интегрирования найти $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \varphi(x) + \overline{C}_1,\ C_2(x) = \Psi(x) + \overline{C}_2$$

и, подставив их в (3.10), записать искомое решение неоднородного ЛДУ в виде (см. параграф 2.3.4)

$$y = \underbrace{\overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2}_{y_0} + \underbrace{\varphi(x)y_1 + \Psi(x)y_2}_{\bar{y}}.$$

Пример 3.3. Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ равно

$$y_0 = \tilde{N}_1 \cos x + \tilde{N}_2 \sin x,$$

так как корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm i$ являются комплексными (см. табл. 3.1 и параграф 3.1). Поэтому общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin x.$$

Так как $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ и соответственно $y_1' = -\sin x$, $y_2' = \cos x$, получаем систему уравнений (см.(3.14)):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решение ее найдем по формулам Крамера

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ C_2'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x$, $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$

Поэтому $C_1'(x) = -\text{tg}x$, $C_2'(x) = 1$ и, интегрируя их, получаем

$$C_1(x) = -\int \text{tg}x dx = \ln|\cos x| + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = x + \overline{C}_2.$$

Согласно (3.15) искомое решение есть

$$y = \overline{C}_1 \cos x + \overline{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

3.2.2. Специальная правая часть

Если правая часть $f(x)$ уравнения (3.8) имеет специальный вид, то его общее решение можно искать сразу по формуле (2.15):

$y = y_0 + \bar{y}$.

Общее решение однородного уравнения y_0 находится в соответствии с табл. 3.1 параграфа 3.1.

Частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения определяется в зависимости от вида функции $f(x)$ по следующим правилам.

I. $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, (3.16)

где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*.

1. Если *a не является* корнем характеристического уравнения, то

$$\bar{y} = Q_n(x)e^{ax}, \tag{3.17}$$

где $Q_n(x)$ – многочлен такой же степени, как и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2. Если *a является* корнем характеристического уравнения кратности *l*, то

$$\bar{y} = x^l Q_n(x)e^{ax}. \tag{3.18}$$

II. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$. (3.19)

1. Если $(\alpha \pm i\beta)$ *не являются* корнями характеристического уравнения, то

$$\bar{y} = e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x], \tag{3.20}$$

где $M_s(x)$, $N_s(x)$–многочлены степени $s = \max(m, n)$ с неопределенными коэффициентами.

2. Если $(\alpha \pm i\beta)$ являются корнями характеристического уравнения кратности μ, то

$$\bar{y} = x^{\mu} e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x]. \tag{3.21}$$

Неопределенные коэффициенты в $Q_n(x)$, $M_s(x)$, $N_s(x)$ находятся из условия, чтобы функция $\bar{y}$ удовлетворяла уравнению (3.8).

Принцип суперпозиции решений

Если правая часть $f(x)$ неоднородного ЛДУ представляется как $f(x)=\sum_{i=1}^{k} f_i(x)$, а функции $f_i(x)$ имеют вид (3.16) и/или (3.19), то частное решение $\bar{y}$ этого уравнения равно

$$\bar{y}=\sum_{i=1}^{k}\bar{y}_i ,$$

где $\bar{y}_1$ соответствует $f_1(x),...,\bar{y}_k - f_k(x)$.

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения

$$y''+y'=4x^2e^x .$$

Решение. Искомое решение будем искать в виде $y=y_0+\bar{y}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. Значит общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения будет

$$y_0=C_1+C_2e^{-x} .$$

Правая часть уравнения $f(x)=4x^2e^x$ относится к типу I (см. (3.16)), причем $P_n(x)=4x^2$, $a=1$. Так как $a=1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде (см. правило I п. 1, формула (3.17))

$$\bar{y}=(Ax^2+Bx+C)e^x .$$

Подставляя его в исходное уравнение и сокращая обе части уравнения на e^x, будем иметь

$$2Ax^2+(6A+2B)x+2A+3B+2c=4x^2 .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases}2A=4,\\ 6A+2B=0,\\ 2A+3B+2C=0,\end{cases}$$

решая которую, находим $A=2$, $B=-6$, $C=7$, так что

$$\bar{y}=(2x^2-6x+7)e^x.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y=C_1+C_2e^{-x}+(2x^2-6x+7)e^x.$$

Пример 3.5. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=e^{-x}\cos 2x.$$

Решение. Искомое решение ищем в виде $y=y_0+\bar{y}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$, так что

$$y_0=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Функция $f(x)=e^{-x}\cos 2x$ относится к типу II (3.19), где $P_n(x)=1$, $Q_m(x)=0$, $\alpha=-1$, $\beta=2$.

Так как числа $\alpha\pm i\beta=-1\pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения кратности $\mu=1$ (правило II, п. 2), то, согласно (3.21), $\bar{y}$ надо искать в виде

$$\bar{y}=xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Тогда

$$\bar{y}'=e^{-x}[(A-Ax+2Bx)\cos 2x+(B-Bx-2Ax)\sin 2x],$$

$$y''=e^{-x}[(2A-3Ax+4B-4Bx)\cos 2x+(-2B-3Bx-4A+4Ax)\sin 2x)].$$

Подставляя выражения для $\bar{y}$ и ее производных в исходное уравнение и сокращая на e^{-x}, будем иметь

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x;$$

откуда $A=0$, $B=1/4$, и, следовательно,

$$\bar{y}=\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x.$$

Общее решение исходного уравнения будет

$$\bar{y}=\frac{1}{4}e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{1}{4}\sin 2x)+\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x.$$

3.3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

3.3.1. Однородные линейные дифференциальные уравнения

Рассмотрим ДУ

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \qquad (3.22)$$

где $a_1, ..., a_n$ – действительные числа.

Общее решение имеет вид (гл. 2, параграф 2.3.3)

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n.$$

Набор линейно независимых частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$ формируется в соответствии с решениями характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$$

по следующим правилам:

- каждому действительному корню λ кратности s соответствуют частные решения

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{s-1} e^{\lambda x};$$

- каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности μ сопоставляются частные решения

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x;\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x;\ \ldots;\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 3.6. Найти общее решение уравнения

$$y^{\text{V}} - 2y^{\text{IV}} + 2y^{\text{III}} - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

и преобразуем его к виду

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = 2 \quad (s = 1)$,

$$\lambda_{2,3;4,5} = \pm i \quad (\mu = 2).$$

Набор линейно независимых частных решений исходного уравнения есть

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = x\cos x,\ y_5 = x\sin x.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения равно

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x .$$

3.3.2. Неоднородные линейные диффренциальные уравнения

Эти уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x) . \tag{3.23}$$

Для их решения применяются методы вариации произвольных постоянных и специальной правой части (см. параграф 3.2). Однако в случае проявления (3.23) соответствующее ему однородное уравнение будет уже n-го порядка (см. параграф 3.3.1). В методе вариации функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + ... + C_n'(x) y_n = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + ... + C_n'(x) y_n' = 0 \\ ... \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C'c_2(x) y_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

В случае, когда $f(x)$ в уравнении (3.23) имеет специальный вид, частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения находится в соответствии со схемой параграфа 3.2.2 (см. (3.16)–(3.21)).

ГЛАВА 4
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия

Системой ДУ называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Система ДУ первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{4.1}$$

где x – независимая переменная; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – независимые функции от x, называется *нормальной системой* *n*-го порядка.

Общим решением системы (4.1) является совокупность функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \\ \ldots \\ {}_n = \varphi_n\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \end{cases} \tag{4.2}$$

в которой $C_1, C_2, ..., C_n$ – производные постоянные.

Для решения задачи Коши, т. е. нахождения частного решения из (4.2), необходимо задать начальные условия:

$$y_1\left(x_0\right) = y_{10}, \ y_2\left(x_0\right) = y_{20}, \ \ldots, \ y_n\left(x_0\right) = y_{n0}. \tag{4.3}$$

4.2. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений

Общим методом решения нормальной системы (4.1) является *метод исключения*. Суть его состоит в том, что с помощью преобразований нормальная система из *n* уравнений сводится к одному ДУ *n*-го порядка. Рассмотрим более подробно схему данного метода.

Одно из уравнений системы (4.1), например первое, продифференцируем по x

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

и производные $\frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{dy_n}{dx}$ заменяем правыми частями уравнений системы, т. е. $f_1, ..., f_n$. Тогда будем иметь

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right).$$

Повторяем эту процедуру пока не получим производную $\frac{d^n y_1}{dx^n}$. В результате имеем следующую систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\
\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\
\ldots \\
\dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n), \\
\dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n).
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

Из первых (n – 1) уравнений этой системы можем определить $y_2, \ldots, y_n$ как функции $x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(n-1)}$:

$$
\begin{cases}
y_2 = \psi\left(x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right), \\
\ldots \\
y_n = \psi_n\left(x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right).
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

Если (4.5) подставить в последнее уравнение системы (4.4), то получим ДУ n-го порядка относительно неизвестной функции y_1:

$$
\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right). \tag{4.6}
$$

Решая его, находим функцию $y_1 = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, а остальные неизвестные функции $y_2, \ldots, y_n$ – из системы (4.5).

Пример 4.1. Найти частное решение системы уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = y + z + x, \\
\dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x,
\end{cases}
$$

если $y(0) = 1$ и $z(0) = 0$.

Решение. Первое уравнение дифференцируем по x

$$
\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1.
$$

Вместо $\frac{dz}{dx}$ подставим правую часть второго уравнения; тогда имеем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 4y - 3z + 2x + 1.$$

Так как из первого уравнения системы

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x, \tag{4.7}$$

то окончательно получаем уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1, \tag{4.8}$$

которое является неоднородным ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Его общее решение будем искать в виде

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1$; поэтому

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

Так как $f(x) = 5x + 1$ относится к типу I (см. (3.16)), где $P_n(x) = 5x + 1$ и $a = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$\bar{y} = Ax + B.$$

Подставляя $\bar{y} = Ax + B$, $\frac{d\bar{y}}{dx} = A$ и $\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = 0$ в уравнении (4.8), находим, что $A = 5$ и $B = -9$. Итак, $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9$.

Функцию z находим из соотношения (4.7):

$$z = [(1 - 2x)C_2 - 2C_1]e^{-x} - 2(3x - 7).$$

В общие решения для y и z подставим начальные условия: при $x = 0$, $y = 1$ и $z = 0$

$$\begin{cases} 1 = C_1 - 9, \\ 0 = C_2 - 2C_1 + 14, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 10$ и $C_2 = 6$.

Искомое частное решение системы есть

$$y = 2(5 + 3x)e^{-x} + 5x - 9,$$

$$z = -2\left[(6x + 7)e^{-x} + 3x - 7\right].$$

4.3 Однородные нормальные системы с постоянными коэффициентами

Если нормальная система (4.1) имеет вид

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k(x),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

где коэффициенты a_{ik} постоянные, а $y_k(x)$ – искомые функции, то она называется *однородной* с постоянными коэффициентами.

Такие системы можно решать, помимо метода исключения, также *методом Эйлера*.

Рассмотрим этот метод в применении к системе двух ДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ay + bz, \\ \dfrac{dz}{dx} = cy + dz. \end{cases} \tag{4.9}$$

Частные решения системы (4.9) ищем в виде

$$y = \alpha e^{\lambda x},\ z = \beta e^{\lambda x};\ \alpha, \beta, \lambda \text{ – постоянные.} \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.9) и сокращая на $e^{\lambda x}$, получаем систему уравнений для определения α и β:

$$\begin{cases} (a - \lambda)\alpha + b\beta = 0 \\ c\alpha + (d - \lambda)\beta = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Система (4.11) имеет ненулевое решение, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) называется *характеристическим.*

1. Пусть корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения – действительные и различные. Подставив в (4.11) вместо λ число λ_1 и решив систему (4.11), получим α_1 и β_1. Затем положим в (4.11) $\lambda = \lambda_2$ и получим

значения α_2 и β_2. Соответственно двум наборам чисел α и β получим частные решения

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}, \;\; z_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 x};$$

$$y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 x}, \; z_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Общее решение системы записываем в виде:

$$y = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 x},$$

$$z = C_1 \beta_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 4.2. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Корни его – $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 1$. В (4.11) подставляем $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 = 0, \end{cases}$$

откуда $\alpha_1 = \beta_1$ и полагаем $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

Выписываем частные решения

$$y_1 = e^{4x}, \; z_1 = e^{4x}.$$

Аналогично для $\lambda_2 = 1$ находим

$\alpha_2 = -2\beta_2$ или, полагая $\beta_2 = -1$, $\alpha_2 = 2$.

Тогда

$$y_2 = 2e^{x}, \; z_2 = -e^{x}.$$

Следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{4x} + 2C_2 e^{1} x, \; z = C_1 e^{4x} - C_2 e^{x}.$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения комплексные.

Пример 4.3. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 5z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Выпишем систему для определения α и β:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha - 5\beta = 0, \\ 2\alpha - (1+\lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

Подставляя $\lambda_1 = 3i$ в эту систему, получаем два уравнения для определения α_1 и β_1:

$$(1-3i)\alpha_1 - 5\beta_1 = 0,\ 2\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0,$$

из которых одно является следствием другого (в силу того, что определитель системы равен нулю). Возьмём $\alpha_1 = 5$, тогда $\beta_1 = 1 - 3i$, и запишем частное решение так:

$$y_1 = 5e^{3ix},\ z_1 = (1-3i)e^{3ix}. \qquad (4.13)$$

Находить второе частное решение нет необходимости, так как можно написать общее решение системы, пользуясь формулами

$$y = C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1,\ z = C_1 \operatorname{Re} z_1 + C_2 \operatorname{Im} z_2,$$

где символы Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексных функций y_1 и z_1.

Пользуясь известной формулой Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi,$$

из (4.13) получаем

$$y_1 = 5(\cos 3x + i\sin 3x),$$

$$z_1 = \cos 3x + 3\sin 3x + i(\sin 3x - 3\cos 3x),$$

откуда

$$\operatorname{Re} y_1 = 5\cos 3x,\ \operatorname{Im} y_1 = 5\sin 3x,\ \operatorname{Re} z_1 = \cos 3x + 3\sin 3x,$$

$$\operatorname{Im} z_1 = \sin 3x - 3\cos 3x.$$

Общее решение есть

$$y = 5C_1\cos 3x + 5C_2\sin 3x,$$

$$z = C_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + C_2(\sin 3x - 3\cos 3x).$$

3. Случай кратных корней.

Пример 4.4. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4z - y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

В этом случае решение следует искать в виде

$$y = (\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x},\ z = (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x}. \qquad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в первое уравнение системы получаем

$$3(\alpha_1 + \beta_1 x) + \beta_1 = 2(\alpha_1 + \beta_1 x) + (\alpha_2 + \beta_2 x).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получаем

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 3\beta_1 = 2\beta_1 + \beta_2, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1,\ \beta_2 = \beta_1.$$

Величины α_1 и β_1 остаются произвольными. Обозначая их соответственно через C_1 и C_2, получаем общее решение системы:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x},\ z = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{3x}.$$

ГЛАВА 5
ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

5.1. Общие сведения о преобразовании Лапласа

Функцией – оригиналом – называется функция $f(t)$ действительного переменного *t*, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;

2) $f(t)$ кусочно-непрерывная функция в области $t \geq 0$;

3) $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, где $M > 0$, $\alpha \geq 0$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \alpha + i\beta$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{5.1}$$

при $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Указанное выше условие 3 обеспечивает существование интеграла (5.1).

Преобразование (5.1), сопоставляющее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, называется *преобразованием* Лапласа. При этом пишут $f(t) = F(p)$.

Приведём ниже *свойства преобразования Лапласа*.
В дальнейшем считаем, что

$$f(t) = F(p),\ g(t) = G(p).$$

1. *Свойство линейности*. Для любых постоянных a и b

$$af(t) + bg(t) = aF(p) + bG(p).$$

2. *Теорема подобия*. Для любой постоянной $a > 0$

$$f(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

3. *Теорема смещения*. Для любого числа λ

$$e^{\lambda t}f(t) = F(p - \lambda).$$

4. *Теорема запаздывания*. Для любого числа $\tau > 0$

$$f(t - \tau) = e^{-p\tau}F(p).$$

5. *Дифференцирование оригинала*

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

6. *Интегрирование оригинала*

$$\int_0^t f(t)dt = \frac{F(p)}{p}.$$

7. *Дифференцирование изображения*

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n t^n f(t).$$

8. *Интегрирование изображения*

$$\int_p^\infty F(p)dp = \frac{f(t)}{t}.$$

9. *Теорема умножения изображений*

$$F(p)G(p) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

5.2 Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Для удобства рассмотрим ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \tag{5.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1. \tag{5.3}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до второго порядка включительно являются оригиналами и $x(t) = X(p)$, $f(t) = F(p)$.

Операторный метод решения ЛДУ предполагает следующие обязательные этапы:

- переход от исходного ДУ к операторному уравнению, т. е. от оригиналов к их изображениям, с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы соответствий между оригиналами и изображениями (табл. 5.1);
- нахождение решения $X(p)$ в изображениях из операторного уравнения;

• нахождение по изображению $X(p)$ его оригинала $x(t)$, который и будет искомым частным решением ДУ.

Применительно к уравнению (5.2) описанный метод реализуется так.

По свойству дифференцирования оригинала имеем

$$x'(t) = pX(p) - x_0, \ x''(t) = p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$$

или с учётом (5.3)

$$x'(t) = pX(p) - x(0), \ x''(t) = p^2 X(p) - px_0 - x_1.$$

Подставляя эти соотношения, а также $x(t) \risingdotseq X(p)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$ в (5.2), получаем операторное уравнение

$$(p^2 + a_1 p + a_2)X(p) = F(p) + x_0(p + a_1) + x_1. \tag{5.4}$$

Решая уравнение (5.4), найдём решение в изображениях

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0(p + a_1) + x_1}{p^2 + a_1 p + a_2}. \tag{5.5}$$

Находя оригинал для $X(p)$, получаем решение $x(t)$ уравнения (5.2), удовлетворяющее начальным условиям (5.3).

Аналогично можно решить любое уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и с начальными условиями при $t = 0$.

Таблица 5.1

Оригиналы и их изображения

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
5	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Окончание табл. 5.1

№ п/п	Оригинал	Изображение
8	$\text{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
9	$\text{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
10	$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
11	$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
12	$e^{at}\text{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
13	$e^{at}\text{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
14	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\,\text{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$t\,\text{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$

Преимущество операционного метода решения задачи Коши перед классическими методами состоит в том, что, во-первых, операторное уравнение является линейным алгебраическим уравнением относительно $X(p)$ и, следовательно, в математическом отношении более простым, чем исходное ДУ; во-вторых, операционным методом сразу находится частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, и не надо искать общее решение ДУ.

Операционным методом можно найти и общее решение уравнения (5.2). Для чего в начальных условиях (5.3) нужно положить

$$x_0 = C_1,\ x_1 = C_2.$$

Тогда оригинал, соответствующий изображению (5.5), будет содержать произвольные постоянные C_1 и C_2, что является признаком общего решения ДУ.

Последний этап решения ДУ операционным методом, т. е. нахождение оригинала $x(t)$ по его изображению $X(p)$, является обычно самым трудным. При нахождении оригинала по его изображению широко пользуются таблицей соответствия между оригиналами и их изображениями (табл. 5.1) и свойствами преобразования Лапласа. Кроме этого, для нахождения оригинала $x(t)$ по известному изображению $X(p)$, когда $X(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ есть правильная рациональная дробь, применяют следующие приёмы:

- эту дробь разлагают на сумму простейших дробей и находят для каждой из них оригинал, пользуясь свойствами преобразования Лапласа и табл. 5.1;
- находят полюсы p_k $(k=1,2,\ldots,m)$ этой дроби и их кратности λ_k. Тогда оригиналом для $X(p)$ будет функция

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(\lambda_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{\lambda_k-1}}{dp^{\lambda_k-1}}\left\{X(p)(p-p_k)^{\lambda_k}e^{pt}\right\}, \tag{5.6}$$

где сумма берётся по всем полюсам функции $X(p)$.

В случае, если все полюсы p_k функции $X(p)$ простые, т. е. $\lambda_k=1$ $(k=1,2,\ldots,m)$, последняя формула упрощается и принимает вид

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}\ . \tag{5.7}$$

Пример 5.1. Найти решение уравнения $x''+6x'+9x=9e^{3t}$ при начальных условиях $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Пусть $x(t)=X(p)$. В силу свойства 5, $e^{3t}=\dfrac{1}{p-3}$ и с учётом начальных условий получаем операторное уравнение

$$(p^2+6p+9)X(p)=\frac{9}{p-3};$$

откуда

$$X(p)=\frac{9}{(p-3)(p+3)^2}\,.$$

Теперь по полученному изображению найдём оригинал $x(t)$.

Первый способ. Разложим правильную рациональную дробь на простейшие:

$$\frac{9}{(p-3)(p+3)^2}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{(p+3)^2}\,.$$

Для определения неизвестных коэффициентов A, B и C получаем тождество

$$9 \equiv A(p+3)^2 + B(p-3)(p+3) + C(p-3),$$

откуда

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = -\frac{3}{2}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{1}{4}\frac{1}{p-3} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{(p+3)^2}$$

и по табл. 5.1 имеем

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{3}{2}te^{-3t} = \frac{1}{4}\left[e^{3t} - (6t+1)e^{-3t}\right].$$

Второй способ. Для функции $X(p) = \dfrac{9}{(p-3)(p+3)^2}$ $p = 3$ – простой полюс, а $p = -3$ – полюс второго порядка. По формуле (5.6) имеем

$$x(t) = \lim_{p\to 3}\left\{\frac{9}{(p-3)(p+3)^2}(p-3)e^{pt}\right\} + \lim_{p\to 3}\frac{d}{dp}\left\{\frac{9}{(p-3)(p+3)^2}(p+3)^2 e^{pt}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{3t} + 9\lim_{p\to -3}\left[\left(-\frac{1}{(p-3)^2} + \frac{t}{p-3}\right)e^{pt}\right] = \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}(6t+1)e^{-3t}.$$

Искомое решение будет равно

$$x(t) = \frac{1}{4}\left[e^{3t} - (6t+1)e^{-3t}\right].$$

5.3 Операционный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системы ЛДУ с постоянными коэффициентами операционным методом решаются так же, как и одно уравнение. Отличие лишь в том, что вместо одного операторного уравнения будем иметь систему таких уравнений, которая является системой линейных алгебраических уравнений и решается обычно с применением формул Крамера.

Пример 5.2. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 0$.

Решение. Так как $5 = \dfrac{5}{p}$, $-37t = -\dfrac{37}{p^2}$, $x(0) = y(0) = 0$, $x(t) = X(p)$ и $y(t) = Y(p)$, $x'(t) = pX(p) - x(0)$, $y(t) = pY(p) - y(0)$,
то операторная система будет иметь вид

$$\begin{cases} (p+7)X(p) - Y(p) = \dfrac{5}{p}, \\ 2X(p) + (p+5)Y(p) = -\dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

Решим эту системы по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+7 & -1 \\ 2 & p+5 \end{vmatrix} = p^2 + 12p + 37,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{5}{p} & -1 \\ -\dfrac{37}{p^2} & p+5 \end{vmatrix} = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+7 & \dfrac{5}{p} \\ 2 & -\dfrac{37}{p^2} \end{vmatrix} = \frac{-47p - 259}{p^2};$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2(p^2 + 12p + 37)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-47p - 259}{p^2(p^2 + 12p + 37)}.$$

Разлагаем дроби, стоящие в правых частях, на простейшие:

$$X(p) = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2(p^2 + 12p + 37)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 12p + 37},$$

$$Y(p)=\frac{-47p-259}{p^2(p^2+12p+37)}=\frac{M}{p}+\frac{N}{p^2}+\frac{Ep+F}{p^2+12p+37}.$$

Процедуру нахождения неопределённых коэффициентов рассмотрим на примере $X(p)$. Для этого записываем тождество

$$5p^2+25p-37=Ap(p^2+12p+37)+B(p^2+12p+37)+p^2(Cp+D).$$

Полагая $p=0$, получаем $B=-1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях тождества, имеем

$$\begin{cases} 0=A+C, \\ 5=12A+B+D, \\ 25=37A+12B; \end{cases}$$

откуда $A=1$, $C=-1$, $D=-6$. Поэтому для $X(p)$ получаем

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{p^2+12p+37}.$$

Аналогично находим для $Y(p)$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+5}{p^2+12p+37}.$$

Для перехода к оригиналам преобразуем полученные выражения для $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}+\frac{1}{(p+6)^2+1}.$$

Переходя к оригиналам (см. табл. 5.1), получим искомое решение

$$x(t)=1-t-e^{-6t}\cos t,\ y(t)=1-7t+e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\sin t.$$

ГЛАВА 6
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

6.1. Методика составления дифференциальных уравнений

Составление ДУ по условию задачи (механической, физической, технической или любой другой) состоит обычно в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, которые сразу же заменяются соответствующими дифференциалами.

В ряде случаев ДУ получается без рассмотрения приращений за счет их предварительного учета. Так, скорость и ускорение в любой момент времени есть

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Здесь приращения Δs, $\Delta\upsilon$ и Δt не привлекаются, хотя фактически они учтены в силу того, что

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \; a = \frac{d\upsilon}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}.$$

Изучение любого процесса сводится к определению его элементарных процессов и установлению общего закона его течения. Элементарный процесс выражается ДУ, связывающим переменные величины процесса с их дифференциалами или производными. Закон течения процесса получается после решения ДУ и выражается через переменные величины (параметры) процесса.

Исчерпывающих правил для составления ДУ нет. В большинстве случаев методика решения прикладных задач с применением ДУ сводится к следующему:

1) постановка задачи и составление чертежа, поясняющего ее суть;
2) составление ДУ рассматриваемого процесса;
3) решение этого уравнения и определение общего решения;
4) определение частного решения задачи на основании начальных условий;
5) определение, по мере необходимости, вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и т. д.) с использованием дополнительных условий задачи;
6) вывод общего закона процесса и числовое определение искомых величин;
7) анализ ответа.

Некоторые из этих рекомендаций в зависимости от характера задачи могут и не использоваться. Можно делать упрощающие допущения, например, неравномерное движение материальной точки за малый промежуток времени заменять равномерным; предполагать скорость протекания любого процесса за малый отрезок времени постоянной; заменять сложный (криволинейный) элемент прикладной задачи более простым (прямолинейным). В математической модели задачи надо учитывать только основные параметры.

6.2. Прямолинейное движение материальной точки в среде с сопротивлением

Задача 6.1. Точка массы m движется прямолинейно и находится под действием силы, зависящей от ее скорости υ. Определить скорость материальной точки и ее расстояние от начального положения в произвольный момент времени.

Решение. Пусть $x(t)$ – расстояние точки от начального положения x_0; тогда ее скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$. Обозначим силу, действующую на материальную точку, через $f(\upsilon)$. Так как эта сила зависит от скорости, то она, как правило, имеет характер сопротивления и направлена против движения.

ДУ процесса запишем на основе второго закона Ньютона в виде

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -f(\upsilon)\,. \tag{6.1}$$

Разделяя в уравнении (6.1) переменные, получим

$$dt = -m\frac{d\upsilon}{f(\upsilon)}.$$

Пусть при $t = 0$ скорость точки $\upsilon = \upsilon_0$, тогда

$$\int_0^t dt = -m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{f(\upsilon)}$$

или

$$t = -m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{f(\upsilon)}\,. \tag{6.2}$$

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Постоянное трение: $f(\upsilon) = F$.

Тогда из (6.2) получаем

$$t = -\frac{m}{F}\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -\frac{m}{F}(\upsilon - \upsilon_0)$$

или

$$\upsilon = \upsilon_0 - \frac{F}{m}t. \tag{6.3}$$

Далее, заменим $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ и проинтегрируем полученное ДУ с учетом НУ: при $t = 0$ $x = x_0$

$$\int\limits_{x_0}^{x} dx = \int\limits_{0}^{t}\left(\upsilon_0 - \frac{F}{m}t\right)dt;$$

откуда получаем закон движения

$$x = x_0 + \upsilon_0 t - \frac{F}{2m}t^2. \tag{6.4}$$

2. Сопротивление пропорционально скорости: $f(\upsilon) = k\upsilon\ (k > 0)$.

В этом случае (6.2) имеет вид

$$t = -\frac{m}{k}\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon}$$

и для скорости движения точки получаем выражение

$$\upsilon = \upsilon_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{6.5}$$

Так как $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, то для нахождения $x(t)$ имеем ДУ

$$dx = \upsilon_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt$$

и после интегрирования получаем закон движения материальной точки

$$x = x_0 + \frac{m\upsilon_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}). \tag{6.6}$$

6.3. Прямолинейное движение с постоянным ускорением

Задача 6.2. Материальная точка движется по прямой с постоянным ускорение a. Найти закон движения точки, если ее начальная скорость равна υ_0, а начальное положение – s_0.

Решение. Ускорение a представляет собой производную от скорости υ по времени t, т. е. $\frac{d\upsilon}{dt} = a$, поэтому

$$d\upsilon = adt.$$

Интегрируя это уравнение, находим его общее решение

$$\upsilon = at + C_1. \tag{6.7}$$

Для определения C_1 воспользуемся НУ:

$$\upsilon = \upsilon_0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Тогда из (6.7) получаем

$$\upsilon_0 = 0 + C_1 \quad \text{или} \quad C_1 = \upsilon_0.$$

Таким образом, решение (6.7) примет вид

$$\upsilon = \upsilon_0 + at. \tag{6.8}$$

Так как скорость представляет производную пути S по времени t, т. е. $\upsilon = \frac{dS}{dt}$, то равенство (6.8) преобразуется к виду

$$\frac{dS}{dt} = \upsilon_0 + at$$

или

$$dS = (\upsilon_0 + at)dt.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение задачи

$$S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} + C^2. \tag{6.9}$$

Для определения C_2 имеется еще одно НУ – при $t = 0$ $S = s_0$. Подставим эти значения в (6.9):

$$s_0 = 0 + 0 + C_2 \text{ или } C_2 = s_0.$$

Следовательно, материальная точка движется по закону

$$S = s_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{6.10}$$

6.4. Движение тела переменной массы

Задача 6.3. Ракета с начальной массой m_0, кг взлетает с земной поверхности в вертикальном направлении. Газы выбрасываются постоянными долями *a*, кг/с и с постоянной скоростью *b*, м/с относительно ракеты $(a > 0,\ b > 0)$.

Найти скорость ракеты и расстояние, пройденное за время *t*, не учитывая действия внешних сил на ракету.

Решение. Уравнение движения ракеты имеет вид

$$F = m\frac{d\upsilon}{dt} - u\frac{dm}{dt}, \qquad (6.11)$$

где *m*, υ – масса и скорость ракеты в произвольный момент времени, *u* – скорость струи газов, образованных сгоранием топлива. При отсутствии внешних сил $F = 0$. Так как ракета выбрасывает *a*, кг/с, то в течение *t*, *с* она выбросит *at*, кг, и поэтому ее масса, спустя *t*, *с*, составит $m = m_0 - at$. Скорость газа относительно ракеты дана: $u = -b$. Таким образом на основании уравнения (6.11) получаем

$$0 = (m_0 - at)\frac{d\upsilon}{dt} - ab$$

или

$$d\upsilon = \frac{ab}{m_0 - at}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\upsilon = -b\int\frac{d(m_0 - at)}{m_0 - at},$$

откуда

$$\upsilon = -b\ln(m_0 - at) + C_1.$$

Начальное условие: при $t = 0$ $\upsilon = 0$. Отсюда постоянная интегрирования

$$C_1 = b\ln m_0,$$

и скорость ракеты будет равна

$$\upsilon = b\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - at}\right). \qquad (6.12)$$

Пусть x – расстояние, измеряемое от поверхности Земли, которое проходит ракета за время t. Тогда скорость $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ и, согласно равенству (6.12), получаем

$$\frac{dx}{dt} = -b\ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right).$$

Интегрируем это уравнение:

$$x = -b\int \ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right)dt + C_2 . \qquad (6.13)$$

Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du .$$

В нашем случае

$$u = \ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right), \; d\upsilon = dt ;$$

откуда

$$du = -\frac{a}{m_0 - at}dt , \; \upsilon = t .$$

Тогда для (6.13) получаем

$$x = -b\left[t\ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right) + \int \frac{atdt}{m_0 - at}\right] + C_2$$

или

$$x = -b\left[t\ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right) - t - \frac{m_0}{a}\ln(m_0 - at)\right] + C_2 .$$

После простых преобразований расстояние получаем в окончательном виде

$$x = \frac{b(m_0 - at)}{a}\ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right) + bt + C ,$$

где

$$C = C_2 + \frac{m_0 b}{a}\ln m_0 .$$

Начальное условие: при $t = 0$ $x = 0$. Отсюда $C = 0$ и искомое расстояние есть

$$x = bt + \frac{b}{a}(m_0 - at)\ln\left(\frac{m_0 - at}{m_0}\right). \qquad (6.14)$$

Выражения (6.12) и (6.14) действительны только для $t < \frac{m_0}{a}$, что представляет теоретический предел времени полета. Практический предел значительно меньше теоретического.

6.5. Растяжение упругой нити

Задача 6.4. Стальная проволока длиной l с поперечным сечением S растягивается с силой, постепенно возрастающей до величины F. Найти работу растяжения.

Решение. Удлинение проволоки Δl под влиянием растягивающей силы F определяется по формуле

$$\Delta l = k\frac{F}{S}l_0,$$

где k – коэффициент удлинения, l_0 – первоначальная длина проволоки.

Рассмотрим элементарный процесс:

$$dl = \frac{kl_0}{S}dF. \qquad (6.15)$$

Принимая на бесконечно малом участке удлинения dl силу F постоянной, получим работу, производимую этой силой на рассматриваемом участке,

$$dA = Fdl$$

или

$$dA = \frac{kl_0}{S}FdF.$$

Интегрируя это уравнение, получим общее решение

$$A = \frac{kl_0}{2S}F^2 + C.$$

Для определения C используем начальное условие: при $F = 0$ $A = 0$, следовательно,

$$0 = \frac{kl_0}{2S} \cdot 0 + C,$$

откуда $C = 0$.

Итак, искомая работа растяжения

$$A = \frac{kl_0}{2S} F^2 .$$

6.6. Работа опорожнения сосудов

Задача 6.5. В вертикальном цилиндрическом резервуаре диаметром 2 г находится жидкое топливо с удельным весом γ. Высота жидкости в резервуаре *h*, а общая высота резервуара *H*. Найти работу, которую необходимо затратить для опорожнения резервуара (*рис. 6.1*).

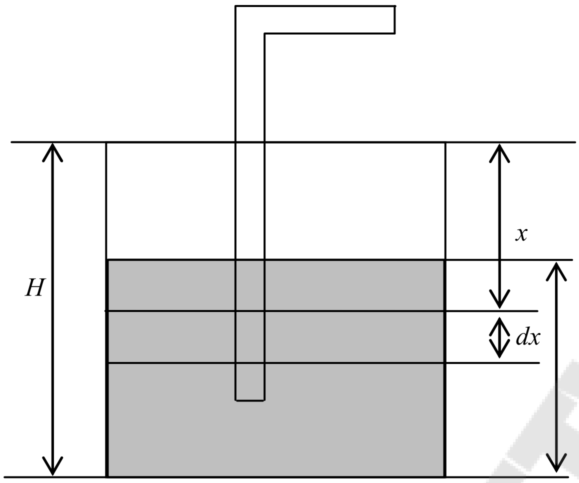

Рис. 6.1

Решение. Работа постоянной силы *F* на прямолинейном пути *S* *равна*

$$A = FS\cos\alpha ,$$

где α – угол между *F* и *S*. Выделим слой жидкости малой толщины *dx*. Производящая работу сила *F* остается постоянной на высоте Δx и определяется весом слоя:

$$dF = \pi r^2 \gamma dx .$$

Работа, необходимая для выкачивания слоя толщиной *dx* на высоту *x*, равна произведению силы на расстояние

$$dA = dF \cdot x = \pi r^2 \gamma x dx . \qquad (6.16)$$

Общее решение ДУ (6.16)

$$A = \pi r^2 \gamma \frac{x^2}{2} + C .$$

Начальное условие: при $x = 0$ $A = 0$. Отсюда постоянная интегрирования $C = 0$ и $A = \pi r^2 \gamma \frac{x^2}{2}$.

Работа при $x = H$ и $x = H - h$ соответственно будет

$$A_1 = \pi r^2 \gamma \frac{H^2}{2},$$

$$A_2 = \pi r^2 \gamma \frac{(H-h)^2}{2} .$$

Работа, затраченная на выкачивание всего топлива,

$$A = A_1 - A_2 = \pi r^2 \gamma h \left(H - \frac{h}{2} \right).$$

Величина

$$\pi r^2 / \gamma h = P,$$

где P – вес всей жидкости. Тогда искомая работа

$$A = P\left(H - \frac{h}{2} \right).$$

6.7. Истечение жидкости из сосудов

Задача 6.6. Заполненный водой цилиндрический сосуд высотой h и площадью дна S имеет в дне отверстие, площадь которого σ. Найти время истечения воды через отверстие (*рис. 6.2*).

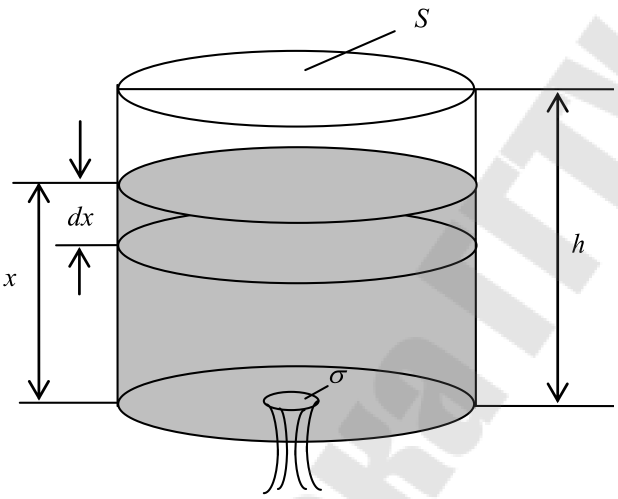

Рис. 6.2

Решение. Пусть в момент t высота воды в сосуде над площадью σ составляет x. За время dt эта высота изменится на величину – dx. За это время вытечет вода объемом Sdx. С другой стороны, этот объем воды равен объему столба воды с основанием σ и высотой υdt, где υ – скорость истечения, т. е. объем равен $\sigma\upsilon dt$. Скорость истечения определяется по формуле

$$\upsilon = \sqrt{2gH},$$

где H – глубина погружения отверстия в данный момент. В нашем случае $H = x$ и поэтому $\upsilon = \sqrt{2gx}$. Следовательно, искомый объем $\sigma\upsilon dt = \sigma\sqrt{2gx}dt$ и ДУ процесса имеет вид

$$-Sdx = \sigma\sqrt{2gx}dt \tag{6.17}$$

с начальным условием: при $t = 0$ $x = h$.

Разделяя переменные в (6.17), имеем

$$-\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=dt;$$

откуда после интегрирования получаем общее решение

$$t=-\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2x}{g}}+C.$$

Для определения постоянной C воспользуемся начальным условием: при $t=0$ $x=h$; тогда

$$0=-\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}+C,\ C=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Следовательно, закон данного процесса принимает вид

$$t=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h}-\sqrt{x}).$$

В момент опорожнения сосуда $t=\tau$ и высота воды в сосуде $x=0$, откуда искомое время

$$\tau=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (6.18)$$

Из (6.18) следует, что при заданных размерах сосуда S и h время истечения жидкости обратно пропорционально площади отверстия σ.

6.8. Охлаждение тела

Задача 6.7. Найти закон изменения температуры T охлаждающегося тела массы m и теплоемкости c. Температура окружающей среды T_0. Первоначальная температура тела равна T_1. Считая, что T_0 = 20 ºС и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 до 60 ºС, определить через сколько времени температура тела понизится до 30 ºС.

Решение. По закону Ньютона бесконечно малое количество теплоты dQ, отданное телом в течение бесконечно малого промежутка времени dt, пропорционально разности температур тела и окружающей среды:

$$dQ=-k(T-T_0)dt,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

С другой стороны,

$$Q = mc(T - T_0)$$

и после дифференцирования имеем

$$dQ = mcdT\ .$$

Поэтому для процесса охлаждения тела получаем следующее ДУ:

$$mcdT = -k(T - T_0)dt \tag{6.19}$$

с НУ: при $t = 0\ \ T = T_1$.

Разделяем переменные в (6.19)

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{k}{mC}dt$$

и интегрируем

$$\int \frac{d(T - T_0)}{T - T_0} = -\frac{k}{mc}\int dt\ ,$$

$$\ln(T - T_0) = -\frac{k}{mc}t + \ln C$$

или

$$T = T_0 + Ce^{-\lambda t}\ , \tag{6.20}$$

где $\lambda = \frac{k}{mc}$.

С помощью НУ определим значение произвольной постоянной C:

$$T_1 = T_0 + Ce^{-\lambda \cdot 0};$$

отсюда $C = T_1 - T_0$ и, следовательно, охлаждение тела происходит по закону

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\lambda t}\ . \tag{6.21}$$

Используя числовые данные, т. е. T_0 = 20 ºС, T_1 = 100 ºС, T_0 = 60 ºС, $t = 20$ мин, находим

$$e^{\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Теперь по формуле (6.20) можем вычислить время охлаждения тела до 30 ºС:

$$30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20},$$

откуда $t = 60$ мин.

6.9. Распределение теплоты в стержне

Задача 6.8. Стержень длиною $2l$ и площадью поперечного сечения S имеет на концах одинаковую температуру t_0. По стержню проходит ток постоянной величины I, плотность которого $i = \frac{I}{S}$. Найти распределение теплоты по стрежню, если температура максимальна в центре стержня. Потерей теплоты в окружающую среду пренебречь (*рис. 6.3*).

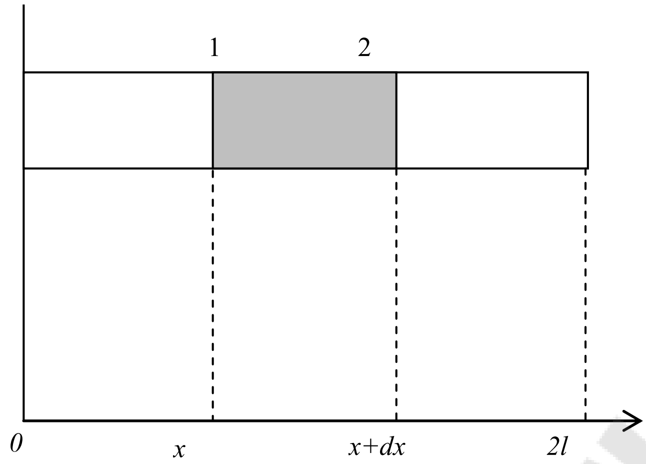

Рис. 6.3

Решение. Рассмотрим элемент стержня dx. Потоки теплоты сечения 1 и 2 в единицу времени по закону Фурье соответственно равны:

$$\frac{-\lambda S dt(x)}{dx}$$

и

$$\frac{-\lambda S dt(x+dx)}{dx},$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Различие этих потоков обусловлено нагреванием элемента стержня током, выделяющим теплоту в количестве

$$Q = I^2 R = i^2 S^2 \frac{2\rho l}{S} = 2i^2 S\rho l,$$

где ρ – удельное сопротивление.

При установившемся состоянии

$$-\lambda S\left[\frac{dt(x+dx)}{dx} - \frac{dt(x)}{dx}\right] = 2i^2 S\rho l.$$

Применяя к левой части равенства теорему Лагранжа на отрезке $[x, x+dx]$, получаем ДУ процесса

$$\frac{d^2 t(x)}{dx^2} = A, \tag{6.22}$$

где $A = -\frac{2i^2\rho l}{\lambda}$.

Общее решение этого уравнения находится последовательным интегрированием и имеет вид

$$t(x) = Ax^2 + C_1 x + C_2 . \qquad (6.23)$$

Начальные условия: при $x = 0$ $t = t_0$ и при $x = l$ $\dfrac{dt}{dx} = 0$ (температура в центре стержня максимальная).

Отсюда

$$C_1 = -2Al ,\ C_2 = 0 .$$

Найденные значения постоянных интегрирования подставляем в (6.23), и искомое распределение температуры по стержню будет

$$t(x) = Ax^2 - 2Alx + t_0 .$$

6.10. Исследование колебаний

Свободные колебания

Задача 6.9. Материальная точка массой m совершает колебательные движения под действием упругой силы. Сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости точки. Определить закон движения материальной точки.

Решение. Пусть $x(t)$ – отклонение от точки положения равновесия. Тогда скорость точки $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$. На точку действует сила упругости пружины $F_{\text{упр}} = -k_2 x$ и сила сопротивления среды

$$F_C = -k_1 \upsilon = -k_1 \frac{dx}{dt} \ (k_1 > 0,\ k_2 > 0) .$$

Для описания закона движения материальной точки используем второй закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_{\text{óïð}} + \vec{F}_C$$

или в скалярном виде

$$m \frac{d\upsilon}{dt} = -k_2 x - k_1 \frac{dx}{dt} .$$

Так как $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$, то получаем ДУ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k_1\frac{dx}{dt}+k_2x=0. \qquad (6.24)$$

Начальные условия зададим следующим образом:

$$x\big|_{t=0}=x_0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\upsilon_0. \qquad (6.25)$$

Уравнение (6.24) представляет собой однородное линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение ДУ определяется в соответствии с параграфом 3.1.

1. Допустим, что силой сопротивления среду можно пренебречь. Тогда ДУ (6.24) принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k_2x=0$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \qquad (6.26)$$

где $k^2=\frac{k_2}{m}$.

Характеристическое уравнение для (6.26):

$$\lambda^2+k^2=0 \text{ или } \lambda^2=-k^2$$

имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-k^2}=\pm ik$.

Поэтому общее решение уравнения (6.26) равно:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \qquad (6.27)$$

Значения C_1 и C_2 найдем из НУ (6.25). Для этого (6.27) продифференцируем по t:

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt. \qquad (6.28)$$

Из (6.25), (6.27) и (6.28) получаем

$$x_0=C_1,\ C_2=\frac{\upsilon_0}{k}.$$

Тогда решение ДУ равно:

$$x=x_0\cos kt+\frac{\upsilon_0}{k}\sin kt$$

или

$$x = x_0\left(\cos kt + \frac{\upsilon_0}{x_0 k}\sin kt\right).$$

Пусть $\frac{\upsilon_0}{x_0 k} = tg\varphi$; тогда

$$x = \frac{x_0}{\cos\varphi}(\cos\varphi\cos kt + \sin\varphi\sin kt) = \frac{x_0}{\cos\varphi}\cos(kt+\varphi).$$

Так как $\frac{x_0}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{x_0^2 k^2 + \upsilon_0^2}}{k} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, то решение ДУ (6.26) окончательно принимает вид

$$x = A\cos(kt+\varphi), \tag{6.29}$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{k}\right)^2}$ – амплитуда,

$\varphi = arctg\frac{C_2}{C_1} = arctg\left(\frac{\upsilon_0}{x_0 k}\right)$ – начальная фаза,

k – частота, а $T = \frac{2\pi}{k}$ – период колебаний. Движение материальной точки, описываемое формулой (6.29), называется гармоническим.

2. В случае, когда сопротивлением среды пренебречь нельзя, решаем полное уравнение (6.24)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \tag{6.30}$$

где $2a = \frac{k_1}{m}$.

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2a\lambda + k^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - k^2}.$$

Если $a^2 - k^2 < 0$, то $\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{k^2 - a^2}$ и решение

$$x = e^{-at}(C_1\cos\sqrt{k^2 - a^2}t + C_2\sin\sqrt{k^2 - a^2}t)$$

представляется в виде

$$x = Ae^{-at}\cos(\sqrt{k^2 - a^2}t + \varphi). \tag{6.31}$$

Амплитуда этого гармонического колебания равна Ae^{-at} и с увеличением времени t она уменьшается, поскольку $a > 0$. Поэтому уравнение (6.31) описывает затухающие гармонические колебания.

При $a^2 - k^2 > 0$ корни характеристического уравнения действительные и равны

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - k^2}.$$

Решение ДУ (6.30)

$$x = C_1 e^{(-a+\sqrt{a^2-k^2})t} + C_2 e^{(-a-\sqrt{a^2-k^2})t}$$

не описывает колебательного движения. В этом случае движение материальной точки называется апериодическим. Такой характер движения имеет место и при $a^2 - k^2 = 0$:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-at}.$$

Вынужденные колебания

Пусть сопротивление среды отсутствует, а верхний конец пружины совершает колебания под действием внешней периодической силы $f(x) = B\sin\omega t$. В этом случае ДУ процесса становится неоднородным и имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = B\sin\omega t.$$

Общее решение этого уравнения

$$x = x_0 + \bar{x},$$

где x_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, т. е. (6.26)

$$x_0 = A\cos(kt + \varphi);$$

$\bar{x}$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения. Если частота ω внешней силы не равна частоте собственных колебаний, то это частное решение будем искать в виде

$$\bar{x} = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

Неопределенные коэффициенты C_1 и C_2 находим подстановкой $\bar{x}$ и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C_1\omega^2 \cos\omega t - C_2\omega^2 \sin\omega t$$

в неоднородное уравнение:

$$(-C_1\omega^2 + C_1k^2)\cos\omega t + (-C_2\omega^2 + C_2k^2)\sin\omega t = B\sin\omega t,$$

откуда

$$\begin{cases} -C_1\omega^2 + C_1k^2 = 0, \\ -C_2\omega^2 + C_2k^2 = B \end{cases}$$

и $C_1 = 0$ (т. к. $\omega \neq k$), $C_2 = \dfrac{B}{k^2 - \omega^2}$.

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$x = A\cos(kt + \varphi) + \frac{B\sin\omega t}{k^2 - \omega^2},$$

где $\omega \neq k$.

Колебания материальной точки получаются в результате наложения собственного колебания с частотой k и вынужденного колебания с частотой ω.

Если $\omega = k$, то частное решение будем искать в виде

$$\bar{x} = t(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t).$$

В этом случае $C_1 = -\dfrac{B}{2\omega}$, $C_2 = 0$ и решение равно

$$x = A\cos(kt + \varphi) - \frac{Bt\cos\omega t}{2\omega}.$$

Второй член правой части последнего равенства показывает, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает с увеличением *t*. Это явление (при совпадении частоты собственных колебаний системы с частотой внешней силы) называется *резонансом*.

6.11. Падение тела переменной массы

Задача 6.10. Капля с начальной массой *M*, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет массу *m*. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, если в начальный момент времени скорость капли равна нулю.

Решение. Ввиду равномерного испарения капли ее масса в момент t равна $M - mt$, а сила тяжести капли – $(M - mt)g$. Силу тяжести считаем положительной, т. е. направленной вниз.

Сила сопротивления воздуха $F_C = -k\upsilon$ (знак минус, так как она направлена вверх). Равнодействующая всех сил, приложенных к капле,

$$F = (M - mt)g - k\upsilon,$$

а так как по второму закону Ньютона

$$F = (M - mt)\frac{d\upsilon}{dt},$$

то ДУ задачи имеет вид

$$(M - mt)\frac{d\upsilon}{dt} = (M - mt)g - k\upsilon$$

или

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{k}{M - mt}\upsilon = g. \tag{6.32}$$

Это линейное уравнение и решаем его подстановкой $\upsilon = uz$. Тогда

$$\frac{d\upsilon}{dt} = z\frac{du}{dt} + u\frac{dz}{dt}$$

и линейное ДУ (6.32) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{k}{M - mt}z = 0 \tag{6.33}$$

и

$$z\frac{du}{dt} = g. \tag{6.34}$$

Решая первое из них, находим

$$\int\frac{dz}{z} = \frac{k}{m}\int\frac{d(M - mt)}{M - mt},$$

$$\ln|z| = \ln(M - mt)^{\frac{k}{m}}$$

или

$$z = (M - mt)^{\frac{k}{m}}.$$

Из (6.34) получаем

$$u = g\int (M - mt)^{-\frac{k}{m}} dt = \frac{\frac{g}{m}(M - mt)^{-\frac{k}{m}+1}}{\frac{k}{m} - 1} + C\,.$$

Отсюда

$$\upsilon = uz = \frac{g(M - mt)}{k - m} + C(M - mt)^{\frac{k}{m}}\,. \qquad (6.35)$$

Начальное условие: при $t = 0$ $\upsilon = 0$. Следовательно,

$$0 = \frac{gM}{k - m} + CM^{\frac{k}{m}},$$

откуда

$$C = \frac{gMM^{-\frac{k}{m}}}{m - k} = \frac{gM^{1-\frac{k}{m}}}{m - k}\,.$$

Найденную постоянную интегрирования подставляем в равенство (6.35), и тогда скорость движения капли равна

$$\upsilon = \frac{g}{m - k}\left[- M + mt + \left(1 - \frac{m}{k}t\right)^{\frac{k}{m}} M\right].$$

6.12. Электрические цепи

Задача 6.11. При размыкании цепи сопротивление цепи R быстро возрастает от первоначальной величины R_0 до бесконечности. На основании опыта допускают, что зависимость R от t в этом процессе выражается

$$R = R_0\frac{\tau}{\tau - t},$$

где τ – время всего процесса размыкания. Найти силу тока i в любой момент в цепи при постоянной электродвижущей силе E и самоиндукции L.

Решение. Так как в цепи действуют электродвижущие силы источника E и самоиндукции – $L\frac{di}{dt}$, то результирующая сила

$$u = E - L\frac{di}{dt}\,.$$

По закону Ома $u = iR$; поэтому

$$iR = E - L\frac{di}{dt}.$$

В процессе размыкания цепи $R = R_0\frac{\tau}{\tau - t}$. Отсюда получается ДУ процесса

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0\tau}{L(\tau - t)}i = \frac{E}{L}, \tag{6.36}$$

которое является *линейным.*

Для его решения используем метод вариации произвольной постоянной (см. параграф 1.1.3).

Однородное уравнение:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0\tau}{L(\tau - t)}i = 0$$

есть ДУ с разделяющимися переменными и его общее решение

$$i = C(\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

Общее решение неоднородного ДУ (6.36) имеет вид

$$i = C(t)(\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L}}. \tag{6.37}$$

Тогда

$$\frac{di}{dt} = C'(t)(\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L}} - C(t)\frac{R_0\tau}{L}(\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L} - 1}$$

и с помощью (6.36), (6.37) получаем

$$C'(t) = \frac{E}{L}(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}}. \tag{6.38}$$

Возможны два случая: $\frac{R_0\tau}{L} \neq 1$ и $\frac{R_0\tau}{L} = 1$.

В первом случае

$$C(t) = \frac{E(\tau - t)^{1 - \frac{R_0\tau}{L}}}{R_0\tau - L} + C_1,$$

а во втором – $C(t) = -\dfrac{E}{L}\ln(\tau - t) + C_1$.

Общее решение (6.37) принимает вид

$$i = \begin{cases} C_1(\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L}} + \dfrac{E(\tau - t)}{R_0\tau - L}, \ \dfrac{R_0\tau}{L} \neq 1 \\ (\tau - t)\left[C_1 - \dfrac{E}{L}\ln(\tau - t)\right], \ \dfrac{R_0\tau}{L} = 1. \end{cases} \tag{6.39}$$

Начальные условия: в момент начала размыкания при $t = 0$ сила тока $i = i_0 = \dfrac{E}{R_0}$. Тогда из (6.39) находим, что

$$C_1 = \begin{cases} -\dfrac{EL\tau^{-\frac{R_0\tau}{L}}}{R_0(R_0\tau - L)}, \ \dfrac{R_0\tau}{L} \neq 1, \\ \dfrac{E}{L}(1 + \ln\tau), \ \dfrac{R_0\tau}{L} = 1. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения произвольной постоянной в (6.39), получаем решение задачи

$$i = \begin{cases} \dfrac{E}{R_0(R_0\tau - L)}\left[R_0(\tau - t) - L\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right)^{\frac{R_0\tau}{L}}\right], \dfrac{R_0\tau}{L} \neq 1 \\ \dfrac{E}{L}(\tau - t)\left(1 + \ln\dfrac{\tau}{\tau - t}\right), \dfrac{R_0\tau}{L} = 1. \end{cases},$$

Цепь «сопротивление – емкость»

Задача 6.12. Конденсатор емкостью C включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. В момент t заряд конденсатора q и сила тока $i = \dfrac{dq}{dt}$. В цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\dfrac{q}{C}$:

$$E = U - \frac{q}{C}.$$

Сила i тока представляет производную от количества электричества q, протекшего через проводник, по времени t, т. е. $i = \dfrac{dq}{dt}$.

По закону Ома $i = \dfrac{E}{R}$; поэтому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \dfrac{q}{C}}{R}.$$

Тогда ДУ процесса равно

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{U}{R}. \qquad (6.40)$$

Уравнение (6.40) – линейное ДУ 1-го порядка. Для его решения используем подстановку $q = \upsilon z$ (или метод вариации постоянной). Так как $\dfrac{dq}{dt} = z\dfrac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\dfrac{dz}{dt}$, то (6.40) принимает вид

$$z\left(\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{\upsilon}{RC}\right) + \upsilon\frac{dz}{dt} = \frac{U}{R}.$$

Полагая $\dfrac{d\upsilon}{dt} + \dfrac{\upsilon}{RC} = 0$, находим функцию υ:

$$\upsilon = e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Тогда для функции z получаем уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \frac{U}{R}e^{\frac{t}{RC}},$$

интегрируя которое, находим z:

$$z = UCe^{\frac{t}{RC}} + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Общее решение равно

$$q = \upsilon z = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} + UC.$$

Начальное условие: при $t = 0$ $q = 0$; откуда

$$0 = C_1 + UC, \quad C_1 = -UC.$$

Таким образом, заряд конденсатора равен

$$q = UC\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

6.13. Математический маятник

Задача 6.13. Найти закон движения и определить период T математического маятника длиной l при малых отклонениях (*рис. 6.4*).

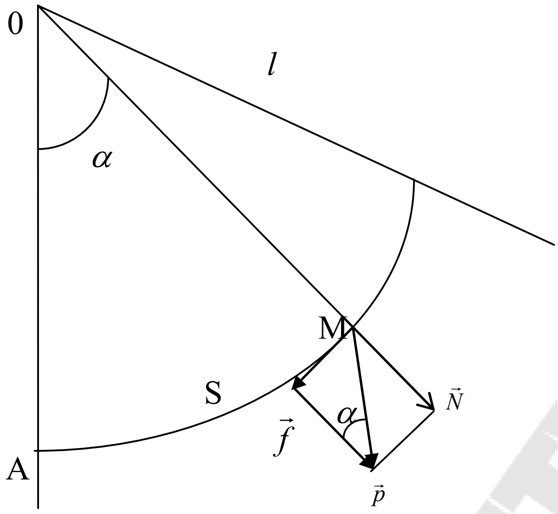

Рис. 6.4

Решение. Силу тяжести $\vec{P}$ в точке M разложим на две составляющие: $\vec{N}$ по направлению нити и $\vec{f}$ – по касательной к траектории. Сила $\vec{N}$ уравновешивается сопротивлением нити, и, таким образом, вся система сил эквивалентна силе $\vec{f}$. Из рис. 6.4 видно:

$$|\vec{f}| = P\sin\alpha = mg\sin\alpha,$$

где m – масса, g – ускорение свободного падения. Так как для положительных углов α касательная составляющая f направлена в отрицательную сторону, то

$$f = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha,$$

поскольку при малых отклонениях нити $\sin\alpha \approx \alpha$.

Ввиду очевидного равенства $\alpha = \dfrac{s}{l}$

$$f = -\frac{mg}{l}s,$$

где $s = \overset{\smile}{AM}$ – длина пройденного маятником криволинейного пути. На основании второго закона Ньютона запишем ДУ процесса:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{mg}{l}s$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l}s = 0. \qquad (6.41)$$

Это линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

имеет решения $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Поэтому общее решение ДУ (6.41) имеет вид

$$s = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

Начальные условия: при $t = 0$ $s = A$ (A – амплитуда колебаний) и $\frac{ds}{dt} = 0$.

Отсюда

$$C_1 = A,\ C_2 = 0.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$s = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

Движение математического маятника представляет гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

6.14. Физический маятник

Задача 6.14. Найти закон движения физического маятника (ось OZ перпендикулярна к плоскости чертежа) (*рис. 6.5*).

Решение. Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг горизонтальной оси OZ под действием силы тяжести. Обозначим расстояние OC центра тяжести маятника от оси вращения через a и силу тяжести через $\vec{P}$, причем $P = mg$, где m – масса маятника.

Так как заданной силой является только сила P, то момент относительно оси OZ равен

$$M_Z = -mga\sin\varphi,$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, отсчитываемый в направлении, обратном движению часовой стрелки.

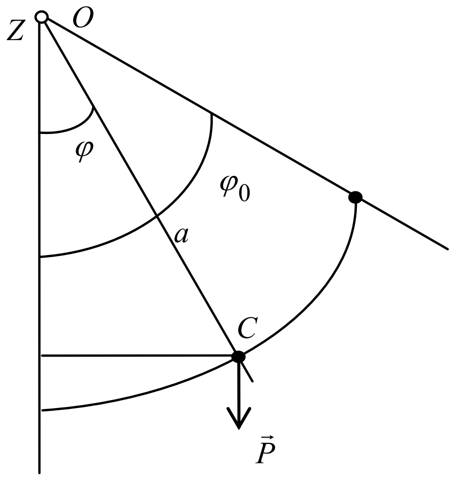

Рис. 6.5

Как известно из динамики, ДУ вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z, \tag{6.42}$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения *OZ.*

Тогда уравнение (6.42) примет вид

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\sin\varphi. \tag{6.43}$$

Уравнение (6.43) представляет ДУ движения физического маятника.

При малых отклонениях маятника можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$. Получим приближенное ДУ малых колебаний маятника

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \tag{6.44}$$

где $k^2 = \dfrac{mga}{J_z}$.

Так как корнями соответствующего характеристического уравнения $\lambda^2 + k^2 = 0$ являются комплексные числа $\pm ik$, то общее решение уравнения (6.44) есть

$$\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \tag{6.45}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 вычисляем из равенства (6.45), используя начальные условия:

1) при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi_0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0,$$

$$C_1 = \varphi_0;$$

2) при $t = 0$ угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt} = 0$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt,$$

$$0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1,$$

$$C_2 = 0.$$

Подставляя найденные значения в (6.45), получим закон движения физического маятника при малых колебаниях

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

где $k = \sqrt{\frac{mga}{J_z}}$.

Полный период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mga}}.$$

6.15. Прямолинейное горизонтальное движение

Задача 6.15. Моторная лодка движется со скоростью $\upsilon_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $\upsilon_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

Решение. На движущуюся лодку действует сила $F = -k\upsilon$, где k – коэффициент пропорциональности. По закону Ньютона $F = m\frac{d\upsilon}{dt}$. Откуда ДУ движения лодки

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon. \qquad (6.46)$$

После разделения переменных получаем

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}dt\,;$$

откуда

$$\ln\upsilon = -\frac{k}{m}t + \ln C$$

или

$$\upsilon = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Начальное условие: при $t = 0$, $\upsilon = 20$ км/ч. Откуда

$$20 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} \text{ и } C = 20.$$

Тогда закон движения лодки принимает вид

$$\upsilon = 20e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Дополнительное условие: при $t = 40\,\text{с} = \frac{1}{90}$ ч скорость лодки составляет 8 км/ч.

Отсюда

$$8 = 20e^{-\frac{k}{m}\frac{1}{90}} \quad \text{или} \quad e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Подставляя числовые данные в (6.47) и учитывая $t = 2\,\text{мин} = \frac{1}{30}$ ч, получим

$$\upsilon = 20\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{90}\right]^{\frac{1}{30}} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28 \text{ км/ч}.$$

Итак, скорость лодки через 2 мин снизится до 1,28 км/ч.

6.16. Вращение тела в жидкости

Задача 6.16. Диск, вращающийся в жидкости, испытывает сопротивление, пропорциональное угловой скорости вращения. Найти зависимость угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 об/мин, по истечении 1 мин вращается со скоростью 120 об/мин.

Решение. Пусть ω – угловая скорость вращения диска. Силовому воздействию вращения оказывает сопротивление переменное трение, возникающее при вращении диска в жидкости и зависящее от скорости вращения.

Таким образом, уравнение движения диска

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{d\omega}{\omega} = -kdt$$

или

$$\ln\omega = -kt + \ln C.$$

Общее решение уравнения

$$\omega = Ce^{-kt}.$$

Необходимо определить значения C и k. Из начального условия: $t = 0$, $\omega_0 = 200$ об/мин

$$200 = Ce^{-k\cdot 0},\ \ C = 200.$$

Дополнительное условие, что через $t = 1$ мин $\omega = 120$ об/мин, дает $120 = 200e^{-k}$ или $e^{-k} = \frac{3}{5}$.

Искомая зависимость угловой скорости от времени

$$\omega = 200\left(\frac{3}{5}\right)^t.$$

6.17. Радиоактивный распад

Задача 6.17. Скорость распада радия прямо пропорциональна его массе в произвольный момент времени. Найти закон радиактивного распада, если первоначальная масса радия m_0 и период его полураспада равен 1590 лет.

Решение. Пусть $m(t)$ – масса радия в произвольный момент времени. Тогда $\frac{dm}{dt}$ – скорость распада, т. е. изменение массы с течением времени. В соответствии с условием задачи запишем ДУ процесса

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

или

$$\frac{dm}{m} = -kdt\,;$$

откуда

$$\ln m = -kt + \ln C$$

или $m = Ce^{-kt}$.

Так как $m = m_0$ при $t = t_0$, то $m_0 = Ce^{-k\cdot 0}$, $C = m_0$.

Коэффициент k определится из дополнительного условия: при $t = 1590$ $m = \frac{m_0}{2}$.

Тогда $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k}$ или $-1590k = -\ln 2$, $k = 0{,}00044$.

Искомый закон распада:

$$m(t) = m_0 e^{-0{,}00044t}.$$

6.18. Скольжение тела под наклоном

Задача 6.18. По наклонной плоскости длиной $l = 10$ м скользит тело. Угол наклона плоскости α = 45º. Коэффициент трения тела по поверхности плоскости $k = 0{,}5$. Определить закон движения тела и время его соскальзывания (*рис. 6.6*).

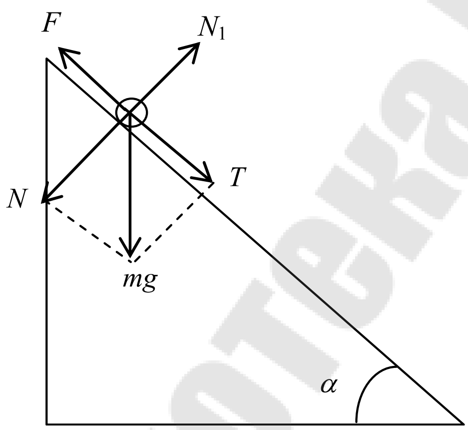

Рис. 6.6

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести *mg*, сила трения F и реакция плоскости N_1. Нормальная N и тангенциальная T составляющие силы тяжести равны:

$$N = mg\cos\alpha\,,\ T = mg\sin\alpha\,.$$

Сила трения $F = -kN = -mg\cos\alpha$.

Уравнение движения тела

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha$$

или

$$\frac{d^2S}{dt^2} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\,.$$

Решая его непосредственным интегрированием, получаем

$$\frac{dS}{dt} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)t + C_1$$

и общее решение будет

$$S = \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)t^2 + C_1 t + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из НУ: при $t = 0$ $S = 0$ и $\frac{dS}{dt} = 0$. Получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 0 &= g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot 0 + C_1, \\ 0 &= \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2. \end{aligned}\right\}$$

Откуда

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получаем искомый закон движения

$$S = \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)t^2. \tag{6.48}$$

Для определения времени соскальзывания выразим t из (6.48) и подставим числовые данные:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{9{,}81(\sin 45^0 - 0{,}5\cos 45^0)}} = 2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{9{,}81}} = 2{,}4 \text{ с}.$$

6.19. Движение пули внутри вещества

Задача 6.19. Пуля входит в брус толщиной 12 см со скоростью 200 м/с, а вылетает, пробив его, со скоростью 60 м/с. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения. Найти время движения пули через брус.

Решение. Внутри бруса в любой момент времени t на пулю действует сила сопротивления бруса F. Она направлена против движения, а по величине пропорциональна квадрату скорости движения пули в данный момент. Таким образом,

$$F = -k\upsilon^2.$$

На основании второго закона Ньютона сила равна произведению массы тела на ускорение a, которое ему сообщается, т. е.

$$F = ma .$$

Сопоставляя уравнения, получим

$$ma = -k\upsilon^2 .$$

Скорость тела: $\upsilon = \frac{dS}{dt}$, где S – путь, t – время. Тогда ускорение $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$.

Поэтому ДУ процесса записываем в виде

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -k\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$$

или

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 . \qquad (6.49)$$

Это уравнение решается методом понижения порядка путем введения новой функции P:

$$\frac{dS}{dt} = P , \quad \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dP}{dt} .$$

Уравнение (6.49) примет вид

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{k}{m}P^2 .$$

Разделяя переменные P и t:

$$\frac{dP}{P^2} = -\frac{k}{m}dt$$

и почленно интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{P} = -\frac{k}{m}t + C_1 .$$

Подставляем $P = \frac{dS}{dt}$ и интегрируем еще раз:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m} - C_1} \qquad (6.50)$$

$$ds = \frac{dt}{\frac{k}{m}t - C_1};$$

$$S = \frac{m}{k}\int \frac{d\left(\frac{k}{m}t - C_1\right)}{\frac{k}{m}t - C_1} = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t - C_1\right) + C_2 . \qquad (6.51)$$

Начальные условия: при $t = 0 \quad S = 0$ и $\frac{ds}{dt} = 200$ м/с.

Из уравнения (6.50) определим C_1:

$$200 = \frac{1}{\frac{k}{m}\cdot 0 - C_1}; \; C_1 = -\frac{1}{200},$$

а из (6.51) – C_2:

$$C_2 = -\frac{m}{k}\ln\frac{1}{200} = \frac{m}{R}\ln 200 .$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение (6.51), имеем

$$S = \frac{m}{k}\ln\left(200\frac{k}{m}t + 1\right). \qquad (6.52)$$

Разрешая (6.52) относительно *t*, получим

$$200\frac{k}{m}t + 1 = e^{\frac{ks}{m}}$$

или

$$t = \frac{m}{200k}\left(e^{\frac{ks}{m}} - 1\right). \qquad (6.53)$$

Величины *k* и *m* определим из дополнительного условия: при

$$S = h = 12 \text{ см} = 0{,}12 \text{ м} \;\; \frac{dS}{dt} = 60 \text{ м/с}.$$

Для этого продифференцируем уравнение (6.52):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{200}{200\frac{k}{m}t + 1}. \qquad (6.54)$$

Найденную величину t из уравнения (6.53) подставляем в (6.54), которое примет вид

$$\frac{dS}{dt} = \frac{200}{e^{\frac{ks}{m}}}. \qquad (6.55)$$

Подстановка дополнительных условий приводит к равенству:

$$60 = \frac{200}{e^{0,12\frac{k}{m}}}, \qquad (6.56)$$

откуда

$$\frac{k}{m} = \frac{\ln\frac{10}{3}}{0,12} \approx 10.$$

Из (6.56) находим

$$e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}}.$$

Подставляя числовые значения величин $\frac{k}{m}$ и $e^{\frac{k}{m}}$ в (6.53), получим

$$t = \frac{1}{20}\left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25\cdot 0,12}{3}} - 1\right] \approx 0,001 \text{ с.}$$

6.20. Колебательный разряд конденсатора

Задача 6.20. Конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов V_0, разряжается через проводник с сопротивлением R и самоиндукцией L. Исследовать характер разряда.

Решение. В процесс разряда конденсатора разность потенциалов на его обкладках переменна. Пусть в момент t эта разность V. Тогда разряд конденсатора Q в этот момент будет

$$Q = CV.$$

Дифференцируем это соотношение

$$\frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

и с учетом $i = -\frac{dQ}{dt}$ получаем

$$i = -C\frac{dV}{dt}. \qquad (6.57)$$

В любой момент t цепи действуют две противоположные электродвижущие силы: напряжение конденсатора V и самоиндукция $-L\frac{di}{dt}$. Общая электродвижущая сила будет

$$E = V - L\frac{di}{dt}. \qquad (6.58)$$

По закону Ома $iR = E$. Подставляя это соотношение в левую часть (6.58), получим

$$iR = V - L\frac{di}{dt}$$

или с учетом зависимости (6.57)

$$-RC\frac{dV}{dt} = V + LC\frac{d^2V}{dt^2},$$

откуда ДУ процесса

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2h\frac{dV}{dt} + k^2V = 0, \qquad (6.59)$$

где $h = \frac{R}{2L}$, $k^2 = \frac{1}{CL}$.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0 \; \lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Исследуем три возможных случая.

1. Сопротивление R мало, т. е. $h^2 - k^2 < 0$ или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Общее решение ДУ (6.59) в этом случае

$$V = e^{-ht}(C_1 \sin pt + C_2 \cos pt), \qquad (6.60)$$

где $p = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Начальные условия: при $t = 0 \quad V = V_0$, $i = -C\dfrac{dV}{dt} = 0$; откуда

$$V_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1,\ C_2 = V_0$$

и так как

$$\frac{dV}{dt} = -he^{-ht}(C_1 \sin pt + C_2 \cos pt) + e^{-pt}(C_1 p \cos pt - C_2 p \sin pt),$$

то

$$0 = -hC_2 + C_1 p \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{h}{p}C_2 = \frac{hV_0}{p}.$$

Подставляем полученные значения C_1 и C_2 в (6.60) и получаем

$$V = V_0 e^{-ht}\left(\frac{h}{p}\sin pt + \cos pt\right).$$

Вводим вспомогательный угол φ соотношением

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{h}{p}.$$

Тогда разряд совершается по закону

$$V = \frac{V_0}{\sin\varphi}e^{-ht}\sin(pt + \varphi).$$

Затухающие колебания в цепи происходят с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{CL} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}.$$

При достаточно малом *R*, которым можно пренебречь, получаем формулу Томсона для периода колебательного разряда

$$T = 2\pi\sqrt{CL}.$$

2. Сопротивление *R* велико, т. е. $h^2 - k^2 > 0$ или $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Общее решение ДУ (6.59) принимает вид

$$V = C_1 e^{(q-h)t} + C_2 e^{-(q-h)t}, \tag{6.61}$$

где $q = \sqrt{h^2 - k^2}$.

При тех же начальных условиях имеем

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 = V_0, \\ &(q-h)C_1 - (q+h)C_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1 = \frac{q+h}{2q}V_0, \quad C_2 = \frac{q-h}{2q}V_0.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в (6.61), получим

$$V = \frac{V_0}{2q}e^{-ht}[(q+h)e^{qt} + (q-h)e^{-qt}].$$

В этом случае разряд происходит апериодически. Разность потенциалов V асимптотически приближается к нулю.

3. При $h^2 - k^2 = 0$ сопротивление $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Общее решение ДУ (6.59) будет

$$V = e^{-ht}(C_1 + C_2 t).$$

При тех же начальных условиях постоянные C_1, C_2 имеют значения $C_1 = V_0$, $C_2 = hV_0$.

Поэтому

$$V = V_0 e^{-ht}(1 + ht).$$

Разряд происходит апериодически, а разность потенциалов V стремится к нулю.

Изменяя постепенно сопротивление R цепи, можно переходить от одного вида разряда к другому.

6.21. Вынужденные колебания механических систем

Задача 6.21. Определить закон движения частицы массы m под влиянием восстанавливающей силы, прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения, силы сопротивления и внешней силы $F = c\sin(qt + \varphi_0)$ в случае малого сопротивления.

Решение. На частицу действуют следующие силы: восстанавливающая сила $f = -ax$, сила сопротивления $F_C = -b\upsilon = -b\dfrac{dx}{dt}$ (знак минус в обоих случаях обусловлен направлением сил против движения частицы) и внешняя сила $F = c\sin(qt + \varphi_0)$. Постоянные a и b – коэффициенты пропорциональности ($a > 0, b > 0$).

На основании второго закона Ньютона ДУ движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax - b\frac{dx}{dt} + c\sin(qt + \varphi_0)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = c\sin(qt + \varphi_0), \tag{6.62}$$

где $2h = \frac{b}{m}$, $k^2 = \frac{a}{m}$.

Уравнение (6.62) является линейным ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Так как по условию задачи сопротивление мало, то $h^2 - k^2 < 0$, и корни будут комплексные

$$\lambda_{1,2} = -h \pm ip,$$

где $p = \sqrt{k^2 - h^2}$.

В этом случае общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$x_0 = e^{-ht}(C_1\cos pt + C_2\sin pt)$$

или

$$x_0 = c_2 e^{-ht}\left(\frac{C_1}{C_2}\cos pt + \sin pt\right).$$

Вводя вспомогательный угол φ соотношением

$$\frac{C_1}{C_2} = tg\varphi,$$

имеем

$$x_0 = \frac{C_2}{\cos\varphi}e^{-ht}(\sin\varphi\cos pt + \cos\varphi\sin pt).$$

Обозначая

$$\frac{C_1}{\cos\varphi} = A,$$

получим

$$x_0 = Ae^{-ht}\sin(pt + \varphi).$$

Правая часть уравнения (6.62) имеет специальный вид, поэтому его частное решение будем находить в форме

$$\bar{x} = M\cos(qt + \varphi_0) + N\sin(qt + \varphi_0).$$

Производные этой функции равны:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -Mq\sin(qt + \varphi_0) + Nq\cos(qt + \varphi_0),$$

$$\frac{d\bar{x}^2}{dt^2} = -Mq^2\cos(qt + \varphi_0) - Nq^2\sin(qt + \varphi_0).$$

Подстановка этих выражений в (6.62) дает равенство:

$$-Mq^2\cos(qt + \varphi_0) - Nq^2\sin(qt + \varphi_0) - 2hMq\sin(qt + \varphi_0) + 2hNq\cos(qt + \varphi_0) +$$
$$+ Mk^2\cos(qt + \varphi_0) + Nk^2\sin(qt + \varphi_0) = c\sin(qt + \varphi_0)$$

или

$$(2hNq + Mk^2 - Mq^2)\cos(qt + \varphi_0) +$$
$$+ (Nk^2 - Nq^2 - 2hMq)\sin(qt + \varphi_0) = c\sin(qt + \varphi_0).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2hNq + Mk^2 - Mq^2 = 0, \\ Nk^2 - Nq^2 - 2hMq = c. \end{cases}$$

Решая ее, находим значения M и N:

$$M = -\frac{2hqc}{(k^2 - q^2)^2 + 4h^2q^2}, \quad N = \frac{(k^2 - q^2)c}{(k^2 - q^2)^2 + 4h^2q^2}.$$

Таким образом, общее решение ДУ (6.62):

$$x = x_0 + \bar{x} = Ae^{-ht}\sin(pt + \varphi) + \frac{c}{(k^2 - q^2) + 4h^2q^2}[(k^2 - q^2)\sin(qt + \varphi_0) -$$
$$- 2hq\cos(qt + \varphi_0)].$$

Вводя угол φ_1 соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2hq}{k^2 - q^2}$$

и обозначая

$$\frac{c(k^2 - q^2)}{[(k^2 - q^2)^2 4h^2 q^2]\cos\varphi_1} = B,$$

окончательно получим

$$x = Ae^{-ht}\sin(pt + \varphi) + B\sin(qt + \varphi_0 - \varphi_1). \qquad (6.63)$$

Колебательное движение, описываемое функцией (6.63), состоит из двух частей: свободного (собственного) колебания $x_0 = Ae^{-ht}\sin(pt + \varphi)$ и вынужденного колебания $\bar{x} = B\sin(qt + \varphi_0 - \varphi_1)$. Первая часть оказывает существенное влияние на общее колебание только при малом *t*, т. е. в первое время движения. Это объясняется тем, что множитель e^{-ht} с возрастанием *t* быстро стремится к нулю. Таким образом, первая часть имеет значение только во время установления процесса. В дальнейшем величина *x* почти исключительно определяется вторым слагаемым, которое дает закон установившегося вынужденного движения.

ГЛАВА 7
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Задача 7.1. Радиус-вектор любой точки кривой меньше длины подкасательной на величину абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (–3, 4).

Решение. Радиус-вектор любой точки кривой равен $\sqrt{x^2 + y^2}$. Длина подкасательной равна $\left|y\frac{dx}{dy}\right|$. По условию задачи ДУ искомого семейства

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y\frac{dx}{dy} - x$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}. \qquad (7.1)$$

Уравнение (7.1) является однородным ДУ 1-го порядка, которое можно привести к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$\frac{x}{y} = z,$$

откуда

$$x = yz, \ \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy} y + z. \tag{7.2}$$

Подстановка выражения (7.2) в (7.1) дает уравнение

$$\frac{dz}{dy} y = \sqrt{z^2 + 1},$$

которое после разделения переменных принимает вид:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dy}{y}. \tag{7.3}$$

Интегрируем выражение (7.3):

$$\ln\left|z + \sqrt{z^2 + 1}\right| + \ln C = \ln|y|,$$

откуда

$$y = C(z + \sqrt{z^2 + 1}). \tag{7.4}$$

Общее решение (7.4) преобразуем следующим образом:

$$y - Cz = C\sqrt{z^2 + 1}$$

или

$$y^2 - 2yCz + c^2 z^2 = C^2 (z^2 + 1),$$

откуда

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

Начальные условия: точка (-3, 4) лежит на кривой, т. е.

$$16 = 2(-3)C + C^2,$$

откуда

$$C_1 = 8, \ C_2 = -2.$$

Итак, получаем две параболы:

$$y^2 = 16x + 64 \quad \text{и} \quad y^2 = -4x + 4.$$

Задача 7.2. Найти кривую, для которой площадь, заключённая между осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, одна из которых постоянная, а другая переменная, равна отношению куба переменной ординаты к переменной абсциссе (*рис. 7.1*).

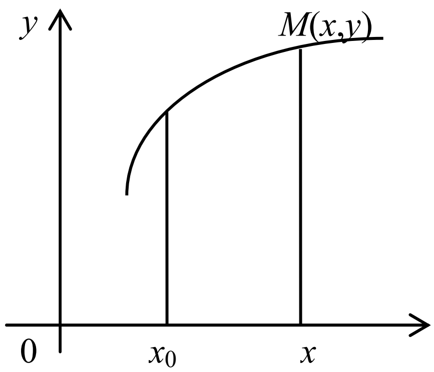

Рис. 7.1

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка на кривой. Площадь криволинейной трапеции равна $\int\limits_{x_0}^{x} ydx$. По условию

$$\int\limits_{x_0}^{x} ydx = \frac{y^3}{x}. \qquad (7.5)$$

Берём производную от обеих частей равенства (7.5) и тогда

$$y = \frac{3y^2 y'x - y^3}{x^2},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right). \qquad (7.6)$$

Однородное ДУ (7.6) подстановкой $u = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ приводим к уравнению

$$\frac{dx}{x} = \frac{3udu}{1 - 2u^2}.$$

Общее решение уравнения (7.6) имеет вид

$$\ln|x| + \frac{3}{4}\ln\left|2u^2 - 1\right| = \frac{\ln C}{4}$$

и после потенцирования запишется так

$$x^4(2u^2 - 1)^3 = C.$$

Переходя к переменной y, получаем окончательно для общего решения

$$(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2.$$

Задача 7.3. Найти кривую, проходящую через точку (1, 1), у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания (*рис. 7.2*).

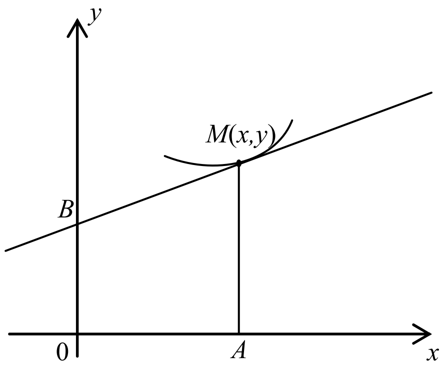

Рис. 7.2

Решение. Уравнение касательной, проведённой к кривой, в точке $M(x, y)$ имеет вид

$$Y - y = y'(x)(X - x), \qquad (7.7)$$

где угловой коэффициент касательной, т. е. тангенс угла её наклона к оси абсцисс, равен значению производной y' в точке касания M.

Точка B пересечения касательной с осью ординат имеет координаты, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} Y - y = y'(X - x), \\ X = 0; \end{cases}$$

откуда

$$Y = OB = y - y'x.$$

По условию $OB = OA = x$.

Тогда получаем уравнение

$$y - y'x = x$$

или

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -1, \qquad (7.8)$$

которое является линейным ДУ 1-го порядка.

Применяем подстановку

$$y = u\vartheta, \ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\vartheta + u\frac{d\vartheta}{dx}.$$

Тогда уравнение (7.8) приводим к виду

$$u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = -1.$$

Неизвестные функции u и ϑ находим из уравнений:

а) $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$ или после интегрирования $u = x$;

б) $x\frac{d\vartheta}{dx} = -1$ или после интегрирования $\vartheta = \ln\frac{C}{x}$.

Общее решение уравнения (7.8) равно:

$$y = u\vartheta = x\ln\frac{C}{x}.$$

Начальное условие: точка (1, 1) лежит на кривой; отсюда

$$1 = 1 \cdot \ln\frac{C}{1} \text{ или } C = e.$$

Уравнение кривой будет

$$y = x\ln\frac{e}{x} = x(\ln e - \ln x) = x(1 - \ln x).$$

Задача 7.4. В точке с ординатой 2 кривая наклонена к оси *ОУ* под углом 45º. Касательная отсекает от оси абсцисс отрезок, равный квадрату ординат точки касания. Найти уравнение этой кривой.

Решение. Из уравнения касательной (7.7) следует, что отрезок, отсекаемый её на оси абсцисс, равен

$$X = \frac{y'x - y}{y'},$$

так как $Y = 0$. По условию задачи:

$$\frac{y'x - y}{y'} = y^2.$$

Поэтому ДУ искомого семейства:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -y. \tag{7.9}$$

Уравнение (7.9) является линейным относительно x. Для решения используем подстановку

$$x = u\vartheta, \ \frac{dx}{dy} = \vartheta\frac{du}{dy} + u\frac{d\vartheta}{dy}.$$

Тогда уравнение (7.9) принимает вид:

$$\vartheta\frac{du}{dy} + u\left(\frac{d\vartheta}{dy} - \frac{\vartheta}{y}\right) = -y.$$

Функцию ϑ находим из уравнения

$$\frac{d\vartheta}{dy} - \frac{\vartheta}{y} = 0;$$

откуда

$$\vartheta = y.$$

Из уравнения:

$$\vartheta \frac{du}{dy} = -y$$

или

$$\frac{du}{dy} = -1$$

получаем $u = -y + C$.

Общее решение уравнения (7.9) равно:

$$x = u\vartheta = y(-y + C)$$

или

$$x + y^2 - yC = 0. \qquad (7.10)$$

Дополнительное условие: при $y = 2$ $\frac{dx}{dy} = \text{tg}45^{\circ} = 1$. Дифференцируя почленно (7.10) по y, имеем

$$\frac{dx}{dy} = C - 2y$$

и частное значение этой производной при $y = 2$ равно

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2} = C - 4 = 1, C = 5,$$

откуда

$$c - 4 = 1, \ c = 5.$$

Уравнение искомой кривой:

$$x + y^2 - 5y = 0.$$

Задача 7.5. Площадь треугольника, образованного радиус-вектором любой точки кривой, касательной в этой точке и осью абсцисс, равна 2. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (2, –2) (*рис. 7.3*).

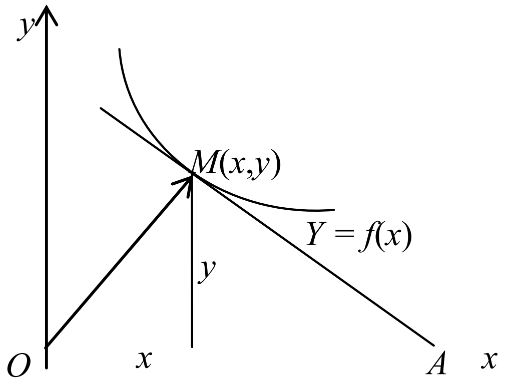

Рис. 7.3

Решение. Основанием треугольника *OMA* является отрезок *OA*, отсекаемый касательной на оси *OX*. Аналогично задаче 4 для *OA* найдём выражение $x - y\dfrac{dx}{dy}$. Высотой треугольника будет ордината y. Площадь треугольника равна:

$$\frac{1}{2}|OA|y = \frac{1}{2}y\left(x - y\frac{dx}{dy}\right).$$

По условию задачи:

$$\frac{1}{2}y\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = 2,$$

откуда ДУ искомого семейства:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{4}{y^2}. \qquad (7.11)$$

Уравнение (7.11) является линейным относительно x, а его решение ищем в виде $x = u\vartheta$. Тогда

$$\frac{dx}{dy} = \vartheta\frac{du}{dy} + u\frac{d\vartheta}{dy}.$$

Неизвестные функции u, ϑ определяем из уравнений:

а) $\dfrac{du}{dy} - \dfrac{u}{y} = 0$ или после интегрирования $u = y$;

б) $y\dfrac{d\vartheta}{dy} = -\dfrac{4}{y^2}$ или после интегрирования $\vartheta = \dfrac{2}{y^2} + C$.

Искомое общее решение уравнения (7.11) будет равно:

$$x = u\vartheta = y\left(\frac{2}{y^2} + C\right) = Cy + \frac{2}{y}.$$

Начальное условие: кривая проходит через точку (2,–2), откуда

$$2 = C(-2) + \frac{2}{-2}$$

и

$$C = -\frac{3}{2}.$$

Уравнение искомой кривой

$$3y^2 + 2xy - 4 = 0.$$

Задача 7.6. В точке (1, –2) касательная к кривой параллельна оси абсцисс. В любой точке радиус кривизны R равен квадрату абсциссы этой точки. Найти уравнение кривой.

Решение. Кривизна линии в произвольной точке определяется выражением

$$K = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}.$$

Радиус кривизны $R = \dfrac{1}{K}$ и по условию задачи $R = x^2$. Поэтому ДУ искомого семейства кривых будет

$$\frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{y''} = x^2. \tag{7.12}$$

Это ДУ 2-го порядка типа $y'' = f(x, y')$; поэтому полагаем $y' = P$, тогда $y'' = \dfrac{dP}{dx}$ и уравнение (7.12) принимает вид

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dP}{\left(1 + P^2\right)^{3/2}}. \tag{7.13}$$

Интеграл в правой части (7.13)

$$\int \frac{dP}{\left(1 + P^2\right)^{3/2}} = \int \left(1 + P^2\right)^{-3/2} dP$$

представляет собой интеграл $S(a + bx^n)^k x^m dx$ от дифференциального бинома с параметрами: $m = 0$, $n = 2$, $k = -\dfrac{3}{2}$. Так как

$$\frac{m+1}{n} + k = \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

является целым числом, то применяется подстановка $z^2 = P^{-2} + 1$. Тогда

$$\int \left(1 + P^2\right)^{-3/2} dP = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}.$$

Следовательно, общее решение ДУ (7.13) имеет вид

$$C_1 - \frac{1}{x} = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}. \qquad (7.14)$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем из условия: в точке (1, –2) касательная к кривой параллельна оси абсцисс, т. е. при $x=1$, $\frac{dy}{dx} = P = 0$, откуда

$$C_1 - \frac{1}{1} = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} \quad \text{или} \quad C_1 = 1.$$

Решение (7.14) принимает вид

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}},$$

где $P = \frac{dy}{dx}$; откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Интегрируя далее, получим

$$y + C_2 = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{2x-1}.$$

Так как кривая проходит через точку (1,–2), то

$$-2 + C_2 = \frac{1}{3}(-1)\sqrt{2\cdot 1 - 1} \text{ и } C_2 = \frac{5}{3}.$$

Итак, уравнение искомой кривой

$$3y = (x-2)\sqrt{2x-1} - 5.$$

Задача 7.7. Длина нормали в любой точке кривой равна радиусу кривизны R кривой в этой точке. Найти уравнение кривой, касательная к которой параллельна оси абсцисс в точке (0, 1).

Решение. Длина нормали $y\sqrt{1+y'^2}$. По условию задачи она равна радиусу кривизны $R = \frac{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}{y''}$ (см. задачу 7.6). Поэтому ДУ искомого семейства кривых:

$$\frac{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}{y''}=y\sqrt{1+y'^2}$$

или

$$y=\frac{1+y'^2}{y''}. \qquad (7.15)$$

Это ДУ 2-го порядка типа $y''=f(y,y')$ и, следовательно, $y'=P$, $y''=P\frac{dP}{dy}$. Тогда из (7.15) получаем:

$$\frac{PdP}{1+P^2}=\frac{dy}{y},$$

общий интеграл которого равен

$$\sqrt{1+P^2}=C_1 y. \qquad (7.16)$$

Произвольную постоянную определим из условия: при $y=1$, $P=\frac{dy}{dx}=0$; $\sqrt{1+0^2}=C_1\cdot 1$ или $C_1=1$.

Поэтому (7.16) теперь принимает вид

$$\sqrt{1+y'^2}=y$$

или

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=dx.$$

После интегрирования получаем

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=x+C_2.$$

Кривая проходит через точку (0, 1), т. е. $x=0$, $y=1$, поэтому $C_2=0$. Итак, уравнение искомой кривой:

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right).$$

Задача 7.8. Нормаль отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату радиуса-вектора любой точки кривой. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (0, 3).

Решение. Отрезок x_0, отсекаемый нормалью на оси *OX*, равен абсциссе точки пересечения нормали с осью *OX*. Координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{dx}{dy}(x - x_0), \\ y_0 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

образованной уравнением нормали и уравнением оси *OX*. Решая систему, получим

$$x_0 = x + y\frac{dy}{dx}.$$

Квадрат радиус-вектора любой точки равен $\sqrt{x^2 + y^2}$. По условию задачи имеем ДУ искомого семейства:

$$x + y\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \qquad (7.17)$$

которое преобразуется в уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} - y = (x^2 - x)y^{-1}. \qquad (7.18)$$

Выполним замену $z = y^2$; откуда $y = \sqrt{z}$, $dy = \dfrac{dz}{2\sqrt{z}}$. Подставляем эти значения в (7.18) и тогда получаем линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} - 2z = 2(x^2 - x),$$

которое в результате подстановки $z = u\vartheta$, $\dfrac{dz}{dx} = \vartheta\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{d\vartheta}{dx}$ приводится к виду

$$u\left(\frac{d\vartheta}{dx} - 2\vartheta\right) + \vartheta\frac{du}{dx} = 2(x^2 - x).$$

Будем искать такую функцию *u*, которая обращала бы в нуль первое выражение в скобках. Для этого решаем уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dx} - 2\vartheta = 0,$$

откуда $\vartheta = e^{2x}$.

Тогда

$$e^{2x}\frac{du}{dx} = 2(x^2 - x)$$

и

$$u = 2\int(x^2 - x)e^{-2x}dx.$$

Интеграл в правой части последнего равенства находится интегрированием по частям:

$$u = 2\int (x^2 - x)e^{-2x}dx = 2\int m dt = 2\left(mt - \int t dm\right),$$

где $m = x^2 - x$, $dm = (2x-1)dx$, $dt = e^{-2x}dx$, $t = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

Тогда

$$u = 2\left[-\frac{1}{2}(x^2 - x)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int (2x-1)e^{-2x}dx\right]$$

и, применяя к последнему интегралу ещё раз интегрирование по частям, имеем

$$u = -x^2 e^{-2x} + C;$$

откуда

$$z = u\vartheta = Ce^{2x} - x^2,$$

а общее решение ДУ (7.18) ввиду соотношения $z = y^2$ примет вид

$$x^2 + y^2 = Ce^{2x}.$$

Так как кривая проходит через точку (0, 3), то

$$0^2 + 3^2 = Ce^{2\bullet 0}$$

или

$$C = 9.$$

Уравнение искомой кривой:

$$x^2 + y^2 = 9e^{2x}.$$

ГЛАВА 8
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

8.1. Упругая линия балок

Задача 8.1. Расстояние между рельсами железнодорожного пути равно *C*. Наибольшая нагрузка от тепловоза на каждый рельс составляет *P*. Поперечный брус железнодорожного моста лежит на двух фермах, расположенных на расстоянии *l* друг от друга. Момент инерции площади сечения бруса *J*, модуль упругости *E*. Найти уравнение упругой линии бруса (*рис. 8.1*).

Решение. Мерой изгиба балки может служить кривизна ее упругой линии. Радиус кривизны R упругой линии для балок любого сечения

$$R = \frac{EJ}{M(x)},$$

где E – модуль упругости балки, J – момент инерции поперечного сечения; $M(x)$ – изгибающий момент для данного сечения, равный алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны сечения.

Обычно изгибы балок малы, и упругая линия мало отклоняется от оси абсцисс. Поэтому в любой ее точке угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ весьма мал и в выражении для радиуса кривизны $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ можно пренебречь величиной y'^2.

Отсюда на основании формулы $R = \frac{EJ}{M(x)}$ ДУ упругой линии в упрощенном виде:

$$\frac{1}{y''} = \frac{EJ}{M(x)}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}. \qquad (8.1)$$

Поперечный брус представляет собой балку на двух опорах A и B, нагруженную двумя сосредоточенными силами P, приложенными в точках $Д$ и E.

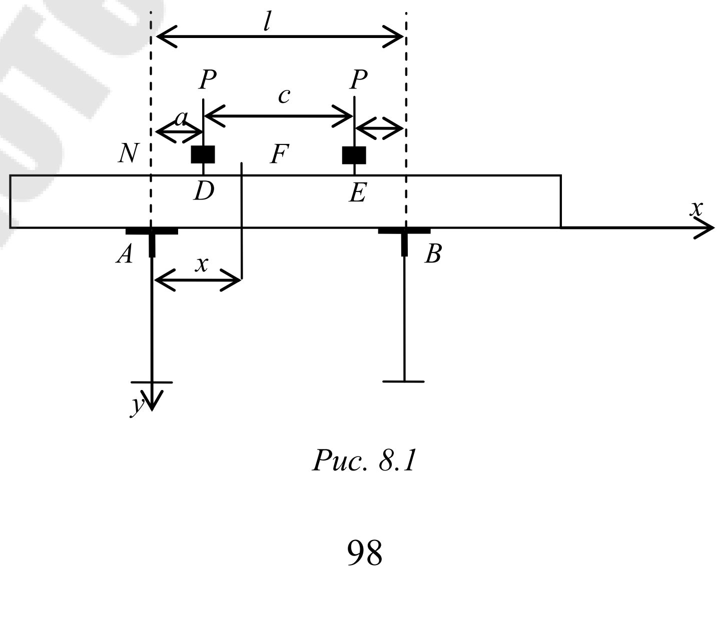

Рис. 8.1

Реакция опор $N = P$.

Для любого сечения F на участке *ДЕ* изгибающий момент

$$M = P(l - a - x) - P(l - x)$$

или

$$M = -Pa.$$

Дифференциальное сечение упругой линии принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pa}{EJ}. \qquad (8.2)$$

Интегрируя дважды уравнение (8.2), получим общее решение

$$y = -\frac{Pa}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right). \qquad (8.3)$$

Из начальных условий: $x = 0$, $y = 0$ и $x = l$, $y = 0$ следует

$$C_1 = -\frac{l}{2},\ C_2 = 0. \qquad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в общее решение (8.3), получим уравнение упругой линии участка *ДЕ*

$$y = \frac{Pax}{2EJ}(l - x).$$

Так как $a = \dfrac{l - c}{2}$, то искомое уравнение упругой линии бруса имеет вид

$$y = \frac{P(l - c)x}{4EJ}(l - x).$$

Задача 8.2. Консольная стальная балка длиной l нагружена сосредоточенной силой P в конце B. Найти уравнение упругой линии (кривой изгиба) и определить величину прогиба конца балки (модуль упругости E, момент инерции J) (*рис. 8.2*).

Решение. Определяем изгибающий момент M для сечения с центром в точке $N(x, y)$. В данном случае M равен моменту силы P относительно точки *N*, взятому со знаком плюс (сила приложена справа от сечения и вращает правую часть балки по часовой стрелке), т. е.

$$M = P(l - x). \qquad (8.5)$$

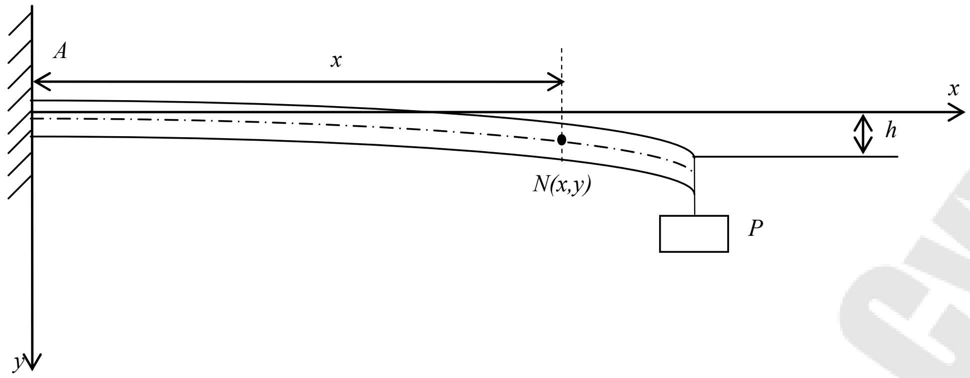

Рис. 8.2

Подставляя выражение (8.5) в уравнение (8.1), получаем ДУ упругой линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EJ}(l - x). \tag{8.6}$$

Непосредственным интегрированием находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{EJ}\int (l-x)d(l-x) = -\frac{P}{EJ}\frac{(l-x)^2}{2} + C_1,$$

откуда общее решение

$$y = \frac{P}{EJ}\frac{(l-x)^3}{6} + C_1 x + C_2. \tag{8.7}$$

Константы C_1 и C_2 определяем из начальных условий: на конце A балки $x = 0$, $y = 0$ и $\frac{dy}{dx} = 0$. Отсюда

$$C_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{2},\ C_2 = -\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{6}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение (8.7), получим искомое уравнение упругой линии:

$$y = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{8.8}$$

Прогибом балки называется ордината упругой линии в рассматриваемом сечении. Величина прогиба h на конце балки B получается из (8.8) при $x = l$:

$$h = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

8.2. Балка на двух опорах

Задача 8.2. На двух опорную балку OA длиной l действует сосредоточенная сила P, приложенная к точке B на расстояниях l_1 и l_2 от концов. Найти уравнение упругой линии и определить прогиб h в точке B (*рис. 8.3*).

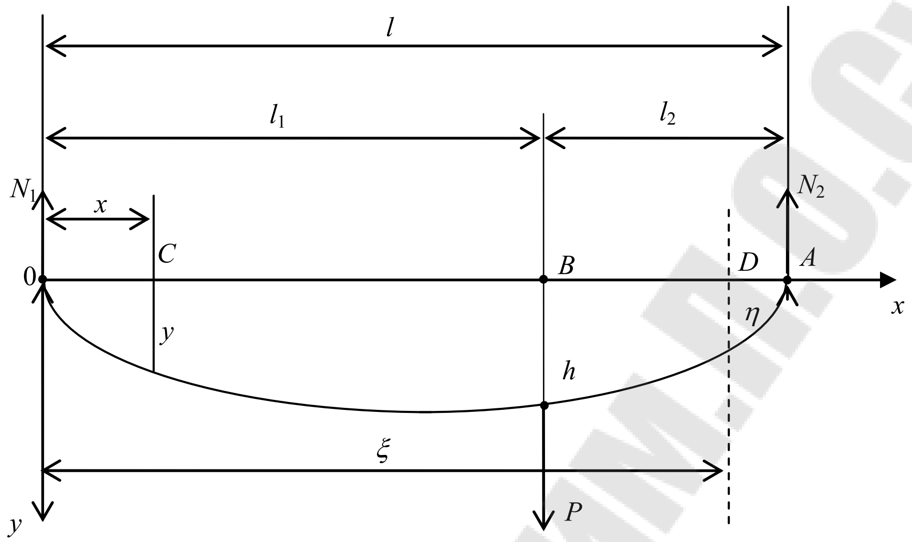

Рис. 8.3

Решение. Для определения неизвестных опорных реакций N_1 и N_2 напишем в точках O и A уравнения моментов действующих сил относительно этих опор:

$$N_1 l = Pl_2 \text{ и } N_2 l = Pl_1,$$

откуда

$$N_1 = \frac{Pl_2}{l}\ ,\ N_2 = \frac{Pl_1}{l}.$$

Составим уравнение для изгибающего момента. В любом сечении $C(x, y)$ части OB балки получим

$$M = P(l_1 - x) - N_2(l - x)$$

или

$$M = P(l_1 - x) - \frac{Pl}{l}(l - x). \tag{8.9}$$

В любом сечении $D(\xi, \eta)$ части BA балки имеем:

$$M = -N_2(l - \xi) = -\frac{Pl_1}{l}(l - \xi). \tag{8.10}$$

Момент (8.9) и (8.10) подставляем в ДУ упругой линии (8.1) и получим два разных ДУ соответственно для частей OB и BA балки:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EJ}(l_1 - x) - \frac{Pl_1}{lEJ}(l - x), \ \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{Pl_1}{lEJ}(l - \xi).$$

Решая оба эти уравнения, получим для левой части балки: первый интеграл

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{2EJ}(l_1 - x)^2 + \frac{Pl_1}{2lEJ}(l - x)^2 + C_1;$$

второй интеграл, т. е. общее решение,

$$y = \frac{P}{6EJ}(l_1 - x)^3 - \frac{Pl_1}{6lEJ}(l - x)^3 + C_1 x + C_2.$$

Для правой части балки: первый интеграл

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Pl_1}{2lEJ}(l - \xi)^2 + C_3,$$

второй интеграл, т. е. общее решение,

$$\eta = -\frac{Pl_1}{6lEJ}(l - \xi)^3 + C_3\xi + C_4.$$

Начальные условия на опорах O и A:

1) $x = 0$ и $y = 0$;

2) $\xi = l$ и $\eta = 0$;

в точке B приложения P:

3) $x = \xi = l_1$, $y = \eta$ (общая ордината);

4) $x = \xi = l_1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\eta}{d\xi}$ (общая касательная).

Подставив начальные условия в первые и вторые интегралы, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &C_2 = \frac{Pl_1}{6EJ}(l^2 - l_1^2), C_4 = -C_3 l, \\ &C_2 + C_1 l_1 = C_4 + C_3 l, C_1 = C_3. \end{aligned}\right\} \qquad (8.11)$$

Решение системы (8.11):

$$C_2 = C_3 = -\frac{Pl_1}{6EJl}(l^2 - l_1^2),$$

$$C_2 = C_4 = \frac{Pl_1}{6EJ}(l^2 - l_1^2).$$

Подставляем найденные значения постоянных в общее решение и получаем уравнение упругой линии для левой части балки

$$y = \frac{6l_2}{6EJl}(-x^3 + l^2 x - l_2^2 x),$$

для правой части балки

$$\eta = \frac{Pl_1}{6EJl}(\xi^2 + 2l^2\xi - 3l\xi^2 + l_1^2 x - ll_1^2).$$

Стрела прогиба h при $x = \xi = l_1$:

$$y = \eta = h = \frac{Pl_1^2 l_2^2}{3EJl}.$$

Задача 8.4. Балка на двух опорах длиной l прогибается под действием равномерно распределенной нагрузки, общий вес которой равен P. Определить уравнение упругой линии и прогиб в середине пролета (*рис. 8.4*).

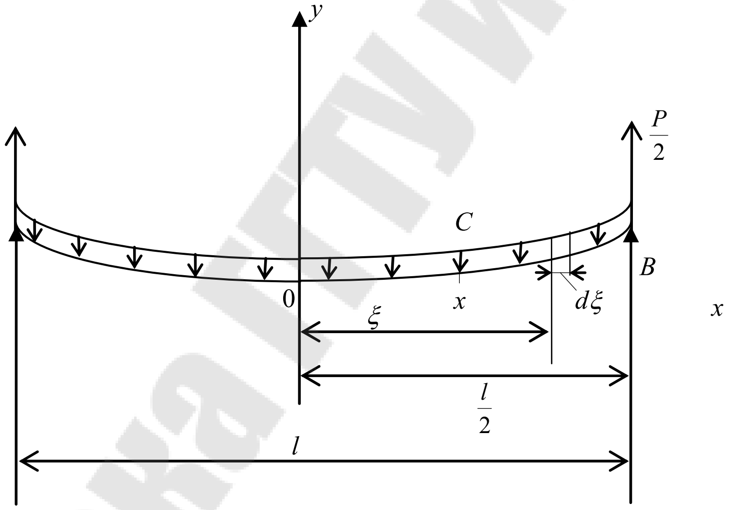

Рис. 8.4

Решение. Опорные реакции равны $\frac{P}{2}$; на единицу длины приходится нагрузка $-\frac{P}{l}$.

Рассмотрим сечение C балки на расстоянии x от начала координат. Вправо от сечения сила $\frac{P}{2}$ дает момент:

$$\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Вычислим момент относительно сечения C, создаваемый равномерно распределенной нагрузкой. Нагрузка на элемент длины балки $d\dot{\xi}$ с абсциссой ξ имеем величину $-\frac{P}{l}d\xi$, а ее момент относительно сечения C будет $-(\xi - x)\frac{P}{l}d\xi$. Полный момент всей нагрузки, соответствующей части балки CB равен

$$-\int_x^{\frac{l}{2}}(\xi - x)\frac{P}{l}d\xi.$$

Следовательно, суммарный момент

$$M(x) = -\int_x^{\frac{l}{2}}(\xi - x)\frac{P}{l}d\xi + \left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{P}{2} = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right).$$

Как известно, ДУ изогнутой балки (см. (8.1)):

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ},$$

где E – модуль упругости, J – момент инерции.

Для условий задачи это уравнение принимает вид

$$y'' = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right).$$

Начальные условия: при $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$.

Решая уравнения (8.12) при данных начальных условиях, получаем

$$y' = \frac{P}{2EJ}\int_0^x\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right)dx = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{lx}{4} - \frac{x^3}{3l}\right),$$

и общее решение

$$y = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{lx^2}{8} - \frac{x^4}{12l}\right) = \frac{P}{48EJ}\left(3lx^2 - \frac{2x^4}{l}\right).$$

Стрела прогиба в середине пролета $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ равна

$$h = \frac{P}{48EJ}\left(3l\frac{l^2}{4} - \frac{2}{l}\frac{l^4}{16}\right) = \frac{5Pl^3}{384EJ}.$$

8.3. Продольный изгиб прямого стержня

Задача 8.5. Определить критическую нагрузку стержня длиной *l*, если его оба конца подвижны, но не могут сходить с первоначальной неискривленной оси *OX* стержня.

Решение. Критическим называется значение силы P, при котором начинается искривление оси стержня. Для любого сечения изгибающий момент

$$M = -Py.$$

Тогда ДУ упругой линии (8.1) будет иметь вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EJ}y, \tag{8.13}$$

где E – модуль упругости, J – момент инерции площади поперечного сечения стержня.

ДУ (8.13) можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q^2y = 0, \tag{8.14}$$

где $q^2 = \frac{P}{EJ}$.

Характеристическое уравнение для ДУ (8.14):

$$\lambda^2 + q^2 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm iq$.

Поэтому общее решение ДУ (8.14) записывается в виде

$$y = C_1 \sin qx + C_2 \cos qx. \tag{8.15}$$

Граничные условия: так как концы стержня должны оставаться на оси *X*, то при $x = 0$ $y = 0$ и при $x = l$ $y = 0$. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 \sin(q\cdot 0) + C_2 \cos(q\cdot 0), \\ 0 &= C_1 \sin(q\cdot l) + C_2 \cos(q\cdot l) \end{aligned}\right\}$$

или

$$C_2 = 0,\ C_1 \sin(ql) = 0.$$

Для искривления необходимо, чтобы $C_1 \neq 0$ (при $C_1 = 0$ $y = 0$, т. е. упругая линия совпадает с осью OX и стержень не искривлен), следовательно,

$$\sin(ql) = 0,$$

откуда

$$ql = n\pi \quad \text{или} \quad q = \frac{n\pi}{l},$$

где n – любое целое число.

Итак, уравнение упругой линии

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

При $n = 0$ $y = 0$, т. е. получаем упругую линию еще не искривленного стержня. Поэтому стержень впервые искривится при $q = \frac{\pi}{l}$ $(n = 1)$. Это и будет критическое значение: $q_{êð} = \frac{\pi}{l}$.

С другой стороны,

$$q = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Поэтому

$$q_{kp} = \sqrt{\frac{P_{kp}}{EJ}},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{P_{kp}}{EJ}} = \frac{\pi}{l}$$

или

$$P_{kp} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Таким образом критическая нагрузка стержня имеет величину

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

и возрастает при уменьшении длины стержня.

Литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов /Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 575 с.
2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. для втузов /А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1969. – 736 с.
3. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений: учеб. пособие /К.К. Пономарев. – Мн.: Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.
4. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях /В.В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
5. Математические методы решения физических задач: учеб. пособие /Под ред. В.В. Харитонова. – Мн.: Вышэйшая школа, 1991. – 256 с.
6. Краснов, М.Л., Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Высшая школа, 1978. – 287 с.

Учебное издание

Тимошин Сергей Иванович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пособие
для студентов технических вузов

Редактор	*Н.Г. Мансурова*
Компьютерная верстка	*Н.Б. Козловская*

Подписано в печать .2005 г.
Формат $60x84/_{16.}$ Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л.6,9.
Тираж 150 экз. Изд. № 37. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел
Учреждения образования «Гомельский государственный
технический университет имени П.О. Сухого».
ЛИ № 02330/0133207 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.

Отпечатано на ризографическом оборудовании
Учреждения образования «Гомельский государственный
технический университет имени П.О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П.О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С.И. Тимошин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПОСОБИЕ
для студентов технических вузов

Гомель 2005