

УДК 531.3

БИФИЛЯРНО-КОНТРОЛИРУЕМЫЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНЫХ ТЕЛ

Ю. А. КАШИН, М. И. ЖАДАН

*Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»,
Республика Беларусь*

Р. Е. КАШИНА

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Введение

Выделим и рассмотрим следующие виды сложных движений некоторых тел:

- строго регламентированные, поступательные перемещения грузовых контейнеров, осторожно переносимых портальными кранами, в логистических коллекторах;
- спонтанные, акробатические виражи-полеты кайт-серферов, увлекаемых стропами своих воздушных змеев – кайтов, на показательных выступлениях;
- грациозные симуляции танцевальных «па» куклами марионетками, управляемыми артистами-кукловодами, на кукольных спектаклях;
- парашютные торможения приземляющихся самолетов и десантируемых с них грузов.

Используя признаки функционального и кинетического подобия процессов осуществления этих движений названных тел, определим соответствующий им класс бифилярно-контролируемых движений свободных тел, каждым отдельным элементом которого является некий определенный вариант исполнения некоторого определенного, функционально-полезного движения данного свободного тела S , совершаемого им в данных условиях, в течение своего ограниченного интервала времени $t \in [0, T]$, по своему определенному пространственно-временному закону и реализуемого под действием системы сил $\Sigma = \Sigma(t)$, включающей соответствующие распределенные массовые силы инерции тела S , его постоянную силу тяжести \vec{G} и две переменные по модулю и по направлению силы натяжения пары связанных с этим телом его гибких, управляющих поводков (meins):

$$\vec{P} = \vec{P}(t) \quad \text{и} \quad \vec{Q} = \vec{Q}(t), \quad (1)$$

адекватные данным условиям и закону его искомого движения тела S .

Эти определенные и непрерывные вектор-функции времени t , $t \in [0, T]$ условимся называть алгоритмом силового управления данного бифилярно-контролируемого движения свободного тела S его гибкими напряженными поводками. Механическую систему, обеспечивающую это движение свободного тела S и его гибкие напряженные поводки назовем свободным, мобильным бифиляром S или, кратко, бифиляром S .

Постановка задачи исследования

Предметом настоящей работы является формальное описание некоторого определенного бифилярно-контролируемого движения свободного твердого тела S и построение алгоритма его силового управления своими гибкими напряженными поводками на основании известных понятий и положений классической механики твердого тела [1], [2] и результатов нашего исследования кинетики механических систем с гибкими связями [4]–[6].

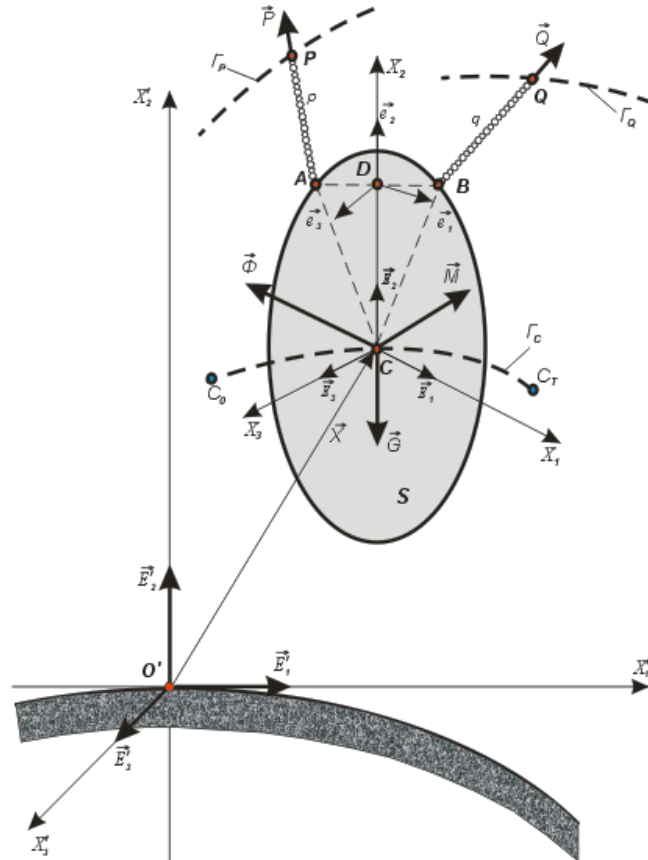


Рис. 1. Кинетическая схема мобильного бифилярного подвеса тела S

Проектируемое движение тела S при $t \in [0, T]$ будем определять в условно неподвижной, связанной с Землей, правой прямоугольной системе осей декартовых координат $O'X'_1X'_2X'_3$ с ортами $\vec{E}'_j, j = \overline{1,3}$, началом которой служит некоторая фиксированная точка O' земной сферы, где плоскость $O'X'_1X'_2$ является касательной и горизонтальной плоскостью, ось $O'X'_3$ направлена вертикально вниз к центру Земли, и где областью возможных положений точек тела S является верхнее полупространство $X'_3 \leq 0$.

Тело S считаем выпуклым (рис. 1). Пусть $m, \text{ кг}$ – его масса, C – центр масс и точка приложения его массовой силы тяжести

$$\vec{G} = mg\vec{E}'_3, \text{ н}, \tag{2}$$

где $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения тел на Земле; A и B – две точки поверхности тела S , в которых плотно защемлены концы пары напряженных отрезков

гибкой, нерастяжимой и невесомой нити длиной p , м, и q , м, именуемых гибкими управляющими поводками тела S ; P и Q – их свободные концы; $\vec{P}(t)$, н, и $\vec{Q}(t)$, н – искомые силы их натяжения.

Тело S считаем определенным в своей локальной, правой триортогональной системе осей координат, образуемой его главными центральными осями инерции CX_k , $k = \overline{1,3}$, и пусть i_k , м – соответствующие осевые радиусы инерции тела S ;

$$I_k = mi_k^2, \text{ кгм}^2, \quad k = \overline{1,3} \quad (3)$$

– его соответствующие главные центральные моменты инерции;

$$\vec{E}_k = \vec{E}_k(t), \quad k = \overline{1,3} \quad (4)$$

– вектор-функции определения переменной пространственной ориентации единичных направляющих векторов соответствующих осей локальных координат тела S относительно осей декартовой системы координат.

Предполагаем, что нумерация этих осей, выбор и расположение точек крепления его гибких поводков определены так, что:

– точки приложения сил \vec{P} , \vec{Q} и \vec{G} являются вершинами действительного равнобедренного $\triangle ABC$ с высотой $CD = h$, м и боковыми сторонами $CA = CB = l$, м;

– локальная ось координат CX_3 тела S перпендикулярна плоскости $\triangle ABC$, а ось CX_2 оказывается его осью симметрии.

Удовлетворяя этим условиям, локальные радиус-векторы точек A и B крепления гибких поводков определим значениями:

$$\vec{CA}(t) = \vec{A}(t) = l[\vec{E}_2(t)\sin\alpha + \vec{E}_3(t)\cos\alpha], \quad \vec{CB}(t) = \vec{B}(t) = l[-\vec{E}_2(t)\sin\alpha + \vec{E}_3(t)\cos\alpha], \quad (5)$$

где

$$\alpha = \arccos \frac{h}{l}. \quad (6)$$

Считаем, что искомые силы (1) натяжения гибких поводков будут определяться своими координатными формами в базисе локальной системы координат тела S :

$$\vec{P}(t) = \sum_{k=1}^3 P_k(t)\vec{E}_k(t) \quad \text{и} \quad \vec{Q}(t) = \sum_{k=1}^3 Q_k(t)\vec{E}_k(t). \quad (7)$$

Тогда переменными

$$\gamma_k(t) = \frac{P_k(t)}{|\vec{P}(t)|} \quad \text{и} \quad \Delta_k(t) = \frac{Q_k(t)}{|\vec{Q}(t)|}, \quad (k = \overline{1,3}) \quad (8)$$

будут определены направляющие косинусы этих сил и коллинеарных им ориентированных отрезков гибких напряженных поводков тела S :

$$\vec{p}(t) = p \sum_{k=1}^3 \gamma_k(t)\vec{E}_k(t) \quad \text{и} \quad \vec{q}(t) = q \sum_{k=1}^3 \Delta_k(t)\vec{E}_k(t). \quad (9)$$

Следовательно, свободное тело S , обладающее шестью степенями своей позиционной свободы, сохраняет их все и в случае действия гибких напряженных поводков.

Данное бифилярно-контролируемое движение тела S представим и рассмотрим в форме геометрической суперпозиции его двух синхронно выполняемых элементарных движений: переносного, строго поступательного движения – однородной трансляции всего множества точек тела S совместно с его центром масс – полюсом C и относительного вращения этого тела – строго сферического движения всех его точек относительно его центра мгновенного вращения – полюса C . Обобщенными позиционными координатами такой композиционной формы представления рассматриваемого движения тела S относительно осей декартовой системы координат принимаем упорядоченное множество шести заданных независимых функций времени $t \in [0, T]$, непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно, состоящее из трех функций определения тройки независимых декартовых, линейных координат тела S :

$$X'_j = X'_j(t), j = \overline{1,3}, \quad (10)$$

характеризующих движение полюса C тела S и его относительное, переносное движение, и трех функций определения последовательности трех независимых эйлеровых угловых координат тела S :

$$\psi = \psi(t), \quad \Theta = \Theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (11)$$

называемых, соответственно, углом относительной прецессии тела S ; углом его относительной нутации; углом его относительного собственного вращения [1], и определяющих переменные значения девяти элементов матрицы ориентации Эйлера для тела S :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{jk}(t) &= \vec{E}'_j \vec{E}'_k(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \Theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \Theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \Theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \Theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \Theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \Theta \\ \sin \Theta \sin \varphi & \sin \Theta \cos \varphi & \cos \Theta \end{bmatrix}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$(j = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}).$$

Условимся считать, что пространственно-временной закон движения тела S , параметрически определяемый функциями (10)–(11), является нормативным положением технического задания на разработку проекта электромеханической системы для осуществления данного функционально полезного движения тела S , и что этим движением тела S обеспечивается его искомый полезный эффект, т. е. необходимо, используя аналитические свойства данных функций и известные методы классической механики, определить и сформулировать основные правила осуществления таких движений тела S , включая искомый алгоритм его силового управления своими гибкими, напряженными поводками.

Пространственную кривую $\Gamma(C)$, описываемую полюсом C тела S и определяемую функциями (10) назовем орбитой данного бифилярно-контролируемого движения этого тела. С использованием вектор-функции

$$\vec{OC}(t) = \vec{X}(t) = \sum_{j=1}^3 X'_j(t) \vec{E}'_j \quad (13)$$

определяем скорость полюса C и линейную скорость переносного поступательного движения тела S . Переменные (12) позволяют определить следующие взаимосвязи его кинетических характеристик движения

$$\vec{E}_k(t) = \sum_{j=1}^3 \mathcal{O}_{jk}(t) \vec{E}'_j, \quad k = \overline{1,3}; \quad (14)$$

$$\vec{E}'_j(t) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{O}_{jk}(t) \vec{E}_k = \text{const}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^3 \mathcal{O}_{jk}^2(t) = 1, \quad j = \overline{1,3}; \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^3 \mathcal{O}_{jk}^2(t) = 1, \quad k = \overline{1,3}; \quad (17)$$

$$P'_j(t) = \vec{P}(t) \vec{E}'_j(t) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{O}_{jk}(t) P_k(t), \quad j = \overline{1,3}; \quad (18)$$

$$Q'_j(t) = \vec{Q}(t) \vec{E}'_j(t) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{O}_{jk}(t) Q_k(t), \quad j = \overline{1,3}. \quad (19)$$

Затем используем функции обобщенных координат (10)–(11) и их производные и составляем аналитические выражения основных характеристик процесса движения тела S :

– его скорости переносного поступательного движения

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{dX'_j(t)}{dt} \vec{E}'_j = \sum_{j=1}^3 V'_j(t) \vec{E}'_j; \quad (20)$$

– его количества движения

$$\vec{K}(t) = m\vec{V}(t) = m \sum_{j=1}^3 V'_j(t) \vec{E}'_j = \sum_{j=1}^3 K'_j(t) \vec{E}'_j. \quad (21)$$

Угловую скорость относительного вращения тела S вокруг своего центра C определим вектор-функцией:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \sum_{k=1}^3 \omega_k(t) \vec{E}_k(t), \quad (22)$$

где, согласно кинематическим уравнениям Эйлера [1]:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(t) &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \varphi; \\ \omega_2(t) &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \varphi; \\ \omega_3(t) &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Центральный кинетический момент тела S равен:

$$\bar{\mu}(t) = \sum_{k=1}^3 \mu_k(t) \bar{E}_k, \quad (24)$$

где

$$\mu_k(t) = I_k \omega_k(t), \quad k = 1, 3. \quad (25)$$

Затем применяем теорему о движении центра масс тела S и теорему об изменении его центрального кинетического момента, определяем главный вектор

$$\bar{\Phi}(t) = \sum_{j=1}^3 \Phi'_j(t) \bar{E}'_j(t) = \sum_{j=1}^3 m \frac{d^2 X'_j(t)}{dt^2} \bar{E}'_j(t) \quad (26)$$

распределенных массовых сил инерции поступательного переносного движения тела S и главный момент

$$\bar{M}(t) = \sum_{k=1}^3 M_k(t) \bar{E}_k(t) = \frac{d\bar{\mu}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{d\mu_k(t)}{dt} \bar{E}_k(t) + \mu_k(t) (\bar{\omega}(t) \times \bar{E}_k) \right) \quad (27)$$

пары сил распределенных массовых сил инерции относительного вращения тела вокруг полюса C .

Принимаем точку D , среднюю между A и B , центром приведения системы сил $\Sigma = \Sigma(t)$ и, используя принцип Даламбера, можем записать:

$$\begin{cases} \bar{G} + \bar{P}(t) + \bar{Q}(t) + \bar{\Phi}(t) = 0 \\ \overrightarrow{DA}(t) \times \bar{P}(t) + \overrightarrow{DB}(t) \times \bar{Q}(t) + \overrightarrow{DC}(t) \times \bar{G} + \bar{M}(t) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Введем вспомогательную систему осей координат $Dx_1x_2x_3$ с ортами $\bar{e}_k = \bar{E}_k$ ($k = 1, 2, 3$) и, проектируя данные уравнения на эти оси координат, получаем систему шести уравнений для нахождения шести компонент сил натяжения гибких поводков, обеспечивающих заданный закон движения тела S . Используя полученные результаты, можем записать векторные уравнения движений точек P и Q , необходимые для осуществления обсуждаемого движения этого тела:

$$\begin{cases} \bar{P}(t) = \overrightarrow{O'P}(t) + \overrightarrow{O'C}(t) + \overrightarrow{CA}(t) + \overrightarrow{AP}(t) \\ \bar{Q}(t) = \overrightarrow{O'Q}(t) + \overrightarrow{O'C}(t) + \overrightarrow{CB}(t) + \overrightarrow{BQ}(t) \end{cases}, \quad (29)$$

где слагаемые правых частей определены выше.

Эти решения позволяют определить необходимые условия осуществления данного бифилярно-контролируемого движения свободного тела S .

Литература

1. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики / Н. Н. Бухгольц. – М. : Наука. – 1972. – Ч. 1. – 468 с.
2. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики / Н. Н. Бухгольц. – М. : Наука. – 1972. – Ч. 2. – 332 с.

3. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1974. – 432 с.
4. Кашин, Ю. А. Кинетика бифилярной передачи / Ю. А. Кашин, М. И. Жадан, Р. Е. Кашина // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2008. – № 2. – С. 18–28.
5. Кашин, Ю. А. Общее и частное решения задачи о стационарном состоянии бифилярной передачи / Ю. А. Кашин, М. И. Жадан, Р. Е. Кашина // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2008. – № 2. – С. 29–37.
6. Кашин, Ю. А. Крыловой профиль на регулируемом бифилярном подвесе в однородном потоке среды / Ю. А. Кашин, М. И. Жадан, Р. Е. Кашина // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-техн. наук. – 2012. – № 3. – С. 45–50.

Получено 01.07.2014 г.