Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Детали машин»

А. Т. Бельский, Г. П. Тариков

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ПОСОБИЕ
для самостоятельной подготовки к зачету по одноименному курсу для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2009

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 30.12я73
Б44

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 4 от 31.03.2008 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *М. П. Кульгейко*

Бельский, А. Т.

Б44 Прикладная механика : пособие для самостоятельной подготовки к зачету по одноим. курсу для студентов экон. специальностей заоч. формы обучения / А. Т. Бельский, Г. П. Тариков – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 37 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-859-6.

Изложены краткие теоретические сведения по разделам теоретической механики, механики материалов и деталям машин. Приведены решения типовых задач, а также включены задачи, выносимые на зачет по курсу «Прикладная механика».

Для студентов экономических специальностей заочной формы обучения.

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 30.12я73

ISBN 978-985-420-859-6

1. Вопросы для подготовки к зачету по теории

Курс «Прикладная механика» содержит вопросы, относящиеся к таким дисциплинам, как теоретическая механика, механика материалов и детали машин. На зачет выносятся следующие теоретические вопросы:

Раздел теоретической механики

1. Сложение сходящихся сил в точке.
2. Геометрическое условие равновесия.
3. Аналитическое условие равновесия.
4. Приведение силы к точке.
5. Момент силы относительно точки.
6. Способы задания движения точки.
7. Определение скорости и ускорения при различных способах задания движения точки.
8. Скорости и ускорения различных точек вращающегося тела.
9. Скорости и ускорения различных точек при плоскопараллельном движении твердого тела.
10. Дифференциальное уравнение движения материальной точки.
11. Моменты инерции тел.
12. Кинетическая энергия механической системы.
13. Теорема об изменении кинетической энергии.

Раздел механики материалов

1. Статические моменты плоского сечения.
2. Определение центра тяжести сечения.
3. Моменты инерции плоского сечения.
4. Моменты сопротивления плоских сечений.
5. Диаграмма растяжения. Основные механические характеристики материалов.
6. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений при растяжении-сжатии.
7. Расчет на прочность при растяжении-сжатии.
8. Построение эпюр крутящих моментов при кручении.
9. Проверка прочности материала при кручении.
10. Деформация при кручении.
11. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при плоском изгибе.
12. Основные расчетные предпосылки и формулы при плоском изгибе.
13. Определение нормальных напряжений при плоском изгибе.

14. Теория наибольших касательных напряжений.

15. Энергетическая теория энергоизменения.

Раздел деталей машин

1. Виды шпонок и область их применения.
2. Расчет ненапряженных шпоночных соединений.
3. Расчет напряженных шпоночных соединений.
4. Шлицевые соединения и их расчет.
5. Штифтовые соединения и их расчет.
6. Расчет на прочность резьбы и стержня винта.
7. Определение нагрузки, действующей на один болт.
8. Расчет стержня болта на прочность.
9. Зависимость между моментом, приложенным к гайке и осевой силой винта.
10. Сварные соединения встык и их расчет.
11. Сварные соединения внахлестку и их расчет.
12. Сварные соединения втавр и их расчет.
13. Определение допускаемых напряжений при сварном соединении.
14. Заклепочные соединения и их расчет.

Кроме теоретических вопросов в зачетном билете имеется задача. В связи с тем, что контрольная работа по «Прикладной механике» студентам экономических специальностей заочной формы обучения не предусмотрена, поэтому возникает трудность решения задачи на зачете из-за отсутствия практики.

При написании данного пособия авторы преследовали цель существенно облегчить самостоятельную подготовку студента к зачету.

2. Раздел теоретической механики

2.1. Статика

При сдаче зачета предлагается задача по определению реакций в опорах статически определимой балки при различных условиях нагружения.

Реакции в опорах определяют путем совместного решения уравнений равновесия, а именно:

$$\sum F_{x_i} = 0; \quad \sum F_{y_i} = 0; \; \sum M_{Ai} = 0,$$

где $F_{xi} = F_i \cos\alpha_i$ – проекция i-й силы F_i на ось X; α_i – угол между осью X и направлением вектора i-й силы F_i, отсчитываемый против часовой стрелки от оси X; $F_{y_i} = F_i \sin\alpha_i$ – проекция i-й силы F_i на ось Y; $M_{Ai} = \pm F_{y_i} x_i$ – момент i-й силы F_i относительно точки A; x_i – кратчайшие расстояния от точки A до линии действия проекций i-й силы F_i на ось Y .

Рассмотрим определение реакций опор статически определимой балки на конкретном примере (рис. 1).

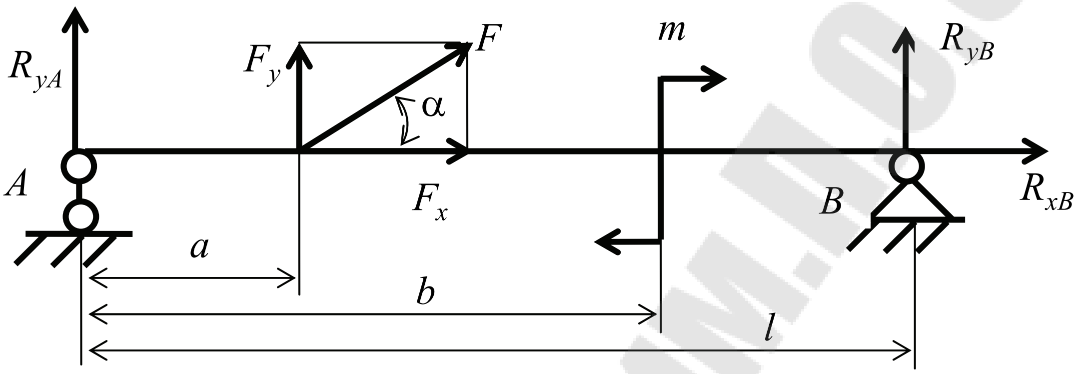


Рис. 1

На балку действуют сосредоточенная сила F и сосредоточенный изгибающий момент m. Силу F разложим на две составляющие $F_x = F\cos\alpha$ и $F_y \sin\alpha$. Вертикальные составляющие реакций опор R_{yA} и R_{yB} направляем вверх, а горизонтальную составляющую R_{xB} – вправо.

Составляем уравнения равновесия

$$\sum F_{xi} = 0;\; F_x + R_{xB} = 0;$$
$$\sum F_{y_i} = 0;\; R_{yA} + F_y + R_{yB} = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0;\; F_y \cdot a - m + R_{yB} \cdot l = 0.$$

Решая совместно данные уравнения, получаем

$$R_{xB} = -F_x; \quad R_{yB} = \frac{m - F_y \cdot a}{l};\; R_{yA} = -F_y - R_{eB}.$$

Знак «–» указывает на то, что действительное направление реакции противоположно направлению реакции, указанной на схеме.

Задачи к зачету

Определить реакции в опорах балки (рис. 2).

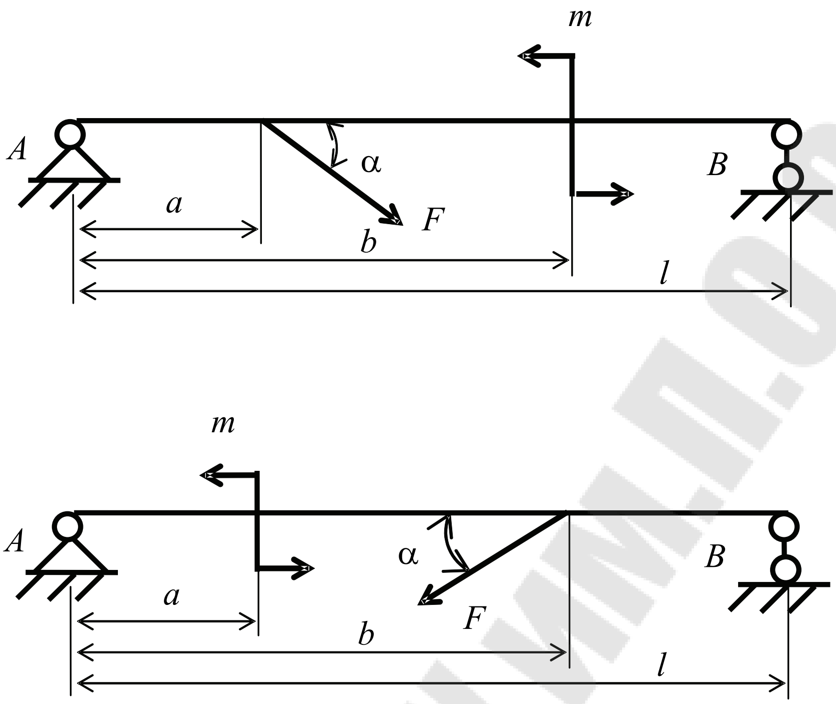


Рис. 2

2.2. Кинематика

Основной задачей раздела кинематики является определение скоростей и ускорений точек тела без учета действия приложенных к ним сил.

Для решения задач, предлагаемых на зачет по кинематике, необходимо использовать следующие формулы, которые приведены в таблице 1.

Таблица 1

Основные формулы

Вид движения	Параметр	Формула
Естественный способ задания движения точки $s = f(t)$	Скорость точки	$V = \dfrac{dS}{dt}$
	Касательное ускорение	$a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$
	Нормальное ускорение	$a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории движения точки

Продолжение табл. 1

Вид движения	Параметр	Формула
Координатный способ задания движения точки $x = f_1(t);\ \ y = f_2(t)$	Скорость точки	$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, где $V_x = \dfrac{dx}{dt}$; $V = \dfrac{dy}{dt}$
	Ускорение точки	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, где $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$
	Касательное ускорение	$a_\tau = \dfrac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$
	Нормальное ускорение	$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$
	Радиус кривизны траектории движения точки	$\rho = \dfrac{V^2}{a_n}$
Вращательное движение $\varphi = f(t)$	Угловая скорость тела	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
	Угловое ускорение тела	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$
	Линейная скорость точки тела	$V = \omega R$, где R – радиус кривизны траектории движении точки тела
	Линейное ускорение точки тела	$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$, где $a_n = \omega^2 R = \dfrac{V^2}{R}$; $a_\tau = \varepsilon R$
Равномерное прямолинейное движение $a = \text{const}$	Путь	$s = s_o + Vt + \dfrac{at^2}{2}$, где s_o – перемещение в начальный момент времени
	Скорость	$V = V_o + at$, где V_o – скорость в начальный момент времени

Вид движения	Параметр	Формула
Равномерное вращательное движение $\varepsilon = \text{const}$	Угол поворота	$\varphi = \varphi_о + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$, где $\varphi_о$ – угол поворота в начальный момент времени
	Угловая скорость	$\omega = \omega_о + \varepsilon t$, где $\omega_о$ – угловая скорость в начальный момент времени

Примеры решения задач

Задача 1

Точка движется по кривой со скоростью $V = 0{,}5t$. Определить ее координату в момент времени $t = 10$ с, если при $t_о = 0$ координата точки $S_о = 0$.

Решение

Учитывая, что

$V = \frac{dS}{dt} = 0{,}5t,$ получаем $dS = 0{,}5t \cdot dt$. После интегрирования получаем

$$S = 0{,}5\frac{t^2}{2} + C = 0{,}25t^2 + C.$$

Постоянную интегрирования определяем из начальных условий: т. к. при $t_о = 0$, $S_о = 0$, то $C = 0$.

Тогда искомая координата S в момент времени $t = 10$ с будет равна: $S = 0{,}25t^2 = 0{,}25 \cdot 10^2 = 25$ м.

Задача 2

Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$. Определить вид траектории и время t, когда криволинейная координата S точки будет равна $S = 7$ м, если при $t_о = 0$ $S_о = 0$. Точка движется в положительном направлении координаты S.

Решение

Закон движения точки задан в координатной форме. Для определения вида траектории движения исключим общий параметр t. Для этого возведем в квадрат правые и левые части уравнений и сложим их друг с другом. В результате получим:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Данная траектория представляет собой окружность с радиусом, равным 3 м.

Скорость движения точки при координатном способе движения равна:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где $V_x = \dot{x} = -3\sin t$; $V_y = \dot{y} = 3\cos t$.

Тогда $V = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} = 3$ м/с.

Так как скорость постоянна, то касательное ускорение $a_\tau = 0$, а искомое время t определяется из уравнения: $S = S_0 + Vt$. Учитывая начальные условия, имеем $t = \dfrac{S}{V} = \dfrac{7}{3} = 2{,}33$ с.

Задача 3

Точка движется по окружности согласно уравнению $S = t^3 + 2t^2 + 3t$ (м). Определить криволинейную координату точки в момент времени, когда ее касательное ускорение $a_\tau = 16$ м/с^2.

Решение

Для определения касательного ускорения дважды продифференцируем уравнение движения, заданное в естественной форме.

$$\frac{dS}{dt} = V = 3t^2 + 4t + 3; \qquad \frac{d^2S}{dt^2} = a_\tau = 6t + 4.$$

В соответствии условия $a_\tau = 6t + 4 = 16$, откуда $t = 2$ с. В этом случае искомая криволинейная координата точки

$$S = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 22 \text{ м}.$$

Задача 4

Проекции скорости точки во время движения определяются выражениями: $V_x = 0{,}2t^2$ (м/с), $V_y = 3$ м/с. Определить касательное ускорение в момент времени $t = 2{,}5$ с.

Решение

Определим проекции ускорения точки

$$a_x = \frac{dV_x}{dt^2} = 0{,}4t; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt^2} = 0.$$

Для момента времени $t = 2{,}5$ с имеем $a_x = 1$ м/с^2, $a_y = 0$. Проекции скорости в момент времени $t = 2{,}5$ с $V_x = 0{,}2 \cdot 2{,}5^2 = 1{,}25$ м/с; $V_y = 3$ м/с, а скорость

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1{,}25^2 + 3^2} = 3{,}25 \text{ м/с}.$$

Тогда искомое касательное ускорение равно

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{1{,}25 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{3{,}25} = 0{,}385 \text{ м/с}^2.$$

Задача 5

По окружности движется точка согласно уравнению $S = 5t - 0{,}4t^2$. Определить время t, когда нормальное ускорение $a_n = 0$.

Решение

Нормальное ускорение определяется по формуле $a_n = \dfrac{V^2}{R}$. Из формулы видно, что нормальное ускорение будет равно нулю, если $V = 0$.

Скорость точки равна

$$V = \frac{dS}{dt} = 5 - 0{,}8t.$$

Из равенства $V = 0$ определяем искомое время t. $V = 5 - 0{,}8t = 0; \quad t = \dfrac{5}{0{,}8} = 6{,}25$ с.

Задача 6

Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $a_\tau = 1{,}4$ м/с^2. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее полное ускорение $a = 2{,}6$ м/с^2.

Решение

Учитывая, что $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$, получаем:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2{,}6^2 - 1{,}4^2} = 2{,}19 \text{ м/с}^2.$$

Задача 7

Угловая скорость вала изменяется согласно закону $\omega = -8t$. Определить угол поворота тела в момент времени $t = 3$ с, если при $t_0 = 0$ угол поворота $\varphi_0 = 5$ рад.

Решение

Учитывая, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = -8t$, разделяя переменные и интегрируя, получаем $d\varphi = -8t \cdot dt$; $\varphi = -4t^2 + C$. Постоянную интегрирования определяем из начальных условий. При $t = t_0 = 0$, $\varphi_0 = 5$ рад, тогда $C = 5$ рад. Следовательно, в момент времени $t = 3$ с угол поворота тела будет равен:

$$\varphi = -4t^2 + 5 = -4 \cdot 3^2 + 5 = -31 \text{ рад}.$$

Задача 8

Нормальное ускорение точки M диска (рис. 3), вращающего вокруг неподвижной оси, равно 6,4 м/с^2. Определить угловую скорость ω этого диска, если его радиус $R = 0{,}4$ м.

Решение

Нормальное ускорение точки M диска определяется из выражения:

$$a_n = \omega^2 R, \text{ откуда } \omega = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}4}{0{,}4}} = 4 \text{ рад/с}.$$

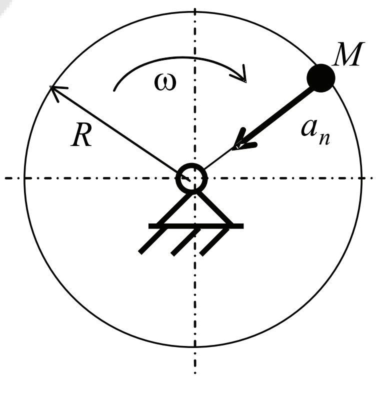


Рис. 3

Задачи к зачету

1. Точка движется по траектории согласно уравнению $S = 0{,}5t^2 + 4t$. Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет 10 м/с. (Ответ: 6).

2. Точка движется по заданной траектории со скоростью $V = 5$ м/с. Определить криволинейную координату S в момент времени $t = 18$ с, если при $t_0 = 0$ координата $S_0 = 26$ м. (Ответ: 116).

3. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. Определить момент времени t, когда криволинейная координата точки $S = 110$ м, если при $t_0 = 0$ $S_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s. (Ответ: 4,69).

4. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$. Определить криволинейную координату S точки в момент времени $t = 5$ с, если при $t_0 = 0$ $S_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s. (Ответ: 10).

5. Точка движется с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Определить криволинейную координату точки в момент времени t = 4 с, если при $t_0 = 0$ скорость точки $V_0 = 0$, координата $S_0 = 0$. (4)

6. Касательное ускорение точки $a_\tau = 0{,}2t$. Определить момент времени t, когда скорость точки достигнет 10 м/с, если при $t_0 = 0$ скорость точки V_0 = 2 м/с. (Ответ: 8,94).

7. Проекции ускорения точки во время движения определяются выражениями $a_x = 0{,}8t$ (м/с^2) $a_y = 0{,}8$ м/с^2. Найти касательное ускорение в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ скорость точки $V_0 = 0$. (Ответ: 1,70).

8. Дано уравнение движения точки по траектории $S = 5t$. Определить радиус кривизны траектории, когда нормальное ускорение точки $a_n = 3$ м/с^2. (Ответ: 8,33).

9. Дано уравнение движения точки по траектории: $S = 0{,}1t^2 + 0{,}2t$. Определить ее нормальное ускорение в момент времени t = 6 с. В положении, занимаемой точкой в этот момент времени, радиус кривизны траектории $\rho = 0{,}6$ м. (Ответ: 3,27).

10. Точка движется по окружности радиуса $R = 7$ м согласно уравнению $S = 0{,}7t^2$. Определить координату S точки в момент времени, когда ее нормальное ускорение $a_n = 3$ м/с^2. (Ответ: 7,50).

11. Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории: $S = 0{,}2t^2 + 0{,}3t$. Определить полное ускорение точки в момент времени t = 3 с, если в этот момент радиус кривизны траектории $\rho = 1{,}5$ м. (Ответ: 1,55).

12. Точка движется по окружности радиуса 200 м из состояния покоя с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 1$ м/с^2. Определить полное ускорение в момент времени t = 20 с. (Ответ: 2,24).

13. Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 2t^3$. Определить касательное ускорение точки этого тела на расстоянии $R = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с. (Ответ: 4,8).

14. Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 1 + t$. Определить ускорение точки этого тела на расстоянии $R = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 1$ с. (Ответ: 0,825).

2.3. Динамика

Основной задачей динамики является изучение движения материальных тел под действием сил. Отличие динамики от кинематики состоит в том, что при изучении движения тел принимают во внимание как действующие на них силы, так и инертность самих материальных тел.

Законы механики

Первый закон Ньютона (принцип инерции): материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета до тех пор, пока действующие на нее силы не изменят это состояние.

Второй закон Ньютона (основной закон динамики): сила F, действующая на тело, равна произведению массы тела m на сообщаемое этой силой ускорение a:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Третий закон Ньютона (принцип равенства действия и противодействия): все тела действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению (сила действия равна силе противодействия).

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Закон независимости действия сил: каждая из сил системы, приложенная к материальной точке, сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщала бы, действуя одна.

$$\vec{F}_\Sigma = \Sigma\vec{F}_i;\ \vec{a} = \Sigma\vec{a}_i;\ \vec{F}_\Sigma = m\vec{a}.$$

Дифференциальное уравнение движения точки. Пусть материальная точка движется под действием переменной силы $\vec{F}$ по какой-то криволинейной траектории. Проекции этой силы на координатные оси обозначим F_x, F_y и F_z. Проектируя векторное уравнение второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ на координатные оси, получим:

$$F_x = ma_x;\ F_y = ma_y;\ F_z = ma_z.$$

Учитывая, что $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x;\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y;\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки. Если на точку действуют несколько сил, то под F_x, F_y и F_z понимаются проекции равнодействующей сил.

Примеры решения задач

Задача 1

Точка массой $m = 14$ кг движется по горизонтальной оси Ox с ускорением $a_x = \ln t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении движения в момент времени $t = 5$ с.

Решение

Дифференциальное уравнение движения точки будет $ma_x = F_x$. Подставляя значение ускорения, определяем модуль действующей на точку силы в момент времени $t = 5$ с:

$$F_x = m\ln t = 14 \cdot \ln 5 = 22{,}5 \text{ Н}.$$

Задача 2

Материальная точка массой 1,4 кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.

Решение

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид: $ma_x = F_{x\sum}$. Дважды дифференцируя уравнение движения точки, найдем ее ускорение: $\frac{dx}{dt} = 12t + 6$; $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = 12$ м/с^2. Искомый модуль равнодействующих сил $F_{x\sum} = ma_x = 1{,}4 \cdot 12 = 16{,}8$ Н.

Задачи к зачету

1. Материальная точка массой $m = 12$ кг движется по прямой со скоростью $V = e^{0{,}1t}$. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку в момент времени $t = 50$ с. (Ответ: 178).

2. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой $m = 3$ кг в момент времени $t = 6$, если она движется по оси Ox согласно уравнению $x = 0{,}04t^3$. (Ответ: 4,32).

3. Движение материальной точки массой $m = 8$ кг происходит в горизонтальной плоскости Oxy согласно уравнениям $x = 0{,}05t^3$ и $y = 0{,}3t^2$. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени $t = 4$ с. (Ответ: 10,7).

4. Материальная точка массой $m = 900$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 270t$, которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $V_0 = 10$ м/с.(Ответ: 25).

5. Материальная точка массой $m = 25$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной прямой под действием силы $F = 20t$, которая направлена по той же прямой. Определить путь пройденный точкой за 4 с. (8,53)

Работа постоянной силы. Для характеристики эффективности силового воздействия на тело используется величина, называемая механической работой. Пусть под действием постоянной силы F точка M переместилась из положения M_0 в положение M_1 (рис. 4).

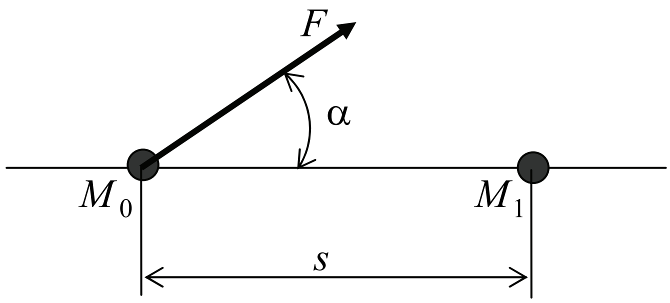


Рис. 4

Работой силы F на перемещении s называется скалярная величина, определяемая следующим соотношением:

$$W = Fs\cos\alpha.$$

Если работа силы положительна $W > 0$, то сила F называется движущей, а если отрицательна $W < 0$ – силой сопротивления.

Работа переменной силы. В случае движения под действием переменной силы всю траекторию мысленно разбивают на отдельные участки такой малой длины ds, что действующую на них силу можно считать постоянной. Тогда элементарная работа на перемещении ds будет равна:

$$dW = F \cdot ds.$$

Работа на конечном перемещении

$$W = \int_{S_0}^{S_1} F \cdot ds.$$

Работа силы тяжести. Работа силы тяжести не зависит от траектории движения тела и всегда равна произведению силы тяжести G на разность высот в исходном и конечном положениях

$$W = G(h_1 - h_2).$$

Работа силы упругости. При растяжении пружины силой F в ней возникает сила упругости

$$F_y = -cx,$$

где c – жесткость пружины; x – перемещение (удлинение).

Сила F_y направлена противоположно перемещению x свободного конца пружины, а по модулю равна силе F.

Работа, совершаемая силой упругости пружины при перемещении от x_1 до x_2, определяется по зависимости:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -cx \cdot dx = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

Мощность. Скалярная величина, характеризующая быстроту совершения работы, называется средней мощностью и определяется по формуле:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Учитывая, что работа $W = Fs\cos\beta$, получаем

$$P = \frac{Fs\cos\alpha}{t} = FV\cos\alpha.$$

Работа и мощность при вращательном движении

Если вращающий момент M постоянный, то работа определяется выражением

$$W = M\varphi.$$

Следовательно, работа при вращении тела равна произведению вращающего момента M на угол поворота φ .

Разделив обе части равенства на время действия момента t, получим

$$\frac{W}{t} = M\frac{\varphi}{t} \quad \text{или} \quad P = M\omega.$$

Мощность P при вращении тела равна произведению вращающего момента M на угловую скорость ω.

Примеры решения задач

Задача 1

Ненагруженную пружину, коэффициент жесткости которой $c = 100$ Н/м, растянули на 0,02 м. Определить работу силы упругости пружины.

Решение

Работа, совершаемая силой упругости пружины при перемещении от x_1 до x_2, определяется по зависимости: $W = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$. Учитывая, что $x_1 = 0$, получаем $W = -\frac{100}{2}0{,}02^2 = 0{,}02$ Дж.

Задача 2

На тело (рис. 5) действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3$. Определить работу этой силы при перемещении тела из положения с координатой $x = 0$ в положение с координатой $x = 1$ м.

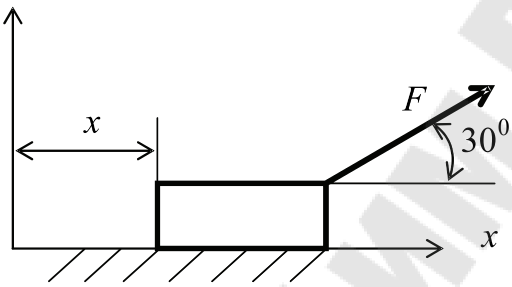


Рис. 5

Решение

Так как сила зависит от перемещения и наклонена к траектории движения под углом 30º, то работа силы будет равна

$$W = \int_0^1 F\cos 30^0 \cdot dx = \int_0^1 4x^3 \cos 30^0 \cdot dx = x^4 \cos 30^0 \Big|_0^1 = 0{,}866\,\text{Дж}.$$

Задача 3

Груз массой $m = 0{,}4$ кг (рис. 6) подвешен на нити длиной $l = 1\,\text{м}$. Какую работу совершает сила тяжести груза при перемещении его в вертикальной плоскости из положения *2* в положение *1*.

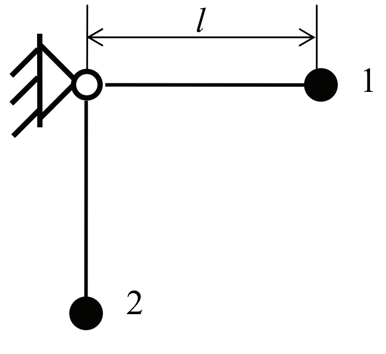


Рис. 6

Решение

Работа силы тяжести равна $W = G(h_1 - h_2)$. Учитывая, что для рассматриваемого случая $h_1 = 0;\ h_2 = l;\ G = mg$, получаем

$$W = -Gh_2 = -mgl = -0{,}4 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = -3{,}92 \text{ Дж.}$$

Задача 4

На точку кривошипа (рис. 7), который вращается вокруг горизонтальной оси O, действует в вертикальной плоскости сила $F = 100$ Н. Определить мощность силы $\vec{F}$, если скорость $\vec{V}_A$ точки A равна 4 м/с.

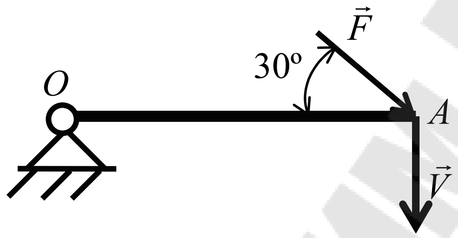


Рис. 7

Решение

Учитывая, что мощность силы определяется по зависимости $P = FV\cos\alpha$, получаем $P = 100 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 200$ Вт.

Задачи к зачету

1. Материальная точка M массой m (рис. 8) движется прямолинейно по горизонтальной плоскости по закону $S = t^4$ под действием силы $F = 12t^2$. Определить работу этой силы при перемещении ее точки приложения из начального положения, где $S = 0$, в положение $S = 4$ м. (Ответ: 64).

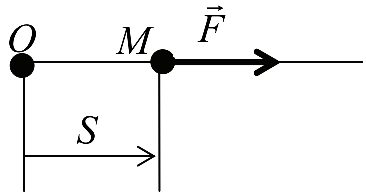


Рис. 8

2. Тело массой $m = 0{,}1$ кг подвешено к концу нерастянутой пружины (рис. 9) и отпущено без начальной скорости. Определить работу

силы тяжести за первую половину периода колебаний, если коэффициент жесткости пружины $c = 50$ Н/м. (Ответ: $9{,}62 \cdot 10^{-3}$).

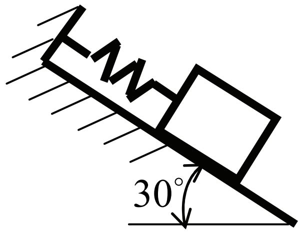


Рис. 9

Цилиндр (рис. 10), масса которого $m = 1$ кг, радиус $r = 0{,}173$ м. Катится без скольжения. Определить суммарную работу силы тяжести и силы сопротивления качению, если ось цилиндра переместилась на расстояние $S = 1$ м и коэффициент трения качения $\delta = 0{,}01$ м. (Ответ: 4,41).

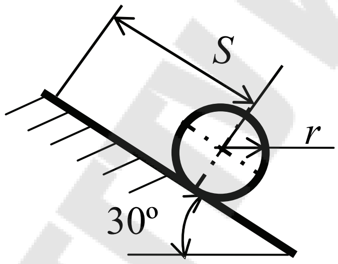


Рис. 10

4. На поршень гидроцилиндра (рис. 11) действует давление масла $p = 10$ Н/мм^2. Диаметр поршня $D = 100$ мм, его скорость $V = 0{,}2$ м/с. Определить в кВт мощность силы давления масла. (Ответ: 15,7).

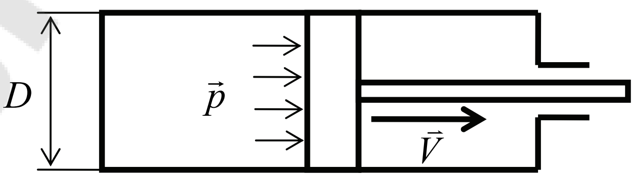


Рис. 11

Импульс силы. Любое взаимодействие тел, приводящее к какому-либо изменению движения, длится в течение некоторого промежутка времени. Векторная мера действия силы, равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия $\vec{F} \cdot dt$, называется элементарным импульсом силы $d\vec{S}$. Импульс силы за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ получим, просуммировав элементарные импульсы

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt \text{ или } \vec{S} = \vec{F} \cdot \Delta t \text{, если } \vec{F} = \text{const.}$$

Проекции вектора $\vec{S}$ на координатные оси имеют вид:

$$S_x = F_x \cdot \Delta t; \quad S_y = F_y \cdot \Delta t; \quad S_z = F_z \cdot \Delta t.$$

Количество движения. Векторная мера механического движения точки, равная произведению массы m на ее скорость $\vec{V}$ в данный момент времени, называется количеством движения $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = m\vec{V}.$$

Проекции вектора $\vec{Q}$ на координатные оси имеют вид:

$$Q_x = mV_x = m\frac{dx}{dt}; \quad Q_y = mV_y = m\frac{dy}{dt}; \quad Q_z = mV_z = m\frac{dz}{dt}.$$

Кинетическая энергия. Скалярная мера механического движения точки, равная половине произведения массы m на квадрат ее скорости V, называется кинетической энергией T

$$T = \frac{1}{2}mV^2.$$

Теорема об изменении количества движения точки. Изменение количества движения точки равно импульсу всех сил.

$$m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{R} \cdot \Delta t.$$

Спроектировав векторное уравнение на оси координат, получим систему трех скалярных уравнений

$$R_x \cdot \Delta t = mV_{2x} - mV_{1x};$$
$$R_y \cdot \Delta t = mV_{2y} - mV_{1y};$$
$$R_z \cdot \Delta t = mV_{2z} - mV_{1z}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии точки равно сумме работ действующих сил.

$$T_2 - T_1 = \Sigma W .$$

Примеры решения задач

Задача 1

Материальная точка массой 0,5 кг движется по прямой. Определить модуль импульса равнодействующих всех сил, действующих на точку за первые 2 с, если она движется по закону $S = 4t^3$.

Решение

На основании теоремы об изменении количества движения точки имеем: $mV_2 - mV_1 = R \cdot \Delta t$, откуда $R = \dfrac{mV_2 - mV_1}{\Delta t}$. В соответствии с законом движения $V = \dfrac{dS}{dt} = 12t^2$. В этом случае $V_1 = 0$; $V_2 = 12 \cdot 2^2 = 48$ м/с. Окончательно получаем

$$R = \frac{mV_2 - mV_1}{\Delta t} = \frac{0{,}5 \cdot 48 - 0{,}5 \cdot 0}{2} = 12 \text{ Н}.$$

Задача 2

На материальную точку массой 2 кг действует сила постоянного направления, значение которой изменяется по закону $F = 6t^2$. Определить скорость этой точки в момент времени $t = 2\,\text{с}$, если начальная скорость точки $V_0 = 2$ м/с.

Решение

На основании теорема об изменении количества движения точки имеем:

$$mV - mV_0 = \int_0^2 F \cdot dt = \int_0^2 6t^2 \cdot dt = 2t^3 \Big|_0^2 = 16,$$

откуда $V = \dfrac{16}{m} + V_0 = \dfrac{16}{2} + 2 = 10$ м/с.

Задача 3

Материальная точка массой $m = 0{,}5$ кг брошена с поверхности земли (рис. 12) с начальной скоростью $V_0 = 20$ м/с и положении M

имеет скорость $V = 12$ м/с. Определить работу силы тяжести при перемещении точки из положения M_0 в положение M.

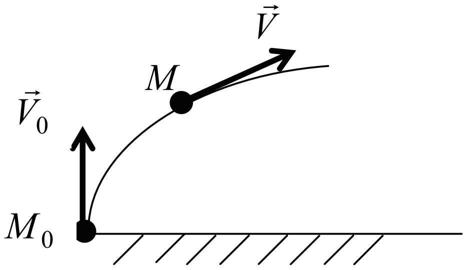


Рис. 12

Решение

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки работа силы тяжести будет равна

$$W_G = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 12^2}{2} - \frac{0{,}5 \cdot 20^2}{2} = -64 \text{ Дж.}$$

Задачи к зачету

1. На материальную точку массой 1 кг действует сила постоянного направления, значение которой изменяется по закону $F = 5\cos \pi t$. Определить скорость этой точки в момент времени $t = 0{,}5$ с, если начальная скорость точки $V_0 = 1{,}5$ м/с. (Ответ: 3,09).

2. Материальная точка массой 1 кг движется по прямой под действием постоянной силы $\vec{F}$. Скорость точки за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_2 = 3$ с, $t_1 = 0$, изменилась от $V_0 = 2$ м/с до $V = 5$ м/с. Определить модуль силы $\vec{F}$. (Ответ: 1).

3. Материальная точка массой m брошена с поверхности земли под углом $\alpha = 60^{\circ}$ к горизонту (рис. 13) с начальной скоростью $V_0 = 30$ м/с. Определить наибольшую высоту h подъема точки. (Ответ: 34,4).

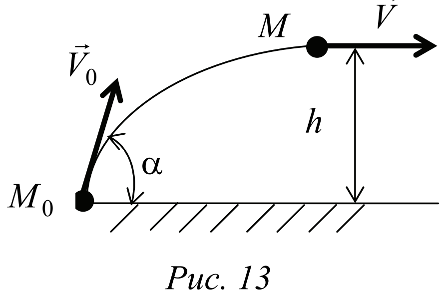


Рис. 13

3. Раздел механики материалов

3.1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при плоском изгибе

При расчете балок на прочность необходимо знать характер изменения изгибающего момента и поперечной силы вдоль оси балки и знать положение опасного сечения. С этой целью строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила Q_y в сечении численно равна алгебраической сумме всех внешних сил справа или слева от сечения.

Изгибающий момент M_x в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил справа или слева от сечения.

Если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения, то поперечная сила положительна (рис. 14).

Рис. 14

Изгибающий момент будет положительным, если при действии момента внешних сил балка искривляется выпуклостью вниз (рис. 15).

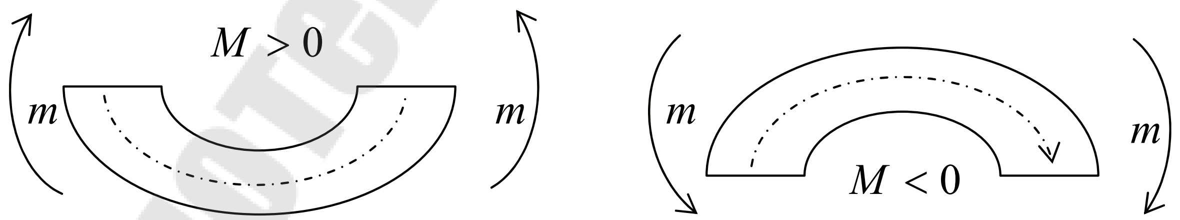


Рис. 15

Пример решения задачи

Пусть на балку действует внешний изгибающий момент $m = 6$ кН $\cdot$ м и внешняя сила $F = 12$ кН, $l = 1$ м. Определим реакции в опорах A и B. Составим уравнения равновесия моментов всех внешних сил относительно опор A и B

$$\sum M_A = 0; \quad - F \cdot l + m + R_B \cdot 3l = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad - R_A \cdot 3l + F \cdot 2l + m = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{F \cdot l - m}{3l} = \frac{12 \cdot 1 - 6}{3 \cdot 1} = 2 \text{ кН}; \; R_A = \frac{F \cdot 2l + m}{3l} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 6}{3 \cdot 1} = 10 \text{ кН}.$$

Проведем сечения на каждом характерном участке и определим значения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x.

В сечении 1

$Q_{y1} = R_A$; $M_{x1} = R_A z_1$, где $0 \le z_1 \le l$.

При $z_1 = 0$ м; $Q_{y1} = 10$ кН; $M_{x1} = 10 \cdot 0 = 0$ кН $\cdot$ м;

при $z_1 = l = 1$ м; $Q_{y1} = 10$ кН; $M_{x1} = 10 \cdot 1 = 10$ кН $\cdot$ м.

В сечении 2

$Q_{y2} = R_A - F$; $M_{x2} = R_A(l + z_2) - Fz_2$, где $0 \le z_2 \le l$.

При $z_2 = 0$ м, $Q_{y2} = 10 - 12 = -2$ кН; $M_{x2} = 10 \cdot 1 = 10$ кН $\cdot$ м;

при $z_2 = l = 1$ м; $Q_{y2} = -2$ кН; $M_{x2} = 10(1 + 1) - 12 \cdot 1 = 8$ кН $\cdot$ м.

В сечении 3

$Q_{y3} = -R_B$; $M_{x3} = R_B z_3$; $0 \le z_3 \le l$.

При $z_3 = 0$ м; $Q_{y3} = -R_B = -2$ кН; $M_{x3} = 2 \cdot 0 = 0$ кН $\cdot$ м;

при $z_3 = l = 1$ м; $Q_{y3} = -2$ кН; $M_{x3} = 2 \cdot 1 = 2$ кН $\cdot$ м.

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 16)

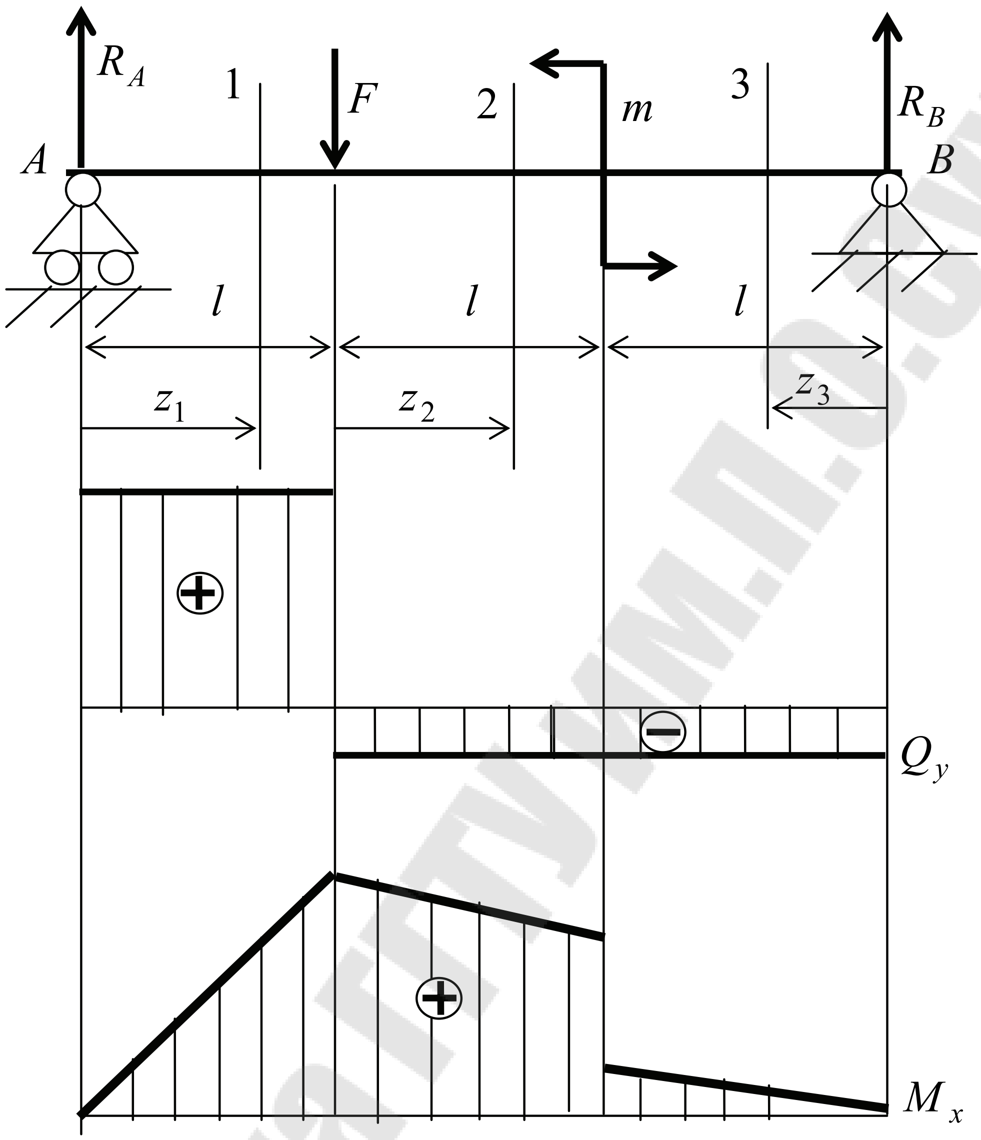


Рис. 16

Задачи к зачету

Отличие задач на построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 17) заключается лишь в точках приложения сосредоточенной силы F и сосредоточенного изгибающего момента m.

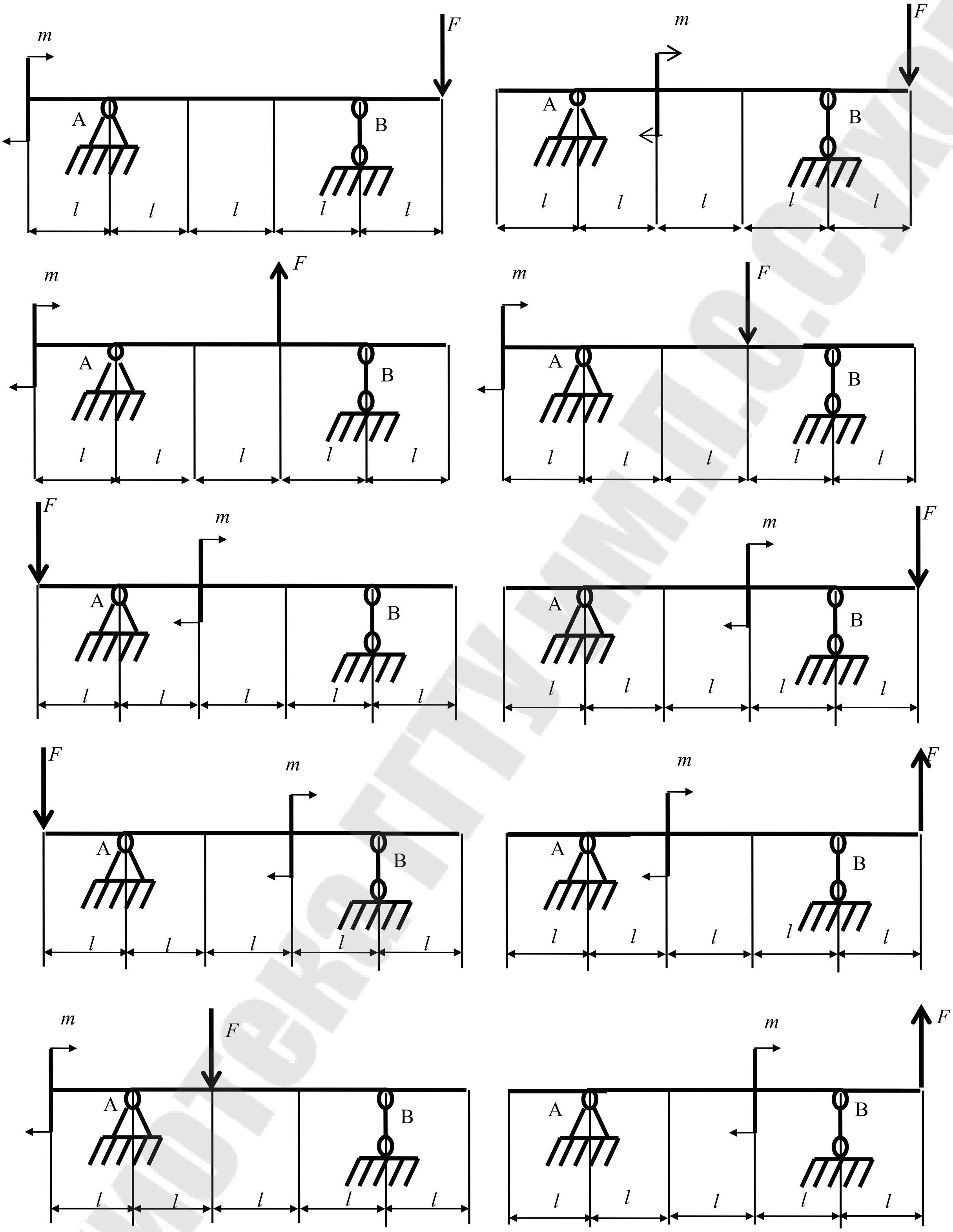

m
F
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l
F
m
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l
F
m
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l
m
F
A
B
l l l l l

Рис. 17

4. Раздел деталей машин

4.1. Шпоночные соединения

Соединение двух соосных цилиндрических деталей (вала и ступицы) для передачи вращающего движения между ними осуществляется с помощью шпонки – специальной детали, закладываемой в пазы соединяемых вала и ступицы.

Наиболее распространены соединения призматической шпонкой (рис. 18).

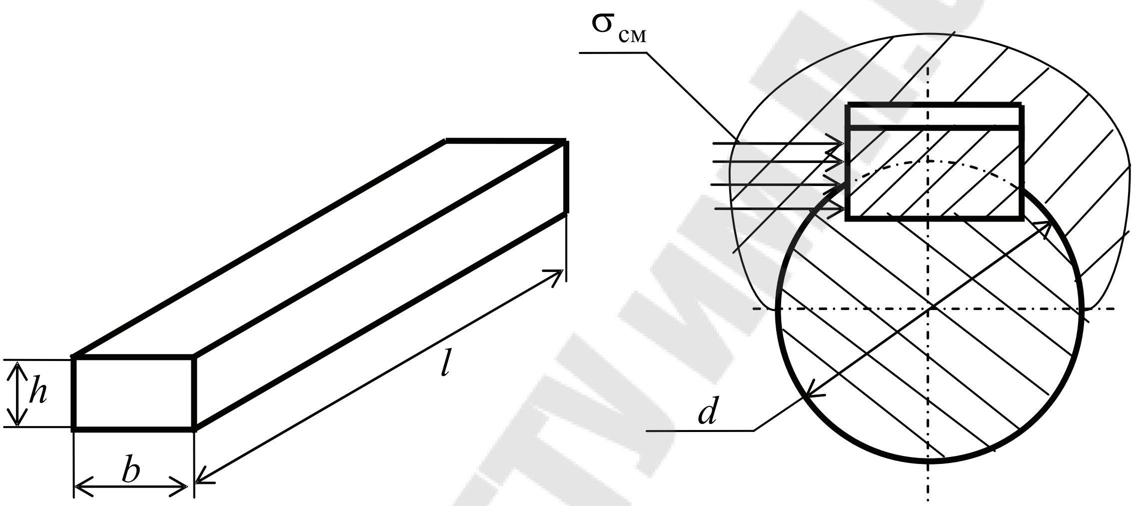


Рис. 18

Условие прочности на смятие в этом случае будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{dl_{\text{р}}(h - t_1)} \le [\sigma_{\text{см}}],$$

где T – вращающий момент, передаваемый валом; d – диаметр вала; h – высота шпонки; t_1 – глубина шпоночного паза в валу; $l_{\text{р}}$ – рабочая длина шпонки.

Пример решения задачи

Задача 1

Определить напряжения смятия $\sigma_{\text{см}}$ у соединения призматической шпонкой (рис. 19), передающего вращающий момент $T = 600$ Н·м, если диаметр вала $d = 40$ мм, рабочая длина шпонки $l_p = 80$ мм, размеры шпонки $b \times h = 12 \times 8$ мм, а глубина паза в валу $t_1 = 5$ мм.

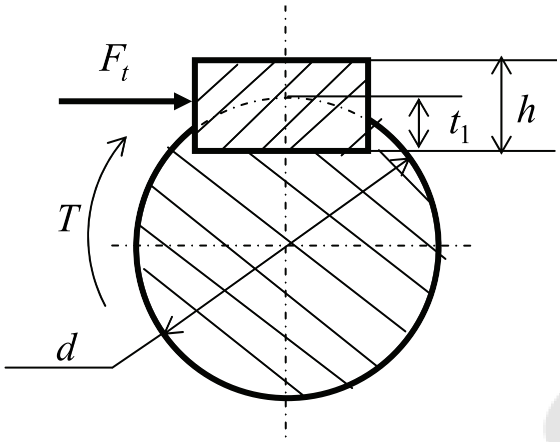


Рис. 19

Решение

Напряжения смятия у соединения призматической шпонкой определяем по зависимости:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{dl_{\text{р}}(h - t_1)} = \frac{2 \cdot 600 \cdot 10^3}{40 \cdot 80 \cdot (8 - 5)} = 125 \text{ МПа}.$$

Задачи к зачету

1. Определить допустимый вращающий момент T у соединения призматической шпонкой (рис. 19), если диаметр вала $d = 35$ мм, размеры шпонки $b \times h = 10 \times 8$ мм, глубина паза в валу $t_1 = 5$ мм, рабочая длина шпонки $l_p = 60$ мм, а допустимое напряжение на смятие $[\sigma_{\text{см}}] = 150$ МПа.

2. Определить рабочую длину шпонки l_p у соединения призматической шпонкой (рис. 19), если допустимое напряжение на смятие $[\sigma_{\text{см}}] = 100$ МПа, вращающий момент $T = 400$ Н $\cdot$ м, размеры шпонки $b \times h = 10 \times 8$ мм, диаметр вала $d = 35$ мм и глубина паза в валу $t_1 = 5$ мм.

4.2. Резьбовые соединения

Расчет стержня болта на прочность, когда известна сила, действующая на болт, производится по одной из следующих формул:

1. На болт действует осевая сила (рис. 20) $d_1 \geq \sqrt{\dfrac{4F}{\pi[\sigma_{\text{р}}]}}$.

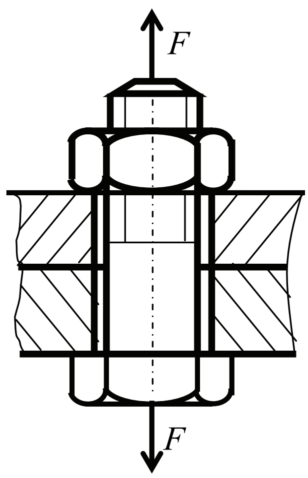


Рис. 20

2. На болт действует сила, направленная перпендикулярно оси болта.

а) болт поставлен без зазора (рис. 21) $d \geq \sqrt{\dfrac{4F}{\pi[\tau_{\text{ср}}]}}$;

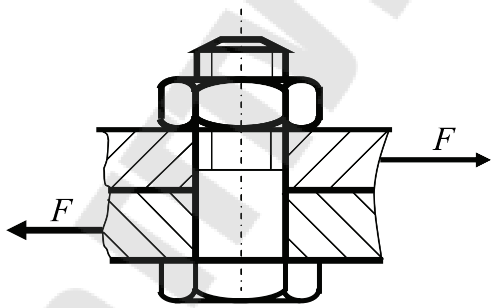


Рис. 21

б) болт поставлен с зазором (рис. 22) $d_1 \geq \sqrt{\dfrac{4 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}2F}{\pi f [\sigma_{\text{р}}]}}$.

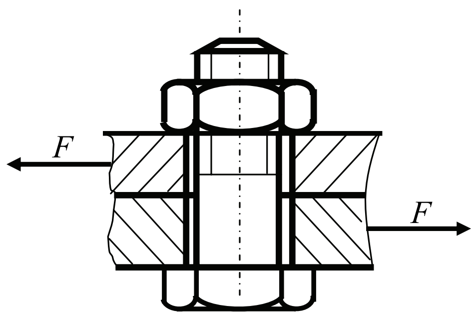


Рис. 22

Задачи к зачету

1. На болт с резьбой М20 действует осевая сила F (рис. 20). Определить максимальное значение силы F, если допускаемое напряжение на разрыв материала болта $[\sigma_{\text{р}}] = 100$ МПа, внутренний диаметр резьбы $d_1 = 17{,}294$ мм.

2. На болт действует сила $F = 20$ кН, направленная перпендикулярно оси болта (рис. 22). Определить напряжения в сечении болта, если болт поставлен с зазором, внутренний диаметр резьбы $d_1 = 31{,}670$ мм (М36), а коэффициент трения $f = 0{,}15$.

3. На болт, установленный без зазора, действует сила $F = 50$ кН, направленная перпендикулярно оси болта (рис. 21). Определить требуемый диаметр болта, если допускаемое напряжение на срез $[\tau_{\text{ср}}] = 50$ МПа.

4.3. Сварные соединения

В зависимости от расположения деталей различают стыковое (рис. 23, *а*), нахлесточное (рис. 23, *б*) и тавровое (рис. 23, *в*) соединение.

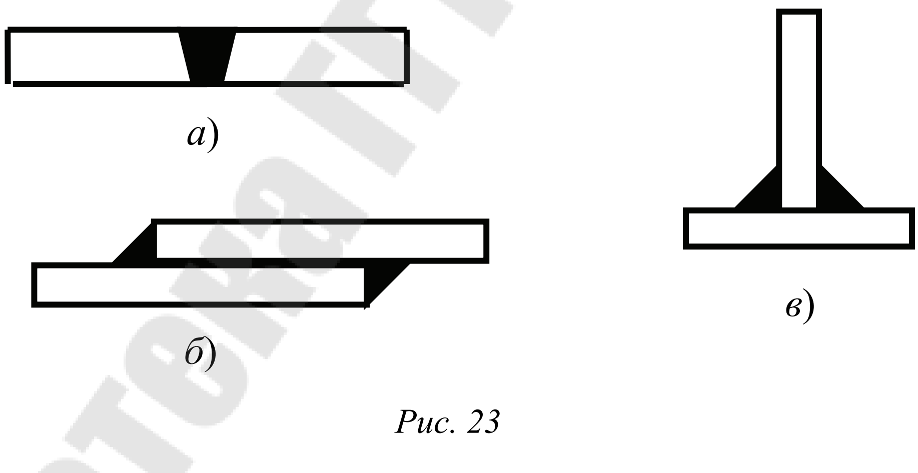


Рис. 23

Стыковые соединения выполняются стыковым швом и рассчитываются на разрыв.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma'_{\text{р}} = \frac{F}{\delta b} \le [\sigma'_{\text{р}}],$$

где δ – толщина соединяемых деталей; b – ширина соединяемых деталей; $[\sigma'_{\text{р}}]$ – допускаемое напряжение для сварного шва.

Нахлесточные соединения выполняются угловыми швами и рассчитываются на срез. Срез происходит по биссекторной плоскости.

При действии на соединение силы F условие прочности имеет вид

$$\tau'_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0{,}7k \cdot l_{\text{шв}}} \le [\tau'_{\text{ср}}],$$

где k – катет сварного шва; $l_{\text{шв}}$ – длина сварного шва.

Тавровые сварные соединения в основном выполняются угловыми швами и рассчитываются на срез по биссекторной плоскости.

При действии на тавровое сварное соединение силы F условие прочности сварного шва имеет вид:

$$\tau'_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0{,}7k \cdot l_{\text{шв}}} \le [\tau'_{\text{ср}}].$$

Задачи к зачету

1. На сварное стыковое соединение (рис. 24) действует сила $F = 10$ кН. Определить требуемую длину сварного шва, если толщина $\delta = 8$ мм, допускаемое напряжение на разрыв для сварного шва $[\sigma'_{\text{р}}] = 234$ МПа.

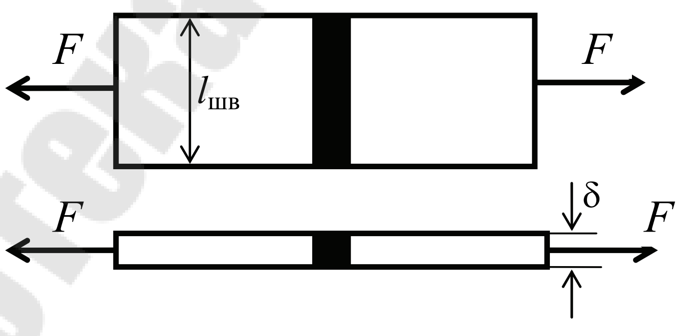


Рис. 24

2. На нахлесточное сварное соединение (рис. 25) действует сила F. Определить ее максимальное значение, если катет шва $k = 8$ мм, допускаемое напряжение на срез для сварного шва $[\tau'_{\text{ср}}] = 150$ МПа, длина шва $l_{\text{шв}} = 200$ мм.

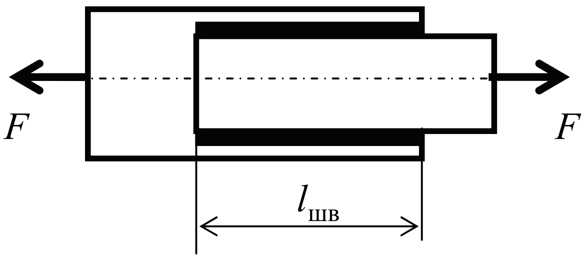


Рис. 25

3. На сварное тавровое соединение (рис. 26) действует сила $F = 20$ кН. Определить требуемую высоту h кронштейна, если катет шва $k = 5$ мм, допускаемое напряжение на срез сварного шва $\left[\tau'_{ср}\right] = 120$ МПа.

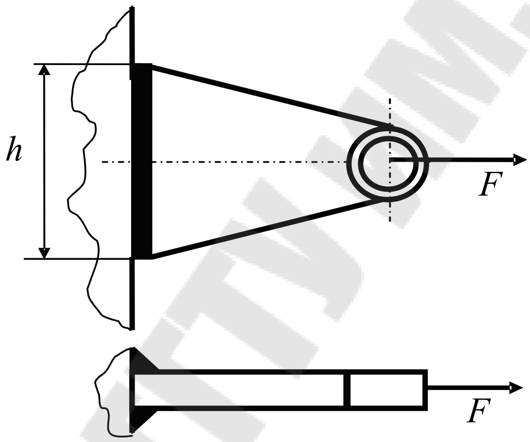
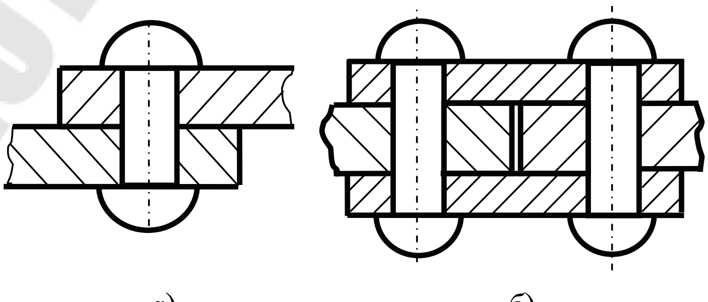


Рис. 26

4.4. Заклепочные соединения

В зависимости от расположения соединяемых деталей различают заклепочные швы внахлестку (рис. 27, *а*) и встык с одной накладкой и двумя накладками (рис. 27, *б*).



а) *б*)

Рис. 27

Условие прочности на срез заклепки при соединении внахлестку (рис. 28)

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{\frac{\pi d_0^2}{4} iz} \le \left[\tau_{\text{ср}}\right],$$

по условию смятия

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d_0 s_{\min} z} \le \left[\sigma_{\text{см}}\right].$$

где d_0 – диаметр отверстия; i – число плоскостей среза; z – число заклепок в заклепочном шве; b – ширина соединяемой детали.

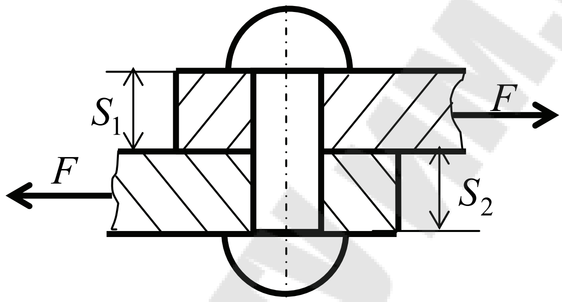


Рис. 28

Условие прочности детали на разрыв в ослабленном сечении

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{F}{s_{\min}(b - d_0 z)} \le \left[\sigma_{\text{р}}\right],$$

где b – ширина соединяемой детали.

Для стыкового соединения условия прочности на срез и смятия рассчитываются по тем же формулам, однако число заклепок берется до стыка.

Задачи к зачету

1. Для заклепочного соединения (рис. 28) определить необходимое число заклепок z из условия прочности на срез, если сила $F = 20$ кН, а диаметр отверстия под заклепку $d_0 = 11$ мм допустимое напряжения на срез $\left[\tau_{\text{ср}}\right] = 96$ МПа.

2. Определить минимальную толщину листа для заклепочного соединения (рис. 28) из условия прочности на смятие, если сила

$F = 50$ кН, а диаметр отверстия под заклепку $d_0 = 11$ мм, допустимое напряжения на смятие $[\sigma_{см}] = 320$ МПа, число заклепок $z = 3$.

3. Для заклепочного соединения (рис. 29) определить напряжения среза, если сила $F = 40$ кН, диаметр под заклепку $d_0 = 11$ мм, общее число заклепок $z = 10$.

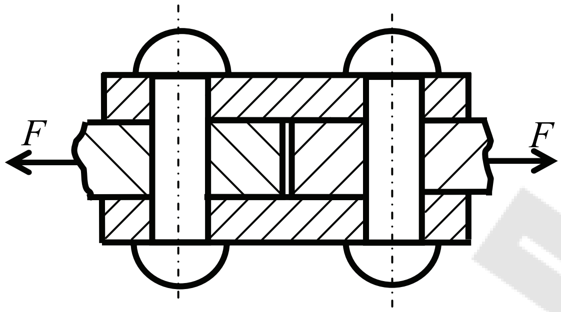


Рис. 29

Литература

1. Прикладная механика : учеб. пособие / А. Т. Скойбеда [и др.] ; под общ. ред. А. Т. Скойбеды. – Минск : Выш. шк., 1997. – 552 с.

2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Машиностроение, 1979. – 560 с.

3. Сборник коротких задач по теоретической механике : учеб. пособие для втузов / под ред. О. Э. Кепе. – Москва : Высш. шк., 1989. – 368 с.

4. Аркуша, А. И. Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов : учеб. для машиностр. специальностей техникумов / А. И. Аркуша. – 2-е изд., доп. – Москва : Высш. шк., 1989. – 352 с.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Бельский Алексей Тимофеевич
Тариков Георгий Петрович

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Пособие для самостоятельной подготовки к зачету по одноименному курсу для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. И. Жукова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 02.06.09.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 1,78.
Изд. № 36.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.