УДК 681.3.06: 624.13

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

К. С. Курочка

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Беларусь

Многие материалы обладают способностью медленно деформироваться во времени при постоянных напряжениях и температурах. Поэтому для наиболее адекватного моделирования конструкций, деталей машин и узлов необходимо учитывать данные свойства.

В данной работе предлагаются алгоритм и методика решения плоской краевой задачи теории вязкоупругости методом конечных элементов (МКЭ). При этом принимается гипотеза об упругости объёмных деформаций, а материал считается несжимаемым. Тогда между деформациями $\{\varepsilon\}$ и напряжениями $\{\sigma\}$ справедливы следующие соотношения:

$$\{\sigma\} = E[E_0]\{\varepsilon\} - \Gamma_c[E_0]\{\varepsilon\}, \tag{1}$$

где $[E_0]$ – матрица упругости в законе Гука в обратной форме; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; Γ_c – оператор сдвиговой релаксации, для деформаций ε_x будет иметь вид:

$$\Gamma_c = \int_0^t \Gamma_c(t, t_0) \mathrm{e}_x(t_0) dt_0 \ , \tag{2}$$

где $\Gamma_c(t, t_0)$ – ядро сдвиговой релаксации.

Разобьём отрезок времени $[0,\ t]$ на k равных отрезков длиной Δt, представим интеграл (2) в виде суммы интегралов на отрезках $[t_{i-1}, t_i]$ и воспользуемся теоремой о среднем:

$$\Gamma_c = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Gamma_c(t, t_0) \varepsilon_x(t_0) dt_0 = \sum_{i=1}^{k} \Gamma_c(t, \xi_i) \varepsilon_x(\xi_i) \Delta t \approx \sum_{i=1}^{k} \Gamma_c(t, t_{i-1}) \varepsilon_x(t_{i-1}) \Delta t \ , \tag{3}$$

где $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Воспользовавшись принципом возможных перемещений, зависимостями МКЭ между перемещениями и деформациями, соотношениями (1) и (3), после ряда преобразований, получим:

$$[K]\{g_i\} = \{R_i\}, \tag{4}$$

где S – площадь конечного элемента; $[B]$ – дифференциальная матрица. Получаемая на основании формул Коши, $[K] = S[B]^T E[E_0][B]$ – матрица жёсткости; $\{g_i\}$, $\{R_i\}$ – соответственно вектора узловых перемещений и сил для i-го интервала времени:

$$\{R_i\} = \{R_{i-1}\} + \Delta t S[B]^T [E_0] \sum_{i=1}^{k} \Gamma_c(t, t_{i-1})[B]\{g_{i-1}\}.$$

Система линейных алгебраических уравнений (4) представляет собой основное уравнение МКЭ. Решая данную систему, получим деформации и напряжения, возникающие в вязкоупругом теле в любой момент времени от действия постоянной внешней нагрузки.

Согласно изложенного алгоритма было разработано программное обеспечение, проведена его верификация. С помощью созданного программного обеспечения было проведено моделирование напряжённо-деформированного состояния систем, состоящих из линейноупругих и вязкоупругих тел.