

КЛЮЧЕВЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ БАЛОЧНЫХ СХЕМ

М. М. Бибик

*Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого, Беларусь*

Научный руководитель С. А. Орлов

Введение. Возникновение метода конечных элементов (МКЭ) связано с решением задач космических исследований (идея МКЭ была разработана советскими учеными еще в 1936 г., но из-за неразвитости вычислительной техники метод не получил развития) в 1950 г. Этот метод возник из строительной механики и теории упругости, и уже потом был осмыслен математиками, которые часто называют данный метод вариационно-разностным, подчеркивая тем самым его математическую природу. Они занимаются математическим обоснованием МКЭ, т. е. проводят теоретический анализ его сходимости и точности результатов. Существенный толчок в своем развитии МКЭ получил после того, как в 1963 г. было доказано, что этот метод можно рассматривать как один из вариантов известного в строительной механике метода Рэлея–Ритца, который путем минимизации потенциальной энергии позволяет свести задачу к системе линейных уравнений равновесия.

К сегодняшнему дню метод реализован в виде мощных промышленных систем автоматизированного проектирования, сопровождающих весь так называемый жизненный цикл изделия: от первого эскиза до программ для управления технологическим процессом изготовления. Трудно назвать отрасль промышленности, где бы ни применялся метод конечных элементов. Строительная механика, тепловые расчеты в машиностроении и строительстве, гидро- и газодинамика – традиционные сферы применения МКЭ. Однако отметим одну особенность, о которой высказался один из основоположников самого метода О. Зенкевич так: «Представители инженерного направления решают довольно сложные технические задачи, часто не задумываясь над строгим обоснованием применяемых ими приемов, а построенные алгоритмы и программы проверяют на известных точных решениях».

Цель работы. Поставим цель выявить на балочных схемах принципиальные особенности: преимущества и недостатки метода конечных элементов МКЭ с позиций классических принципов механики материалов на простейших балочных схемах.

Как известно, МКЭ представляет собой метод перемещений механики материалов, когда речь идет о стержневых системах и необходимо получить точное решение. С другой стороны, МКЭ базируется на методе Рэлея-Ритца для приближенных расчетов трехмерных тел и конструкций, когда точное решение получить невозмож-

но в принципе, или весьма затруднительно. Эта последняя проблема типична для физики вообще и состоит в удовлетворении дифференциальным уравнениям, не интегрируемым в квадратурах.

Приведем ключевые особенности метода Рэля–Ритца, поскольку целью исследования является рассмотрение именно этого аспекта МКЭ с той лишь разницей, что в методе конечных элементов область решения задачи разбивается не на одну характерную структурную составляющую, а на множество таковых с целью частичного удовлетворения граничных и краевых условий.

Ключевые особенности метода Рэля–Ритца:

- Угадывание функции формы. Предположим, что мы имеем дело с конструкцией, где число степеней свободы бесконечно велико. В этом случае можно было бы аппроксимировать истинную форму конструкции при помощи выбранной деформированной формы. Такая деформированная форма характеризуется *функцией формы*, содержащей один или несколько неизвестных *параметров перемещения*.

- Формирование потенциальной энергии системы. Дифференцируя последнюю, получаем систему уравнений, содержащую в качестве неизвестных величин параметры перемещений; уравнений будет столько же, сколько и неизвестных параметров, и, следовательно, решив данные уравнения, можно найти параметры. Если известны параметры перемещений, то это означает, что выбранная деформированная форма установлена.

- Чем точнее выбрана функция формы, тем лучше будут результаты вычислений.

- Принципиальный недостаток: дифференцирование найденных функций перемещений неизбежно приводит к ошибкам ввиду естественных разрывов в месте стыков кусочно определенного решения.

- Принципиальное преимущество: поскольку метод Рэля–Ритца основывается на принципе стационарности потенциальной энергии, его можно применять к конструкциям как с линейным, так и с нелинейным поведением. Иначе метод универсален.

Постановка задачи. Исследуем тестовую сходимость приближенного решения для балочной схемы рис. 1. Для этого, к примеру, рассмотрим стальную балку, нагруженную на всем участке распределенной нагрузкой $q = 10$ кН и центральной сосредоточенной силой $F = 10$ кН с моментом инерции сечения $I_x = 200 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Точное решение механики материалов [1] представлено на рис. 1¹.

Далее, с другой стороны, в качестве функции формы примем полином с текущей степенью $n = 1 \dots 20$ и исследуем сходимость приближенных решений по методу Рэля–Ритца. На рис. 2 показана практическая сходимость прогиба исследуемой балки. Как видно из рис. 2 увеличение степени полинома $n = 1 \dots 20$ приводит к очень быстрой сходимости прогиба, и результат практически соответствует точному решению механики материалов. Чтобы получить поперечные силы и изгибающие моменты в балке следует продифференцировать функцию прогиба три и два раза соответственно. Результаты приведены на рис. 3 и 4. Здесь мы наблюдаем обратное: приближение к точному решению наблюдается лишь в средней части балки, при удалении от центра решение менее точное, а непосредственно по краям сходимость неудовлетворительна, то есть результат вовсе не соответствует точному решению.

¹ Решение сгенерировано комплектом инструментов Mechanics of Materials™ for Maple™.

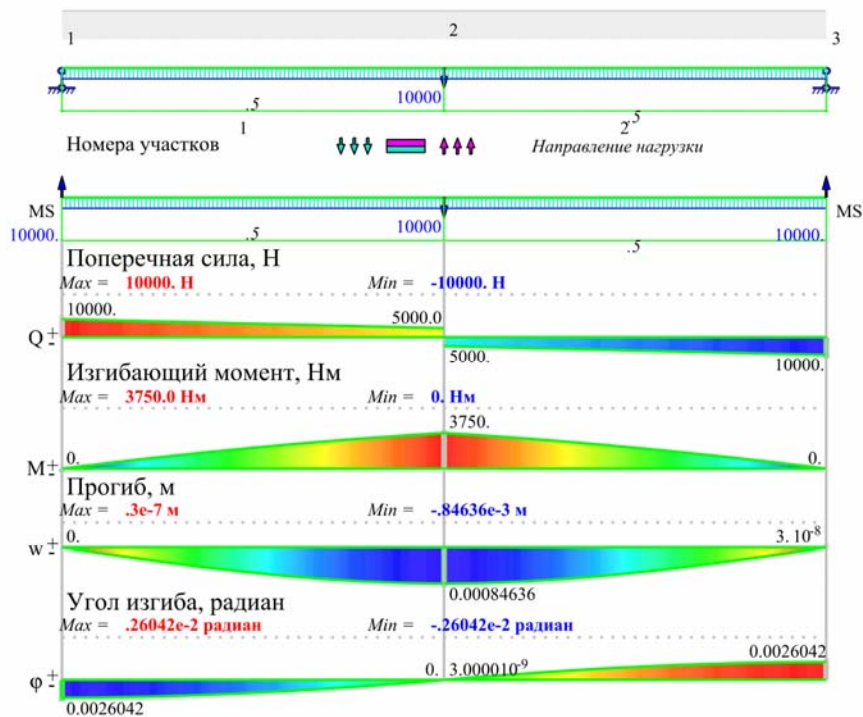


Рис. 1. Точное решение механики материалов для балочной схемы

Указанная особенность является неустранимой проблемой как метода Рэлея-Ритца, так и метода конечных элементов в целом. Она связана с невозможностью избавиться от разрывов в производных слева и справа от узловых граничных точек дискретизации конструкции. Частично эта проблема может быть решена рассмотрением точных аппроксимирующих функций на структурном элементе разбиения [2].

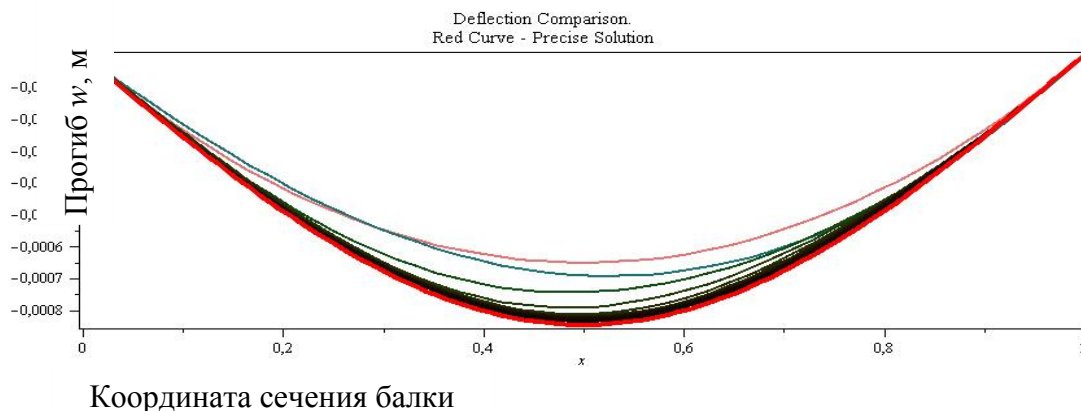


Рис. 2. Сходимость прогибов балки с увеличением порядка приближающего полинома. Красная кривая – точное решение механики материалов

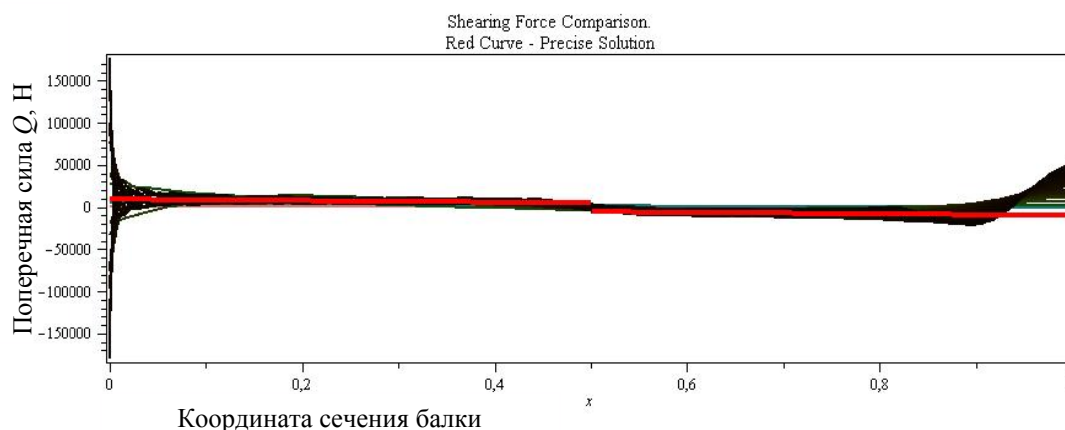


Рис. 3. Сходимость поперечных сил по длине балки.
Красная кривая – точное решение механики материалов

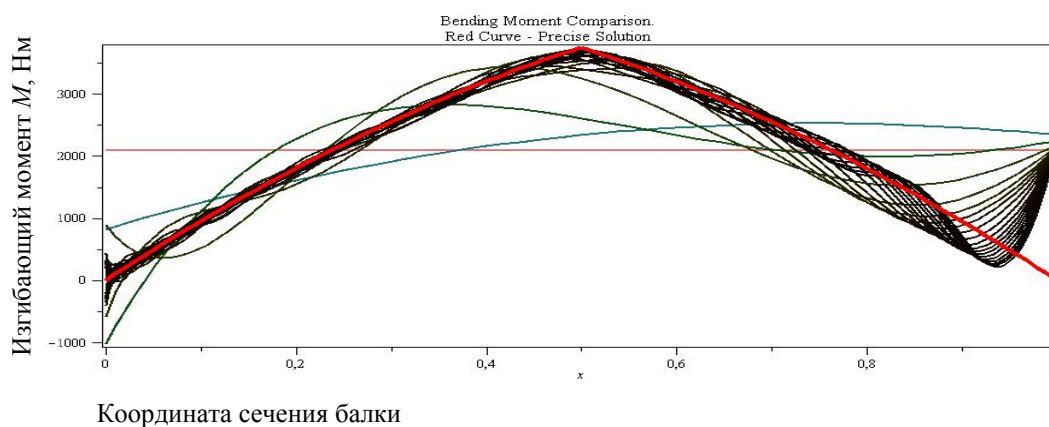


Рис. 4. Сходимость изгибающих моментов. Красная кривая – точное решение механики материалов

Заключение. Метод конечных элементов надежен в отношении перемещений системы и универсален в постановках и алгоритмах решения задач. Метод отлично адаптируется к матричному исчислению – удобен к реализации на персональном компьютере. К недостаткам МКЭ следует отнести принципиальные трудности численных методов: дифференцирование кусочных функций неизбежно приводит к ошибкам на границах решения. Существенно то, что производные перемещений определяют внутренние факторы, а значит – напряжения.

Литература

1. Тимошенко, С. П. Механика материалов : учеб. для вузов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. – Лань, 2002. – 672 с.
2. Орлов, С. А. Новый метод расчета в механике стержневых систем / С. А. Орлов // Вестн. БелГУТа. – 2004. – № 2(9). – С. 29–34.