МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ В СОВРЕМЕННОМ УНИВЕРСИТЕТСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

О. Н. Шабловский

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», кафедра «Техническая механика»

Достижения современного анализа нелинейных систем привели к тому, что стало формироваться некоторое общее представление о динамике различных процессов независимо от той области науки, к которой они имеют отношение. Возникли общие понятия, обладающие универсальностью, появилась возможность классификации типов решений в разнообразных физических ситуациях. Литература по нелинейной динамике и математическому моделированию весьма обширна. Ограничимся здесь ссылками на работы [1]–[5].

В докладе представлены методологические аспекты нелинейной динамики систем, которые применяются нами в учебном процессе и научной работе со студентами старших курсов, магистрантами и аспирантами технического университета. Речь идет прежде всего о специалистах по гидродинамике, газовой динамике, теплоэнергетике, экологии, технологической теплофизике и материаловедению. Сформулируем основные положения доклада.

1. *Системой* называется структура, определяемая аксиомами: 1) для системы определено пространство состояний Е и параметрическое пространство М, в котором определено ее поведение; 2) пространство состояний Е содержит собственное подмножество (число элементов Е не менее двух); 3) система обладает свойством функциональной целостности. Понятие целостности тесно связано с понятием цели функционирования.

Иерархия процесса исследования: цель функционирования системы; аксиоматика системы; математическая модель системы; формализм исследования математической модели; алгоритмизация математической модели; свойства системы. Вместе с пространствами {Е, М} часто задают пространство выходов системы У, элементы которого могут характеризовать цель функционирования системы. Набор аксиом, определяющих систему, характеризует наиболее общий класс систем, поэтому в конкретных исследованиях необходимо вводить дополнительные аксиомы, выделяющие из общего класса изучаемый подкласс систем. Например, математической моделью гидродинамики вообще являются уравнения Навье-Стокса, а моделью конкретных задач – соответствующие задачи математической физики.

2. Понятие *динамической системы* возникло как обобщение понятия механической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями Ньютона. Основной подход, который позволяет изучить динамику системы с исчерпывающей полнотой, состоит в следующем. Математическая модель динамической системы S основывается на понятии состояния x, под которым понимается описание системы S в некоторый момент времени, и на понятии оператора T, определяющего изменение этого состояния x во времени.

Большинство моделей в науке и технике, в живой и неживой природе, в естественных и гуманитарных науках являются нелинейными. Наибольший интерес представляют нелинейные открытые системы. Понятие *нелинейности* означает прежде всего невозможность по поведению фрагментов воссоздать поведение целого.

3. Основная задача преподавания: обеспечить переход от традиционных (линейных) научных методов к быстро развивающимся областям нелинейной динамики и представить «старые» и «новые» концепции в едином широком контексте. Один из способов подчеркнуть эту преемственность основан на использовании уравнений движения Гамильтона. Привлекая такие основополагающие понятия, как однородность пространства и времени, и используя вариационный принцип Гамильтона, можно получать обобщенные уравнения движения. В результате «законы» механики представляются результатом дедуктивного вывода из «абсолютных» принципов. Важно то, что все эти результаты в определенной мере основаны на экспериментальных результатах и человеческом опыте.

Уравнения движения Гамильтона создают естественную основу для обсуждения динамики систем дифференциальных уравнений, которые могут проявлять как регулярное, так и хаотическое поведение. Существенно продвинуться в понимании реальных физических задач, связанных с пространственно-временным хаосом (таких, как гидродинамическая турбулентность) можно, лишь изучая одновременно хаос и интегрируемость. Явное решение гамильтоновых уравнений в канонической форме может быть получено с помощью метода разделения переменных. Для натуральных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, обладающих дополнительным квадратичным интегралом, существуют общие соображения, позволяющие конструктивно построить разделяющие переменные. Для ненатуральных двухстепенных систем, а также систем, обладающих дополнительным интегралом с более высокой (>2) степенью по импульсам, разделение переменных является своего рода искусством. Для многомерных систем вопрос о разделении еще более сложен.

4. Классические модели математической физики используют представление о непрерывной, качественно однородной среде. Очевидно, что объекты и явления окружающего мира часто имеют форму локализованных структур, возникающих, движущихся и взаимодействующих между собой. Структуры макромира, несмотря на различную природу, имеют много общих свойств. Наиболее общим свойством является наличие границы, выделяющей структуру. Эта граница может быть либо размытой либо резко обозначенной. В обоих случаях эволюция описывается нестационарными уравнениями с частными производными, которые являются математическими выражениями присущих этим структурам законов сохранения.

В методологическом отношении весьма важен сопоставительный анализ линейных и нелинейных открытых систем. Для однородных линейных уравнений работает принцип суперпозиции: произвольная линейная комбинация частных решений линейного уравнения снова является решением исходного уравнения. Применение этого принципа позволяет строить решения с функциональным произволом и тем самым решать широкий круг задач. Развитые для линейного случая методы интегрирования уравнений получили очень широкое распространение. Однако все они оказались фактически неприменимы к решению нелинейных задач. Отсутствие принципа линейной суперпозиции и каких-либо других достаточно общих конструктивных принципов чрезвычайно осложняет аналитическое исследование нелинейных задач.

5. Методы аналитического представления уравнений с частными производными можно условно разделить на два типа. Методы 1-го типа позволяют строить классы «точных» решений или понижать размерность задачи. Отметим, в частности, решения типа бегущих волн, а также автомодельные решения, характеризующиеся существованием некоторых комбинаций независимых переменных, которые соответствуют определенным свойствам «подобия» или инвариантности рассматриваемых классов решений.

Особенно эффективным в конструктивном плане оказалось в ряде ситуаций сведение сложной исходной задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее следует указать на применение групповых методов анализа, на метод дифференциальных связей и на методы построения точных решений солитонного типа, встречающихся при описании распространения некоторых типов волн с учетом их дисперсии.

Методы 2-го типа связаны прежде всего с представлениями решений различного рода рядами. Они позволяют рассмотреть весьма широкий круг задач, а в ряде случаев сконструировать и общее решение. Наибольшее распространение получили так называемые асимптотические методы и их модификации (метод малого параметра; методы усреднения и разделения движений на быстрые и медленные; регулярные ряды; техника сращивания асимптотических разложений). Общие рецепты построения достаточно «хороших» рядов сразу для широкого класса уравнений и краевых задач практически отсутствуют.

6. Приведем пример. Известно, что математическое описание эволюции широкого класса структур связано со специальным классом решений квазилинейных параболических уравнений. Этот класс задач характеризуется локализацией и конечной скоростью распространения возмущения, т. е. носитель решения есть замкнутое подмножество области, в которой решается задача, и меняется со временем таким образом, что его граница движется в пространстве с некоторой конечной скоростью. На границе носителя решение имеет слабый разрыв, поэтому одновременно с задачей построения асимптотики по малому параметру возникает задача о распространении особенности (слабого разрыва). Существует конечное число типов особенностей, которые могут распространяться.

Естественно, что возникает два класса явлений: 1) эволюция сохраняющейся структуры; 2) переход от одной структуры к другой.

7. Далее назовем следующие характерные черты нелинейной системы: отсутствие подобия по масштабам (ограниченность традиционных экспериментальных подходов), неединственность предельных состояний эволюционных нелинейных систем и путей эволюции к этим состояниям; фазовые переходы, скачки, бифуркации; сильная чувствительность к возмущениям, критичность и пороговость; существование режимов с обострением (катастрофических режимов), при которых за конечное время параметры нелинейной системы неограниченно возрастают.

Режимы с обострением порождаются на определенных стадиях нелинейными источниками в самых разных математических моделях физических, биологических, химических и даже социальных процессов. В этом своеобразном мире сверхбыстрых процессов возникает фундаментальное явление – инерция переноса субстанции. Наличие режимов с обострением при математическом моделировании реальных систем позволяет предсказать возможность катастрофического развития процессов в этих системах и дать оценку существенных параметров процесса вблизи момента катастрофы.

8. Рассмотрим стратегию выбора приближенного метода решения нелинейной динамической системы: 1) установить тип системы уравнений в целом или хотя бы некоторых подсистем, входящих в систему; выяснить, будет ли тип постоянным во всей области решения или существуют подобласти, где он меняется; 2) исследовать корректность поставленных задач в классическом смысле (существование, единственность, устойчивость); 3) выяснить вопрос о степени гладкости решения и локализации зон его особенностей; 4) выделить большие и (или) малые параметры, входящие в систему и характеризующие основные особенности изучаемых процессов;

5) изучить возможность сокращения числа независимых переменных, выбора рациональной системы координат и др.

Методы математического моделирования сложных процессов претерпевают непрерывную эволюцию и переоценку вместе с ростом сложности задач и увеличением возможностей мощных ЭВМ.

9. Необходимо отметить, что существует хорошее соответствие упрощенных моделей поведению сложных систем. А именно: на асимптотической стадии процессы в бесконечномерной системе удовлетворительно описывается сильно упрощенными конечномерными системами. Появляется удивительная возможность описывать асимптотическое поведение сверхсложной системы посредством упрощенной системы. При этом весьма важен следующий методологический аспект: сложные объекты не укладываются в черно-белую схему дуальных категорий (горячо-холодно, плохо-хорошо), а требуют привлечения триад (например, рацио-эмоцио-интуицио, простота-точность-область приложимости и др.). При этом одна категория выступает в качестве своеобразного оппонента двух других.

Укажем еще на эффективный метод – «мажорирующей трубы». Суть в том, что можно сравнить не разные решения для одной среды, а разные решения для существенно различных сред. Зная решения для относительно простых сред, можно в ряде случаев мажорировать решение для сложных сред сверху и снизу. Это позволяет прослеживать развитие процессов в таких средах вплоть до развитой нелинейной стадии.

10. Изучение студентами закономерностей поведения нелинейных динамических систем целесообразно сопровождать решением задач. Назовем основные темы.

Учебные задачи общего характера: подобие, размерность, симметрия, динамические системы, нелинейные колебания.

Задачи для специальных дисциплин: динамика гамильтоновых систем, асимптотические разложения, нелинейные эволюционные уравнения, диссипативные системы и турбулентность.

Литература

4. Курдюмов, С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем / С. П. Курдюмов // Труды Всесоюз. конф. «Нелинейные явления». – М. : Наука, 1991. – С. 86–94.
5. Самарский, А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1997. – 320 с.
6. Малинецкий, Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.
7. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
8. Сидоров, А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика / А. Ф. Сидоров. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.