Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С. Л. Авакян, Е. А. Дегтярева

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий
по курсу «Высшая математика»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2008

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.17я73
А18

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 7 от 20.03.2007 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Физика» д-р физ.-мат. наук, проф. *П. А. Хило*

Авакян, С. Л.

А18 Исследование функций и построение графиков : практикум по выполнению домашних заданий по курсу «Высшая математика» для студентов всех специальностей днев. формы обучения / С. Л. Авакян, Е. А. Дегтярева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 16 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-764-3.

Содержит основной теоретический материал по разделу «Исследование функций и построение графиков». Подробно изложено решение основных типов задач. Даны задания для самостоятельного решения.

Для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.17я73

ISBN 978-985-420-764-3

1. Возрастание и убывание функции. Максимумы и минимумы функции

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1,$ найти экстремумы.

Решение

Первый способ

Найдем производную данной функции:

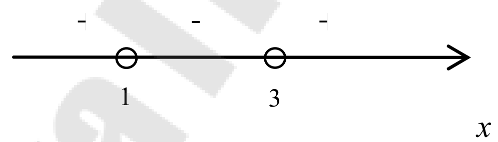
$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

Теперь определим критические точки:

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Производная непрерывна на всей числовой оси, поэтому других критических точек нет.

Исследуем как меняется знак у производной при переходе через точки $x_1 = 1, x_2 = 3$:



То есть на интервале $(-\infty;1)$ функция возрастает, $(1;3)$ - убывает, $(3;+\infty)$ - возрастает.

Так как y' при переходе через точку $x = 1$ меняет знак с «+» на «−», то точка $x = 1$ является максимумом (max); при переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «−» на «+», то $x = 3$ - минимум (min).

Второй способ

Найдем $y'' = 2x - 4$:

$$y''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0, \text{ т. е. } x = 1 - \max.$$

$$y''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0, \text{ т. е. } x = 3 - \min.$$

ЗАДАНИЯ

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданных отрезках:

1) $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$, $[1; 4]$;

2) $y = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 4]$;

3) $y = \dfrac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2}$, $[-1; 2]$;

4) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $[0; 4]$;

5) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1; 5]$;

6) $y = \dfrac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$, $[-3; 3]$;

7) $y = 2\,\mathrm{tg}\,x - tg^2 x$, $(0; \pi/2]$;

8) $y = \sin 2x - x$, $[-\pi/2; \pi/2]$.

Определить промежутки возрастания и убывания функции:

9) $y = 1 - 4x - x^2$;

10) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$;

11) $y = x + \sin x$;

12) $y = 2x^2 - \ln x$;

13) $y = x - e^x$;

14) $y = \arcsin(1 + x)$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

15) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$;

16) $y = x \ln^2 x$;

17) $y = x^2 e^{-x}$;

18) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$;

19) $y = \dfrac{e^{x+3}}{x + 3}$;

20) $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1 - x}}$.

2. Выпуклость вверх и выпуклость вниз кривой. Точки перегиба

Пример 2. Установить интервалы выпуклости кривой $y = 1 - x^2$.

Решение

Найдем вторую производную данной функции:

$$y' = -2x;\; y'' = -2 < 0.$$

Следовательно, заданная кривая всюду имеет выпуклость вверх (рис. 1).

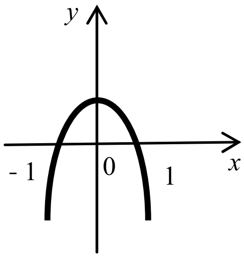


Рис. 1

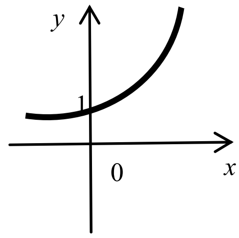


Рис. 2

Пример 3. Установить интервалы выпуклости кривой $y = e^{x}$.

Решение. Вычислим вторую производную данной функции:

$$y' = e^{x}, \quad y'' = e^{x} < 0,$$

т. е. кривая всюду имеет выпуклость вниз (рис. 2).

Пример 4. Найти точки перегиба функции $y = x^{3}$.

Решение. Найдем вторую производную функции $y = x^{3}$:

$$y' = 3x^{2},\ y'' = 6x.$$

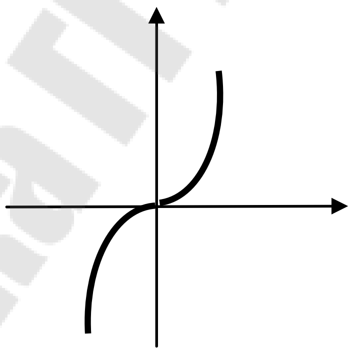


Рис. 3

При $x < 0$ $y'' < 0$; при $x > 0$ $y'' > 0$, т. е. кривая при $x < 0$ имеет выпуклость вверх, а при $x > 0$ - выпуклость вниз. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой перегиба (рис. 3).

ЗАДАНИЯ

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости вниз и вверх графиков данных функций.

21) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

22) $y = (x+1)^2$;

23) $y = x^2 + \frac{2}{x}$;

24) $y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$;

25) $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$;

26) $y = \frac{x^2}{(x^2 - 4)}$;

27) $y = x - \sin x$;

28) $y = \ln(1 + x^2)$;

29) $y = \operatorname{arctg} x - x$;

30) $y = \ln \frac{x + 6}{x} - 1$;

31) $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}, (a > 0)$;

32) $y = (x+1)^4 + e^x$.

3. Асимптоты

Пример 5. Найти асимптоты следующих функций: а) $y = \frac{1}{x - 1}$; б) $y = \operatorname{tg} x$.

Решение

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \infty$, т. е. $x = 1$ и есть вертикальная асимптота (рис. 4).

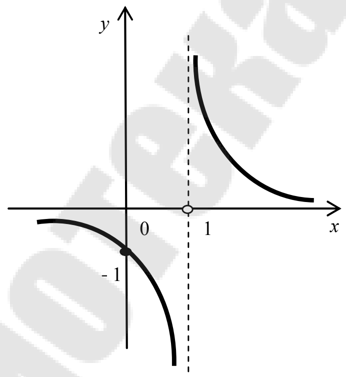


Рис. 4

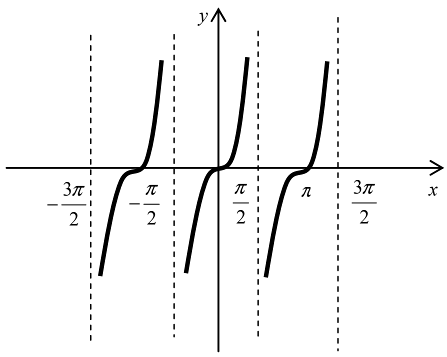


Рис. 5

2) $\lim\limits_{x \to \pm\frac{\pi}{2} + \pi n} \operatorname{tg} x = \infty$, тогда $x = \pm\frac{\pi}{2}, x = \pm\frac{3\pi}{2}, x = \pm\frac{5\pi}{2}$, …, являются вертикальными асимптотами функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 5).

Пример 6. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение

Найдем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Следовательно, правая наклонная асимптота $y=k_1x+b_1$ или $y=x$.

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,$$

т. е. левая асимптота совпадает с правой.

Итак, кривая имеет наклонную асимптоту $y=x$, которая является биссектрисой первого и третьего квадрантов.

Определим вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x}=\infty,\ \text{т. е. } x=0 \text{ - вертикальная асимптота.}$$

Чтобы исследовать поведение кривой при приближении к вертикальной асимптоте, необходимо вычислить пределы слева и справа к ней (рис. 6).

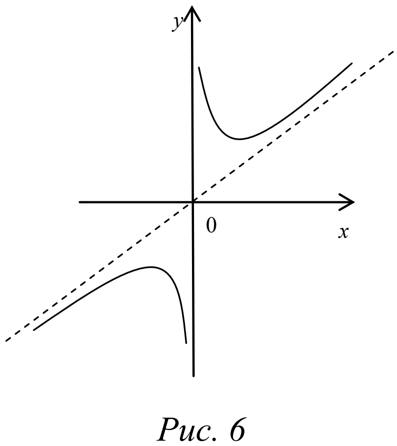


Рис. 6

$$\lim_{x \to +0} y(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x^2+1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x^2+1}{x} = -\infty.$$

ЗАДАНИЯ

Найти асимптоты данных линий.

33) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

34) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

35) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$;

36) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$;

37) $y = xe^x$;

38) $y = xe^{2/x} + 1$;

39) $y = \dfrac{21 - x^2}{7x + 9}$;

40) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$;

41) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

42) $y = \ln(1 + x)$;

43) $y = \dfrac{1}{1 - e^x}$;

44) $y = \dfrac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

4. Общий план исследования функций и построение графиков

Под *исследованием функции* обычно понимается:

1) нахождение области определения функции;
2) нахождение точек разрыва функции;
3) исследование функции на четность.

Замечание: если функция четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то она симметрична относительно оси Oy. Если функция нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то функция симметрична относительно начала координат;

4) исследование функции на периодичность (функция называется периодической с периодом T, если $f(x \pm T) = f(x)$);

5) нахождение интервалов возрастания и убывания функции;

6) нахождение точек минимума и максимума, а также минимальных и максимальных значений функции;

7) нахождение областей выпуклости вверх и вниз графика, точек перегиба;

8) нахождение асимптот графика функции.

Затем все данные заносятся в таблицу и строится график функции.

Пример 7. Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Решение

1) найдем область определения заданной функции. Очевидно, что $x \neq 1$ и $x \neq -1$, т. е. функция определена $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;

2) точки разрыва функции: $x = 1$ и $x = -1$;

3) $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$, т. е. функция нечетная. Следовательно, график данной функции симметричен относительно начала координат;

4) функция $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ не является периодической;

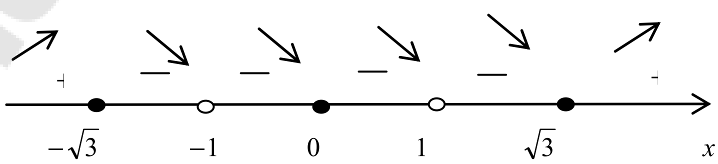
5) для нахождения интервалов возрастания и убывания функции, а также для нахождения экстремумов вычислим первую производную:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2},$$

$$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0, \quad \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0,$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = -\sqrt{3}.$$

В точках x_1, x_2 и x_3 $y' = 0$, в точках $x_4 = 1, x_5 = -1$ производная не существует. Нанесем все пять критических точек на ось и, определив знак производной на каждом интервале, найдем интервалы возрастания и убывания функции, а также определим min и max.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$, а убывает – $(-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \sqrt{3})$. Следовательно, точки $x = -1$, $x = 0$,

$x = 1$ являются ложными экстремумами, точка $x = -\sqrt{3}$ - точка максимума (max), а $x = \sqrt{3}$ - точка минимума (min).

$$y(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

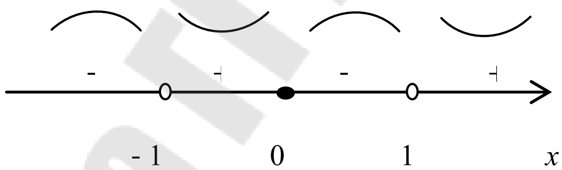
Точка максимума имеет координаты $\left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, а точка минимума – $\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

6) для определения интервалов выпуклости и вогнутости функции и нахождения точек перегиба вычислим вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3};$$

$$2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3) = 0, \Rightarrow x = 0; x \neq -1; x \neq 1.$$

Нанесем все три точки на ось и определим знаки у второй производной.



Отсюда следует, что функция имеет три точки перегиба. Выпуклость вверх и вниз показаны схематически на рисунке;

7) найдем асимптоты:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x^2 - 1)x} = 1,$$

т. е. правая наклонная асимптота $y = x$.

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0,$$

т. е. левая наклонная асимптота $y = x$. Для данной функции правая и левая асимптоты совпадают.

Найдем вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{x^2-1} = \infty,$$

следовательно, $x = -1$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3}{x^2-1} = \infty,$$

т. е. $x = 1$ также является вертикальной асимптотой.

Итак, наша функция имеет одну наклонную асимптоту $y = x$ и две вертикальные $x = -1$ и $x = 1$.

Вычислим пределы слева и справа к каждой из двух вертикальных асимптот:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{x^2-1} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^3}{x^2-1} = +\infty.$$

Занесем все полученные данные в таблицу:

x	$(-\infty-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$ **max**	$(-\sqrt{3};-1)$	**- 1**	**(- 1; 0)**	**0**	**(0; 1)**	**1**	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$ **min**	$(\sqrt{3};+\infty)$
y	↑ ∩	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↓ ∩	не существует	↓ ∪		↓ ∩	не существует	↓ ∪	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↑ ∪
y′	+	0	–	не существует	–		–	не существует	–	0	+
y″	–	< 0	–	не существует	+		–	не существует	+	> 0	+

Построим график функции:

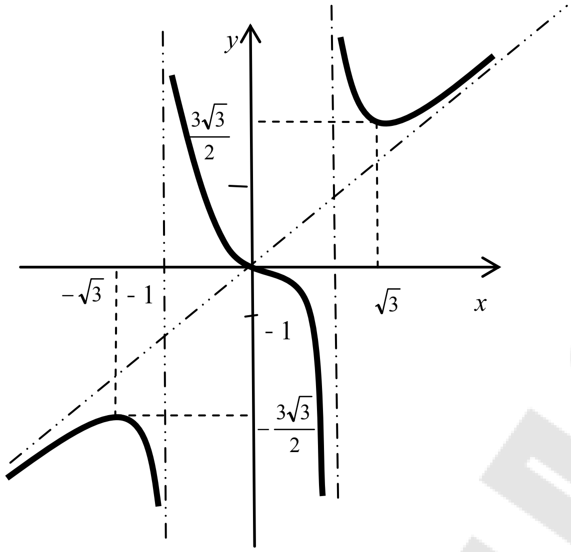


Рис. 7

ЗАДАНИЯ

Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

45) $y = x^3 - 3x^2$;

46) $y = \dfrac{1-2x^3}{x^2}$;

47) $y = -\dfrac{8x}{x^2+4}$;

48) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;

49) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$;

50) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$;

51) $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$;

52) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

53) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$;

54) $y = \dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$;

55) $y = x^3 e^{-x}$;

56) $y = x \sin x$;

57) $y = 2x - \operatorname{tg} x$;

58) $y = \ln \dfrac{x}{x-2} - 2$.

5. Исследование кривых, заданных параметрически

Пример 8. Построить кривую, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \quad a > 0. \end{cases}$$

Решение

Так как $\sin^3 t$ и $\cos^3 t$ являются периодическими функциями с периодом 2π, то достаточно рассмотреть изменение параметра t в пределах от 0 до 2π.

Очевидно, что областью изменения как x, так и y будет отрезок $[-a; a]$. Легко видеть, что данная кривая асимптот не имеет. Вычислим y'_x. Для этого находим x'_t и y'_t:

$$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t,$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t \cos t.$$

Эти производные обращаются в нуль при $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \dfrac{3\pi}{2}$, $t = 2\pi$ (на отрезке $[0; 2\pi]$).

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} y'_x = \infty \text{ и } \lim_{t \to \frac{3\pi}{2}} y' = \infty.$$

Это означает, что касательная в этих точках вертикальна.

$$y'_x\big|_{t=0} = 0;\ y'_x\big|_{t=\pi} = 0;\ y'_x\big|_{t=2\pi} = 0.$$

В этих точках касательная горизонтальна.

Вычислим вторую производную y''_{xx}:

$$(y'_x)'_t = (-\operatorname{tg} t)' = -\frac{1}{\cos^2 t},$$

тогда

$$y''_{xx} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t \sin t}.$$

Легко видеть, что

$y''_{xx} > 0$ при $0 < t < \pi$ – кривая имеет выпуклость вниз;

$y''_{xx} < 0$ при $\pi < t < 2\pi$ – кривая имеет выпуклость вверх.

Удобно составить следующую таблицу:

Область изменения t	**Область изменения x**	**Область изменения y**	**Знак y'_x**	**Характер изменения y от x ($y = f(x)$)**
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	–	убывает
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	возрастает
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	–	убывает
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	возрастает

На основании результатов исследования строим кривую. Эта кривая называется астроидой (рис. 8).

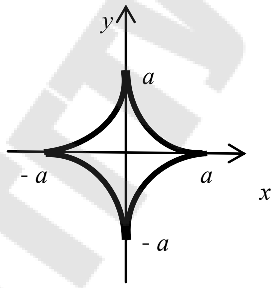


Рис. 8

ЗАДАНИЯ

Построить графики функций, заданных параметрически:

59) $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 5; \end{cases}$

60) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t; \end{cases}$

61) $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t}; \end{cases}$

62) $\begin{cases} x = 5 + 4\cos t \\ y = -1 + \sin t; \end{cases}$

63) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin t, a > 0; \end{cases}$

64) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t. \end{cases}$

Литература

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1980. – 336 с.

2. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2000. – 303 с.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б. П. Демидович [и др.]. – Москва : Наука, 1978. – 380 с.

4. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. шк., 1983. – 175 с.

5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Высш. шк., 1981. – 688 с.

6. Пискунов, И. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / И. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – 432 с.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Практикум по выполнению домашних заданий по курсу «Высшая математика» для студентов всех специальностей дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *М. В. Аникеенко*
Компьютерная верстка *М. В. Аникеенко*

Подписано в печать 09.12.08.
Формат $60x84/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,81.
Изд. № 63.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.