Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Детали машин»

А. Т. Бельский, Г. П. Тариков

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ
для студентов экономических специальностей дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2008

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 34.41я73
Б44

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 1 от 25.09.2006 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого *М. П. Кульгейко*

Бельский, А. Т.

Б44 Прикладная механика : крат. курс лекций для студентов экон. специальностей днев. и заоч. форм обучения / А. Т. Бельский, Г. П. Тариков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 83 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-756-8

Краткий курс лекций дает представление об устройстве, принципе действия и методах обеспечения работоспособности механических передач и приводов. Состоит из трех взаимосвязанных разделов: теоретическая механика, механика материалов и теория механизмов и детали машин. Изучение этих разделов позволит приобрести навыки расчета и конструирования приводов машин, состоящих из узлов, деталей и механизмов общего назначения.

Для студентов экономических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 34.41я73

ISBN 978-985-420-756-8

ТЕМА 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задачи статики и основные определения

Статикой называется та часть механики, где изучаются условия, которым должны удовлетворять силы, действующие на систему материальных точек, для того чтобы система находилась в равновесии, и условия эквивалентности систем сил.

Материальная точка – геометрическая точка с массой.

Абсолютно твёрдое тело – совокупность материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными независимо от действующих сил.

Сила – количественная мера механического взаимодействия материальных тел, характеризующаяся величиной, направлением и точкой приложения. Сила является векторной величиной ($\vec{F}$).

Линия действия силы (рис. 1.1) – прямая, вдоль которой направлена сила.

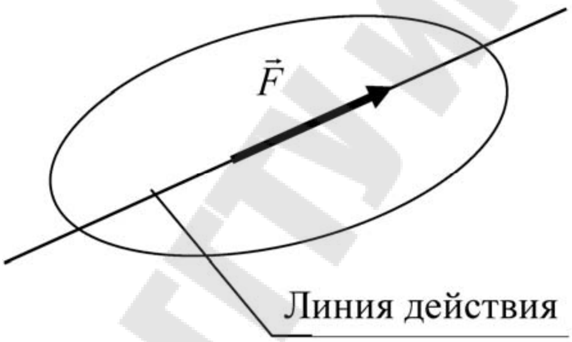


Рис. 1.1

Системой сил называется совокупность сил, приложенных к одному или нескольким твердым телам.

Эквивалентными системами называются системы сил, оказывающие на твердое тело одинаковые действия.

Равнодействующей силой называется сила, действие которой эквивалентно действию на тело системы сил.

Уравновешенной системой сил называется система сил, которая после приложения к покоящемуся свободному твердому телу не нарушает его состояния покоя.

Свободным называется твердое тело, которое может занимать в пространстве любое произвольное положение.

Несвободным называется тело, если свобода его перемещения в пространстве ограничена другими телами.

Связями называются геометрические условия, ограничивающие перемещение тела.

Реакциями связей называются силы, с которыми связи действуют на данное тело.

Задаваемыми или *активными силами* называются силы, не являющиеся реакциями связей.

Распределенными называются силы, которые приложены к телу во всех точках части поверхности или во всех точках объема тела.

Сосредоточенной силой называется сила, если она приложена в одной точке.

Центр масс (*центр инерции*) – точка, характеризующая распределение масс в механической системе, которая при перемещении системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы.

Центр тяжести – точка, неизменно связанная с твердым телом, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы этого тела при любом его положении в пространстве. Совпадает с центром масс.

Аксиомы статики твердого тела

Обобщая опыт изучения физических законов природы, Галилей и Ньютон сформулировали основные законы механики, которые могут рассматриваться как аксиомы статики, так как имеют в своей основе экспериментальные факты.

Аксиома 1 (о равновесии двух сил). Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, уравновешиваются тогда и только тогда, когда они равны по величине, противоположно направлены и имеют общую линию действия (рис. 1.2).

Аксиома 2 (о присоединении и исключении уравновешенных сил). Действие данной системы сил на твердое тело не изменяется, если к ней присоединить или исключить из нее уравновешенную систему (рис. 1.3).

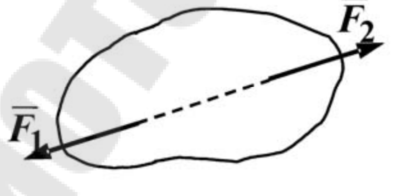


Рис. 1.2

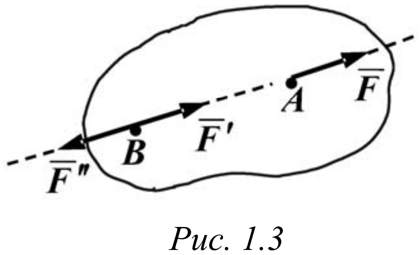


Рис. 1.3

Из аксиом 1 и 2 логически получаем следствие: не изменяя действия силы на твердое тело, можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия.

Аксиома 3 (закон параллелограмма). Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела под углом друг к другу, выражается по величине и по направлению диагональю параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 1.4):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Величину равнодействующей силы можно определить по теореме косинусов

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

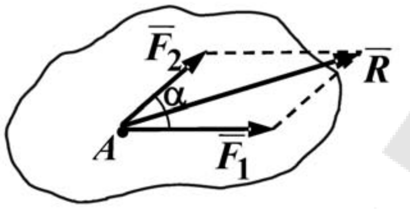


Рис. 1.4

Аксиома 4 (о действии и противодействии). Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.5).

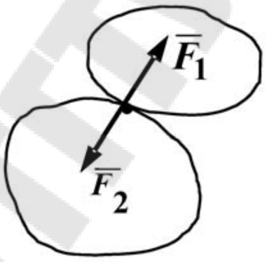


Рис. 1.5

Заметим, что эти силы приложены к разным телам.

Аксиома 5 (аксиома освобождаемости от связей). Не изменяя состояния несвободного тела, можно отбросить наложенные на него связи, приложив их реакции, после чего рассматривать тело как свободное.

Виды связей и их реакции

1. Реакция гладкой поверхности без трения направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1.6, *а*). Такая реакция называется *нормальной*.

2. Реакция шарнирно-подвижной опоры без трения направлена перпендикулярно к опорной поверхности (рис. 1.6, *б*).

3. Реакция шарнирно-неподвижной опоры без трения проходит через центр шарнира, но направление ее неизвестно. При решении задач реакцию такой опоры удобно разложить на две составляющие (рис. 1.6, *в*).

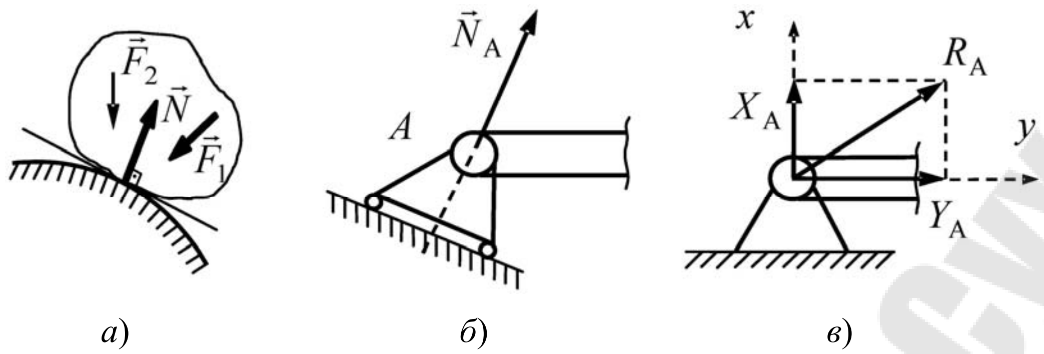


Рис. 1.6

4. Реакция гибкой нерастяжимой связи (нити, канаты, цепи) или стержневой связи (прямолинейного стержня, вес которого не учитывается, с шарнирами на концах) направлена вдоль этой связи (рис. 1.7 *а*, *б*).

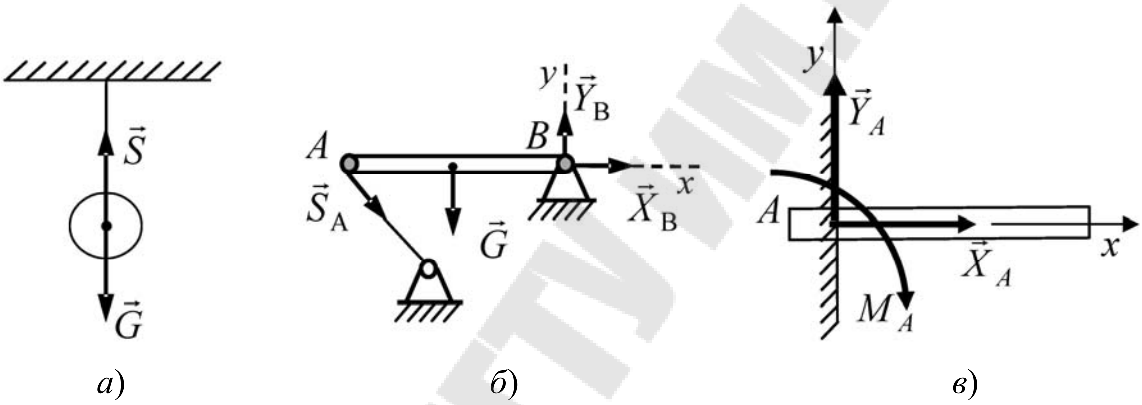


Рис. 1.7

5. Реакции жесткой заделки (рис. 1.7, *в*).

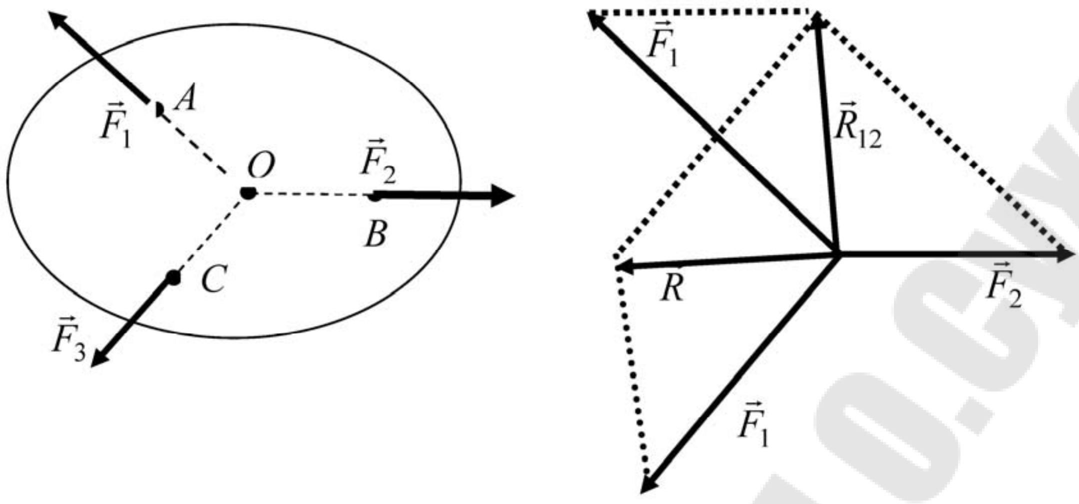
Система сходящихся сил

Если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке, то система называется *системой сходящихся сил*, а точка пересечения *М* – *точкой схода* (рис. 1.8).

Пусть к твердому телу приложена некоторая система сходящихся сил. На основании следствия из аксиом 1 и 2 можно перенести точки приложения всех сил в точку схода. Тогда мы получим пучок сил, приложенных в одной точке (рис. 1.8, *б*).

Для этого сначала на основании аксиомы параллелограмма определим равнодействующую $\vec{R}_{12}$ сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которая приложена к точке схода O. Далее так же найдем равнодействующую $\vec{R}$ сил $\vec{R}_{12}$ и $\vec{F}_3$:

$$\vec{R} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$



а) б)

Рис. 1.8

Аналогично может быть определена равнодействующая для любого числа сходящихся сил. Следовательно, система сходящихся сил всегда имеет равнодействующую, равную их векторной сумме и приложенную в точке схода:

$$\vec{R} = \sum_{1}^{n} \vec{F}_{\mathrm{i}}.$$

Условие равновесия сходящихся сил

Для сходящихся сил необходимое и достаточное условие равновесия состоит в равенстве нулю ее равнодействующей.

Геометрическая форма условия равновесия выражается одним векторным равенством $\vec{R} = 0$.

Аналитическая форма равновесия системы сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, заключается в том, что алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси равны нулю

$$\sum R_x = 0; \sum R_y = 0.$$

Моментом силы относительно точки называется взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы на ее плечо относительно данной точки.

Плечом силы относительно точки называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию действия силы.

Момент силы относительно данной точки принимают положительным, если сила стремится вращать тело вокруг этой точки против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае. Если линия действия силы проходит через некоторую точку, то относительно этой точки плечо силы и ее момент равны нулю. Момент силы относительно точки определяется по формуле (рис. 1.9)

$$m_{\text{o}} = \pm Fh.$$

Парой сил называется совокупность двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил. Расстояние между линиями действия сил пары называется ее плечом.

Моментом пары называется произведение модуля сил, образующих пару, на ее плечо (рис. 1.10).

Рис. 1.9

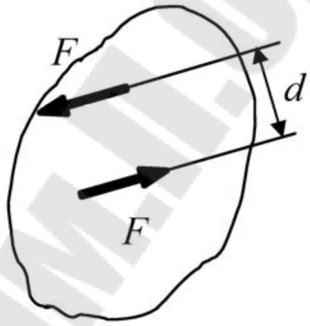


Рис. 1.10

Момент пары сил положителен, если пара стремится вращать тело против часовой стрелки, и отрицателен в противоположном случае. Момент пары определяется по формуле: $M = F \cdot d$.

Приведение силы к данной точке

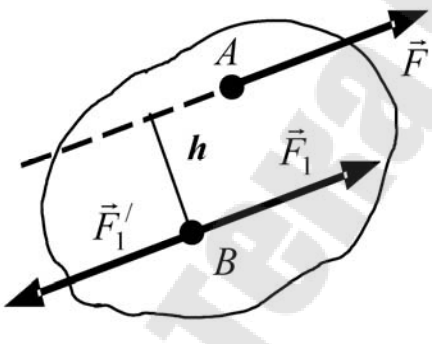


Рис. 1.11

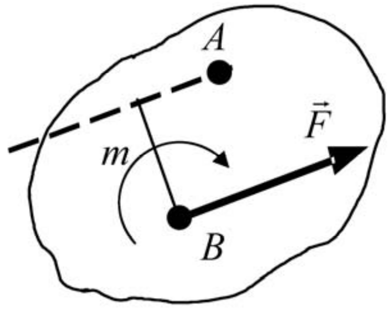


Рис. 1.12

Пусть к твердому телу в точке *A* приложена сила $\vec{F}$ (рис. 1.11). Возьмем на теле произвольную точку *B*, которую будем называть центром приведения, и приложим к ней уравновешенные силы $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1'$. При этом $F_1 = F_1' = F$. Заметим, что силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_1'$ образуют при этом пару сил с моментом $m = Fh$. Таким образом, чтобы перенести силу $\vec{F}$, приложенную в точке *A,* параллельно самой себе в точку *B* необходимо в точке *B* приложить силу $\vec{F}$ и добавить момент m, равный по модулю произведению силы F на кратчайшее расстояние от точки *B* до линии действия силы $\vec{F}$, приложенной в точке *A*.

Равновесие плоской системы сил

Существуют три формы уравнений равновесия плоской системы сил. Первая форма условия равновесия плоской системы сил имеет вид:

$$\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum m_O(F_i).$$

Первые два уравнения называются уравнениями проекций сил на оси координат, третье – уравнением моментов. Точка O может быть выбрана произвольно.

Легко доказать, что необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил могут быть записаны еще в двух формах.

Вторая форма:

$$\sum F_{ix} = 0, \sum m_A(F_i), \sum m_B(F_i).$$

В этом случае точки *A* и *B* не должны лежать на прямой перпендикулярной к оси x.

Третья форма:

$$\sum m_A(F_i), \sum m_B(F_i), \sum m_C(F_i).$$

Точки *A*, *B* и *C* не должны лежать на одной прямой.

Отметим, что для любой из трех форм уравнений равновесия число независимых между собой уравнений равновесия равно трем. Задачи, в которых все неизвестные могут быть определены из уравнений равновесия твердого тела, называются *статически определенными*. Если же неизвестных больше, чем этих уравнений, то задача оказывается *статически неопределенной*.

Момент силы относительно оси

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z (рис. 1.13), называется алгебраическая величина, абсолютное значение которой равняется произведению модуля проекции силы $\vec{F}$ на плоскость α, перпендикулярную к оси z, на расстояние h от точки O пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы $\vec{F}_\alpha$, т. е. $m_z(F) = \pm F_\alpha h$.

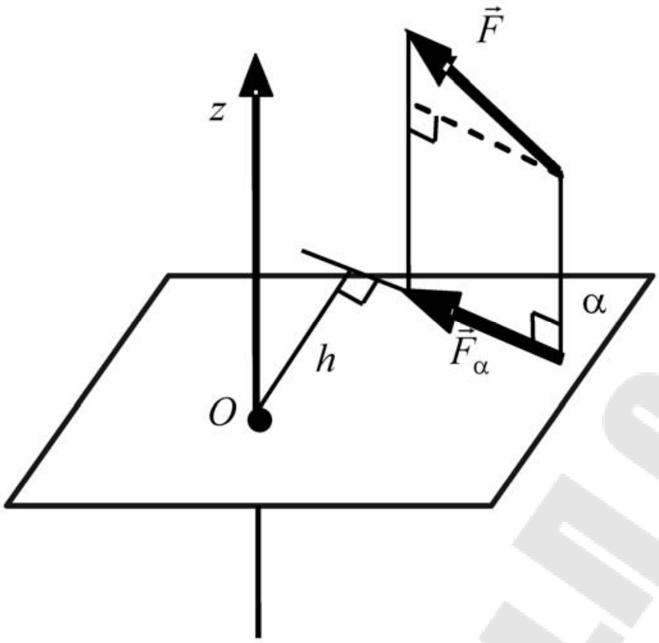


Рис. 1.13

Знак «плюс» – если направление вращения силы F_α вокруг точки O с конца оси z видно происходящим против часовой стрелки, если по часовой стрелке, то знак «минус». Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

ТЕМА 2. КИНЕМАТИКА

Кинематикой называется та часть механики, в которой изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние систем, но не рассматриваются причины, вызывающие изменение состояния движения.

Механическим движением называют изменение положения тела в пространстве с течением времени относительно других тел.

Простейшим механическим движением является движение материальной точки – тела, размеры и форму которого можно не учитывать при описании его движения.

Способы задания движения точки

Движение точки может быть задано тремя способами: естественным, векторным и координатным.

Естественный способ

При естественном способе задания движения задается траектория, т. е. линия, по которой движется точка (рис. 2.1). На этой траектории выбирается некоторая точка A, принимаемая за начало отсчета. Выбираются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты S, определяющей положение точки на траектории. При движении точки расстояние S будет изменяться. Для определения положения точки в любой момент времени, достаточно задать дуговую координату S как функцию времени t:

$$s = f(t).$$

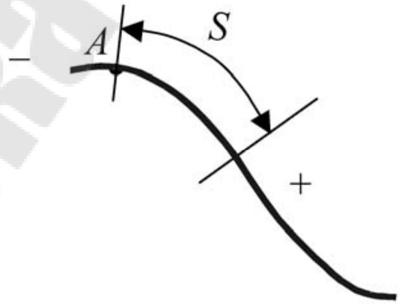


Рис. 2.1

Это равенство называется *уравнением движения точки по данной траектории*.

Векторный способ

При векторном способе задания движения точки положение точки M определяется величиной и направлением радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из неподвижного центра O в данную точку M (рис. 2.2).

При движении точки ее радиус-вектор $\vec{r}$ изменяется по величине и направлению. Для определения положение точки M в любой момент времени достаточно задать ее радиус-вектор $\vec{r}$, как функцию времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

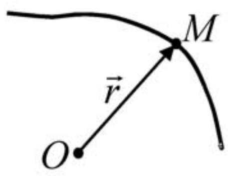


Рис. 2.2

Это равенство называется *векторным уравнением движения точки*.

Координатный способ

При координатном способе задания движения положение точки по отношению к выбранной системе отсчета определяется при помощи прямоугольной системы декартовых координат (рис. 2.3). При движении точки ее координаты изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы определить положение точки в любой момент времени, достаточно задать координаты x, y, z как функции времени:

$$x = f_1(t); \;\; y = f_2(t); \; z = f_3(t).$$

Эти равенства называются *уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах*.

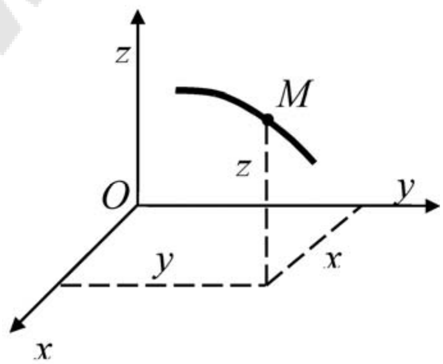


Рис. 2.3

Скорость и ускорение точки

Скорость точки является характеристикой быстроты и направления ее движения.

Пусть точка M (рис. 2.4, *а*) движется по криволинейной траектории согласно закону $s = f(t)$. В момент времени t точка занимает положение M, а в момент времени $t + \Delta t$ положение M_1, пройдя за время Δt путь Δs.

Отношение приращения дуговой координаты Δs к промежутку времени Δt, за которое произошло это приращение, называется *средней скоростью точки* за время Δt.

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

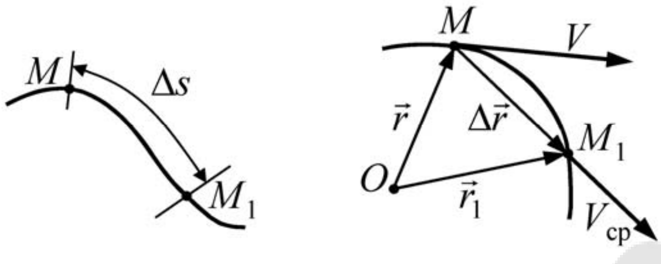


Рис. 2.4

Очевидно, что, чем меньше промежуток времени Δt, тем ближе значение $V_{ср}$ подходит к величине действительной скорости точки в момент времени t.

Скоростью называется предел, к которому стремится средняя скорость $V_{ср}$ при $\Delta t \to 0$:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Чтобы знать не только величину скорости, но и ее направление, введем понятие вектора скорости. Для этого будем определять движение в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В момент времени t положение точки M (рис. 2.4, *б*) определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, а в момент времени $t + \Delta t$, соответствующий положению M_1, – радиусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$.

Отношение приращения радиуса-вектора $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени Δt, в течение которого произошло это приращение, называется *вектором средней скорости точки* за время Δt, т. е.

$$\vec{V}_{ср} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора $\vec{V}_{ср}$ совпадает с направлением вектора $\Delta \vec{r}$.

Вектор скорости точки равен производной от радиус-вектора по времени и всегда направлен по касательной к траектории в точке M.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Ускорение точки характеризует быстроту изменения ее скорости. Положим, что точка движется по криволинейной траектории (рис. 2.5). В момент времени t она занимает положение M и имеет скорость $\vec{V}$. В момент времени $t + \Delta t$ точка занимает положение M_1 и имеет скорость $\vec{V}_1$. Перенося вектор $\vec{V}_1$ в точку M и соединяя концы векторов и $\vec{V}$ и $\vec{V}_1$, получим вектор $\Delta\vec{V}$, выражающий приращение вектора скорости за время Δt.

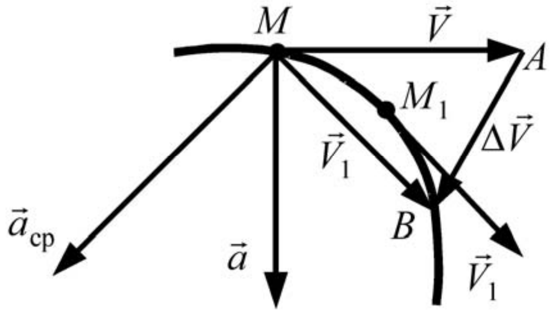


Рис. 2.5

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{V}$ промежутку времени Δt, в течение которого произошло это приращение, называется *средним ускорением*

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}.$$

Действительное ускорение точки в момент времени в положении M представляет собой предел среднего ускорения, когда Δt стремится к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt_2}.$$

Таким образом, вектор ускорения равен первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиус-вектора по времени.

Определение скорости и ускорения при координатном способе задания движения

Пусть движение точки M задано уравнениями движения в прямоугольных декартовых координатах:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t).$$

В этом случае радиус-вектор точки M равен:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные вектора постоянные по величине и направлению.

Вектор скорости точки M равен

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Коэффициенты при $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ представляют собой проекции вектора скорости на оси Ox, Oy и Oz. Следовательно,

$$V_x = \frac{dx}{dt};\ V_y = \frac{dy}{dt};\ V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции вектора скорости точки M на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль скорости вычисляется по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Проекции вектора ускорения точки M на координатные оси равны первым производным от соответствующих проекций вектора скорости или вторым производным соответствующих координат точки по времени.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При движении точки по произвольной плоской кривой ее ускорение всегда может быть представлено в виде суммы двух составляющих, тангенциальной и нормальной:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n}.$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}^{\tau}$ характеризует изменение скорости по модулю и направлено по касательной к траектории движения, а нормальное ускорение $\vec{a}^{n}$ характеризует изменение скорости по направлению и направлено по нормали к центру кривизны. По модулю эти ускорения определяются по зависимостям:

$$a^{\tau} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V};\ a^{n} = \sqrt{a^2 - \left(a^{\tau}\right)^2} = \frac{V^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории точки в данный момент времени.

Частными видами движения абсолютно твёрдого тела являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

Поступательное движение

Поступательным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющей две любые точки тела, остается параллельным своему первоначальному положению во все время движения (рис. 2.6).

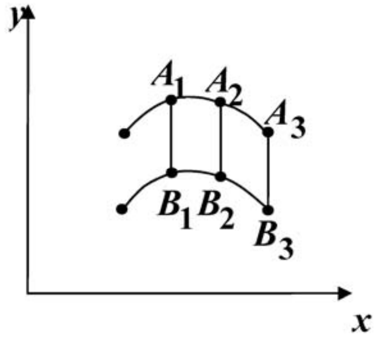


Рис. 2.6

При поступательном движении все точки тела в каждый момент времени имеют одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

Вращательное движение абсолютно твердого тела

Движение абсолютно твердого тела, при котором две его точки A и B остаются неподвижными, называется *вращением* (*вращательным* движением) вокруг неподвижной прямой AB, называемой *осью вращения* (рис. 2.7). При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости – перпендикулярны к ней.

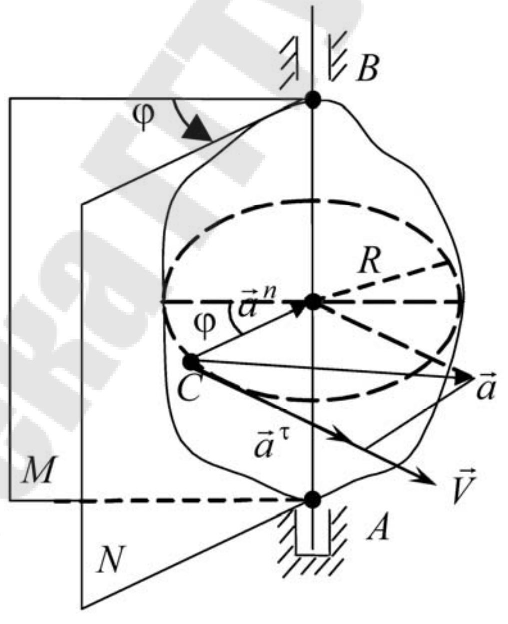


Рис. 2.7

Проведем через ось AB неподвижную полуплоскость M и движущуюся вместе с телом полуплоскость N. Вращение тела будет определяться величиной двугранного угла φ между полуплоскостями M и N. Угол φ называется углом поворота.

При вращении угол поворота φ изменяется в зависимости от времени. Зависимость $\varphi = f(t)$ является уравнением вращения тела вокруг неподвижной оси. Оно позволяет определить положение тела в любой момент времени. Угол φ выражается в радианах.

Пусть через промежуток времени Δt после момента времени t угол φ изменится на $\Delta\varphi$.

Отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за который произошло это приращение, называется *средней угловой скоростью*

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, можем записать

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Таким образом, угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени. Угловая скорость измеряется в рад/с.

Зная зависимость угловой скорости ω от времени t, можно определить ее среднее приращение за единицу времени

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Отношение приращения угловой скорости к приращению времени называется *средним угловым ускорением*.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, записываем

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Итак, *угловое ускорение равно второй производной от угла поворота по времени или первой производной от угловой скорости по времени*. Угловое ускорение измеряется в рад/с^2.

Возьмем в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси, некоторую точку C, находящуюся на расстоянии R от оси вращения. При вращении тела точка C движется по окружности радиуса R (рис. 2.7). Поэтому при повороте тела на угол φ точка C окажется на расстоянии $S = \varphi R$ от своего начального положения. Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\frac{dS}{dt} = V = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R.$$

Таким образом, $V = \omega R$, т. е. *скорость любой точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения*. Так как скорость $\vec{V}$ направлена по касательной к окружности, по которой движется точка C, то она будет перпендикулярна к радиусу, проведенному через точку и ось вращения.

Ускорение точки C складывается из касательной и нормальной составляющих. Касательная составляющая ускорения направлена по одной прямой со скоростью и в ту же сторону, что и скорость, если движение ускоренное, и в противоположную сторону, если движение замедленное. По модулю касательная составляющая определяется

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R.$$

Нормальная составляющая ускорения направлена от точки C к оси вращения. Так как радиус кривизны в данном случае равен радиусу окружности, которую описывает точка, то

$$a^{n} = \frac{V^{2}}{R} = \omega^{2} R.$$

Модуль полного ускорения на основании формулы будет равен:

$$a = \sqrt{\left(a^{\tau}\right)^{2} + \left(a^{n}\right)^{2}} = R\sqrt{\varepsilon^{2} + \omega^{4}}.$$

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое его движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости (рис. 2.8).

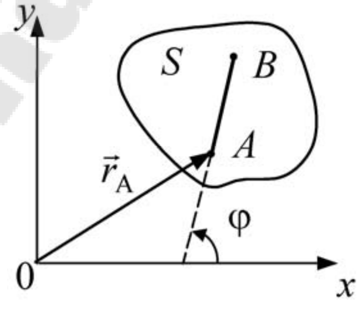


Рис. 2.8

Положение отрезка AB можно определить, зная радиус-вектор $\vec{r}_A$ точки A и угол φ, который образует отрезок AB с осью ox. Точку A называют *полюсом*. При движении тела величины $\vec{r}_A$ и φ будут изменяться в зависимости от времени $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Эти зависимости называются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости S можно представить как совокупность двух движений: поступательного движения, зависящего от выбора полюса и вращательного движения вокруг полюса.

Скорость точки B плоской фигуры при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса (точка A) и скорости точки B при вращении фигуры вокруг полюса.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

где V_A – скорость полюса (поступательное движение); $V_{BA} = \omega AB$ – скорость точки B в относительном движении (вращательное движение).

Ускорение точки B плоской фигуры при плоскопараллельном движении равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки B при вращении фигуры вокруг полюса.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

Но вектор ускорения $\vec{a}_{BA}$ можно представить в виде векторной суммы нормального $\vec{a}_{BA}^n$ и касательного $\vec{a}_{BA}^\tau$ ускорений рассматриваемой точки B во вращательном движении ее вокруг полюса A.

Таким образом, ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении вокруг полюса

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

ТЕМА 3. ДИНАМИКА

В динамике рассматриваются влияние сил на состояние движения материальных объектов. В качестве моделей реальных тел принимается материальная точка.

Законы механики

Первый закон Ньютона (*принцип инерции*): материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчёта до тех пор, пока действующие на неё силы не изменят это состояние.

Второй закон Ньютона (*основной закон динамики*): сила F, действующая на тело, равна произведению массы тела m на сообщаемое этой силой ускорение a:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Третий закон Ньютона (*принцип равенства действия и противодействия*): все тела действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению (сила действия равна силе противодействия).

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Закон независимости действия сил: каждая из сил системы, приложенная к материальной точке, сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщала бы, действуя одна.

$$\vec{F}_\Sigma = \Sigma\vec{F}_i;\ \vec{a} = \Sigma\vec{a}_i;\ \vec{F}_\Sigma = m\vec{a}.$$

Свободная и несвободная точка

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-либо связями, называется свободной, а при наличии ограничения – несвободной. Для несвободной материальной точки все внешние силы делятся на активные силы F и реакции связи R.

Если несвободную материальную точку освободить от связей и заменить связи их реакциями, то движение точки можно рассматривать как свободное, а основному закону динамики придать вид:

$$\Sigma\vec{F}_i + \Sigma\vec{R}_i = m\vec{a}.$$

Сила инерции

Сила, численно равная произведению массы m на приобретенное массой ускорение a и направленная в сторону, противоположную ускорению (рис. 3.1), называется силой инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$.

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a};\quad \vec{F}^{\,n}_{\text{ин}} = -m\vec{a}^{\,n};\quad F^{\tau}_{\text{ин}} = -m\vec{a}^{\,\tau}.$$

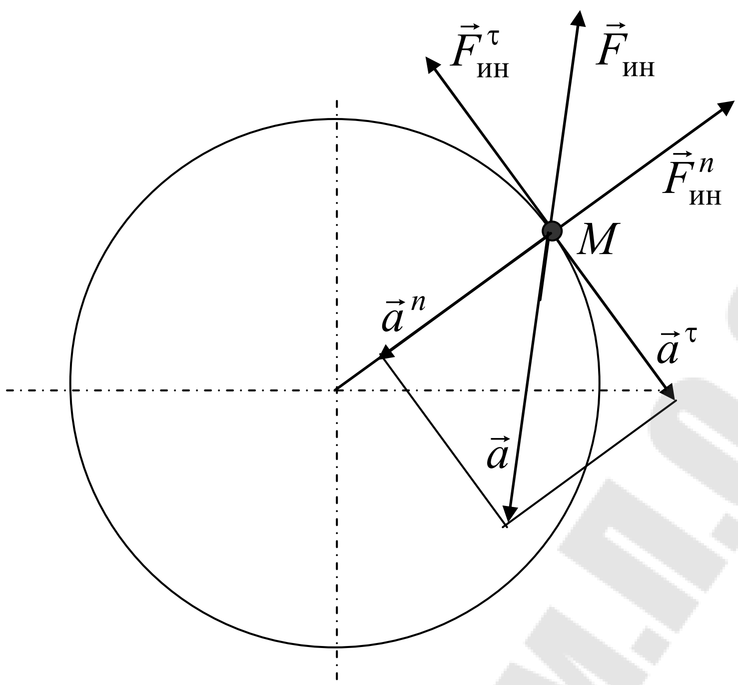


Рис. 3.1

Принцип Даламбера

Перепишем векторное уравнение для несвободной точки $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}_i + \Sigma\vec{R}_i$ в следующем виде:

$$\Sigma\vec{F}_i + \Sigma\vec{R}_i - m\vec{a} = 0.$$

Учитывая, что $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, основное уравнение динамики примет вид:

$$\Sigma\vec{F}_i + \Sigma\vec{R}_i + \vec{F}_{ин} = 0.$$

Данное уравнение и отражает принцип Даламбера для материальной точки: *в любой момент времени сумма активных сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.*

Дифференциальное уравнение движения точки

Пусть материальная точка движется под действием переменной силы $\vec{F}$ по какой-то криволинейной траектории. Проекции этой силы на координатные оси обозначим F_x, F_y и F_z. Проектируя векторное уравнение второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ на координатные оси, получим:

$$F_x = ma_x;\ F_y = ma_y;\ F_z = ma_z.$$

Учитывая, что

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2};\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2};\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x;\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y;\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки. Если на точку действуют несколько сил, то под F_x, F_y и F_z понимаются проекции равнодействующей сил.

Работа и мощность

Работа постоянной силы. Для характеристики эффективности силового воздействия на тело используется величина, называемая механической работой. Пусть под действием постоянной силы F точка M переместилась из положения M_0 в положение M_1 (рис. 3.2). Работой силы F на перемещении s называется скалярная величина, определяемая следующим соотношением:

$$W = Fs\cos\alpha.$$

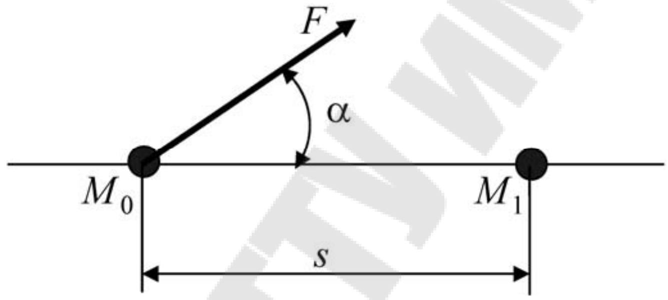


Рис. 3.2

Если работа силы положительна $W > 0$, то сила F называется движущей, а если отрицательна $W < 0$ – силой сопротивления.

Работа переменной силы. В случае движения под действием переменной силы всю траекторию мысленно разбивают на отдельные участки такой малой длины ds, что действующую на них силу можно считать постоянной. Тогда элементарная работа на перемещение ds будет равна:

$$dW = F \cdot ds.$$

Работа на конечном перемещении

$$W = \int_{S_0}^{S_1} F \cdot ds.$$

Работа силы тяжести. Работа силы тяжести не зависит от траектории движения тела и всегда равна произведению силы тяжести G на разность высот в исходном и конечном положениях:

$$W = G(h_1 - h_2).$$

Работа силы упругости. При растяжении пружины силой F в ней возникает сила упругости

$$F_y = -cx,$$

где c – жесткость пружины; x – перемещение (удлинение).

Сила F_y направлена противоположно перемещению x свободного конца пружины, а по модулю равна силе F.

Работа, совершаемая силой упругости пружины при перемещении от x_1 до x_2, определяется по зависимости:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -cx \cdot dx = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

Мощность

Скалярная величина, характеризующая быстроту совершения работы, называется средней мощностью и определяется по формуле:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Учитывая, что работа $W = Fs\cos\beta$, получаем:

$$P = \frac{Fs\cos\alpha}{t} = FV\cos\alpha.$$

Работа и мощность при вращательном движении

При вращении диска (рис. 3.3) точка приложения силы F вращается по окружности и элементарная работа этой силы $dW = F \cdot ds$.

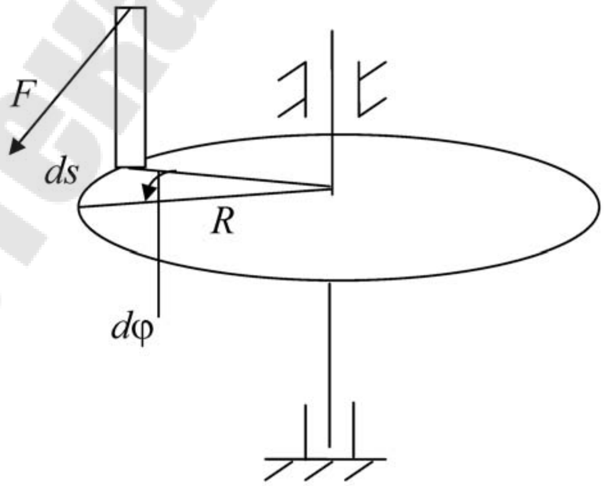


Рис. 3.3

Так как $ds = R \cdot d\varphi$, то $dW = FR \cdot d\varphi$.

Произведение $FR = M$ называют вращающим моментом. Следовательно, при вращении тела элементарная работа равна:

$$dW = M \cdot d\varphi.$$

При повороте диска на угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ работа будет определяться выражением

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi.$$

Если вращающий момент M постоянный, то работа определяется выражением:

$$W = M\varphi.$$

Следовательно, работа при вращении тела равна произведению вращающего момента M на угол поворота φ.

Разделив обе части равенства на время действия момента t, получим

$$\frac{W}{t} = M\frac{\varphi}{t} \text{ или } P = M\omega.$$

Мощность P при вращении тела равна произведению вращающего момента M на угловую скорость ω.

Механический коэффициент полезного действия

Силы сопротивления $F_{\text{с}}$, которые преодолевает машина, можно разделить на две группы: силы полезного сопротивления $F_{\text{пс}}$, для преодоления которых и создается машина, и силы вредного сопротивления $F_{\text{вс}}$, которые дополнительно преодолевает машина в процессе работы. Работа, совершаемая машиной $W = W_{\text{пс}} + W_{\text{вс}}$, откуда $W_{\text{пс}} = W - W_{\text{вс}}$.

Разделив обе части равенства на W, получим

$$\frac{W_{\text{пс}}}{W} = 1 - \frac{W_{\text{вс}}}{W} \text{ или } \eta = 1 - \varphi,$$

где η – механический коэффициент полезного действия; φ – коэффициент потерь.

Таким образом, механическим коэффициентом полезного действия η называется отношение работы сил полезного сопротивления к совершенной работе.

ТЕМА 4. ДИНАМИКА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Общие теоремы динамики точки

Импульс силы

Любое взаимодействие тел, приводящее к какому-либо изменению движения, длится в течение некоторого промежутка времени. Векторная мера действия силы, равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия $\vec{F} \cdot dt$, называется элементарным импульсом силы $d\vec{S}$. Импульс силы за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ получим, просуммировав элементарные импульсы $\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$ или $\vec{S} = \vec{F} \cdot \Delta t$, если $\vec{F} =$const.

Проекции вектора $\vec{S}$ на координатные оси имеют вид:

$$S_x = F_x \cdot \Delta t; S_y = F_y \cdot \Delta t; S_z = F_z \cdot \Delta t.$$

Количество движения

Векторная мера механического движения точки, равная произведению массы m на ее скорость $\vec{V}$ в данный момент времени, называется количеством движения $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = m\vec{V}.$$

Проекции вектора $\vec{Q}$ на координатные оси имеют вид:

$$Q_x = mV_x = m\frac{dx}{dt}; Q_y = mV_y = m\frac{dy}{dt}; Q_z = mV_z = m\frac{dz}{dt}.$$

Кинетическая энергия

Скалярная мера механического движения точки, равная половине произведения массы m на квадрат её скорости V, называется кинетической энергией T

$$T = \frac{1}{2} mV^2.$$

Теорема об изменении количества движения точки

Пусть на точку массой m действует система постоянных сил, равнодействующая которых $\vec{R}$. Учитывая время действия сил, умножим обе части уравнения основного закона динамики на продолжительность их действия Δt

$$\vec{R} \cdot \Delta t = m\vec{a} \cdot \Delta t.$$

Учитывая, что $\vec{a} = \dfrac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t}$, получим

$$\vec{R} \cdot \Delta t = m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1.$$

Следовательно, изменение количества движения точки равно импульсу всех сил. Спроектировав векторное уравнение на оси координат, получим систему трех скалярных уравнений:

$$R_x \cdot \Delta t = mV_{2x} - mV_{1x};$$

$$R_y \cdot \Delta t = mV_{2y} - mV_{1y};$$

$$R_z \cdot \Delta t = mV_{2z} - mV_{1z}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Пусть на точку массой m действует система постоянных сил, равнодействующая которых $\vec{R}$. Тогда основному закону динамики в векторной форме эквивалентно равенство

$$R = ma.$$

Умножим обе части равенства на перемещение точки ΔS

$$R \cdot \Delta S = ma \cdot \Delta S.$$

Так как при действии постоянных сил на прямолинейном пути

$$a = \frac{V_2 - V_1}{\Delta t};\ \Delta S = V_{\text{ср}} \cdot \Delta t = \frac{V_2 - V_1}{2}\Delta t,$$

получаем

$$R \cdot \Delta S = m\frac{V_2 - V_1}{\Delta t} \cdot \frac{V_2 + V_1}{2}\Delta t = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = T_2 - T_1.$$

Отсюда, с учетом того, что $R \cdot \Delta S = W_\Sigma = \Sigma W$, получаем

$$T_2 - T_1 = \Sigma W.$$

Изменение кинетической энергии точки равно сумме работ действующих сил.

Понятие о механической системе

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется *механической системой*. Силы, действующие на точки системы со стороны точек, не входящих в эту систему, называются внешними и обозначаются $\vec{F}_e$, а силы, действующие со стороны точек этой же системы, называются внутренними и обозначаются $\vec{F}_i$.

Движение механической системы зависит не только от действующих сил, но также от суммарной массы системы m и от положения центра масс системы.

Движение центра масс определяется уравнением

$$\vec{F}_{e\Sigma} = m\vec{a}_c,$$

где $\vec{F}_{e\Sigma}$ – результирующая всех внешних сил, приложенных к системе; m – масса системы; $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс системы.

Это уравнение аналогично уравнению основному уравнению динамики точки. Смысл его состоит в том, что центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и приложены все внешние силы.

Основное уравнение динамики вращающего тела

Пусть твердое тело (рис. 4.1) под действием внешних сил $\vec{F}_{ек}$ вращается вокруг оси OZ с угловым ускорением ε. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно оси OZ $M_{ez} = \Sigma M_z(F_{ек})$ называется вращающим моментом.

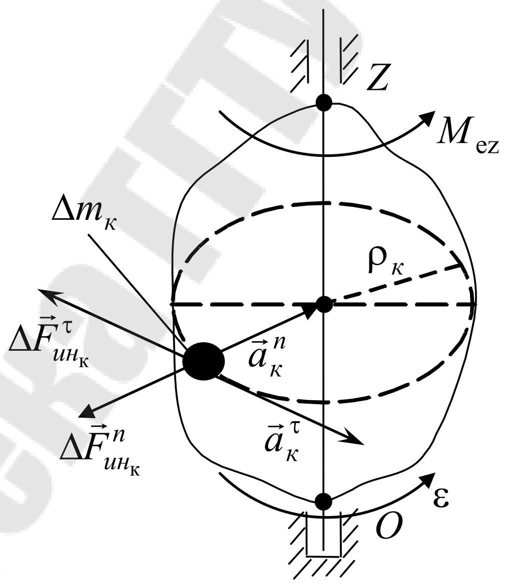


Рис. 4.1

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем его на множество материальных точек с массами $\Delta m_к$. При вращении тела каждая из этих точек движется по окружности радиуса $\rho_к$ с ускорением $\vec{a}_к$. Разложим его на нормальное $\vec{a}^{\,n}_к$ и тангенциальное $\vec{a}^{\,\tau}_к$. Приложим к каждой точке элементарные силы инерции: касательную $\Delta F^{\tau}_{ин_к}$ и нормальную $\Delta F^{n}_{ин_к}$.

Согласно принципу Даламбера активные силы, силы реакций связи и силы инерции образуют уравновешенную систему. Поэтому алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно оси OZ должна быть равна нулю, т. е.

$$M_{ez} - \Sigma \Delta F^{\tau}_{\text{ин}_к} \rho_к = 0.$$

Учитывая, что $\Delta F^{\tau}_{\text{ин}_к} = \Delta m \varepsilon \rho_к$, получим

$$M_{ez} = \varepsilon \Sigma \Delta m_к \rho_к^2.$$

Величина равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от оси вращения, называется моментом инерции тела относительно этой оси.

Тогда основное уравнение динамики вращательного тела

$$I_z \varepsilon = M_{ez}.$$

Моменты инерции тел

Выражению $I_z = \Sigma \Delta m_к \rho_к^2$ можно придать интегральную форму

$$I_z = \int_V dm_к \rho_к^2.$$

Рассмотрим пример определения момента инерции тела. Пусть стержень (рис. 4.2) вращается вокруг оси OZ.

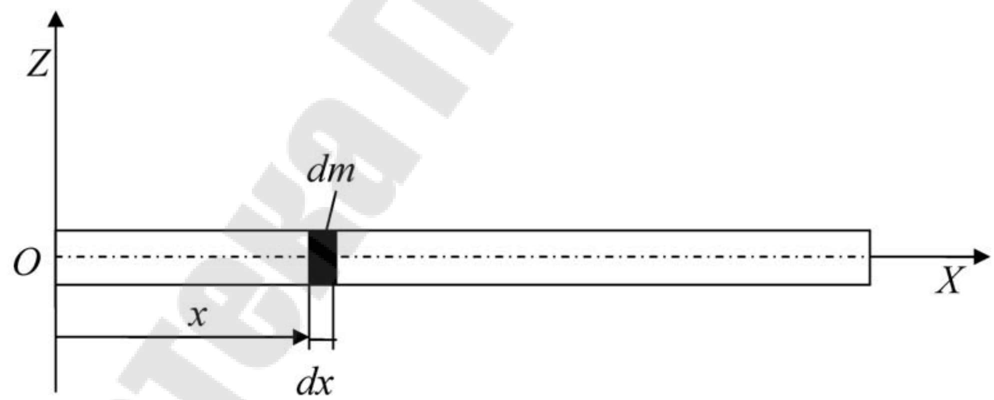


Рис. 4.2

$$I_z = \int_V x^2 \cdot dm = \int_0^l x^2 q \cdot dx = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} \cdot dx = \frac{ml^2}{3}.$$

Аналогичным образом определяются моменты инерции других тел.

Кинетическая энергия тела. Кинетический момент

Кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетических энергий его отдельных точек.

При поступательном движении тела скорости всех его точек равны между собой и равны V_c – скорости центра масс тела. Поэтому кинетическая энергия при поступательном движении тела равна:

$$T_n = \frac{mV_c^2}{2}.$$

При вращательном движении тела с угловой скоростью ω все его точки движутся по окружностям различных радиусов $\rho_к$ и имеют скорости $V_к = \omega\rho_к$. Тогда его кинетическая энергия будет равна

$$T_{\text{вр}} = \Sigma\frac{\Delta m_к V^2}{2} = \frac{1}{2}\Sigma\Delta m_к \omega^2\rho_к^2 = \frac{\omega^2}{2}\Sigma\Delta m_к\rho_к^2 = I_z\,\frac{\omega^2}{2}.$$

При плоскопараллельном движении тела его кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения с угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс, т. е.

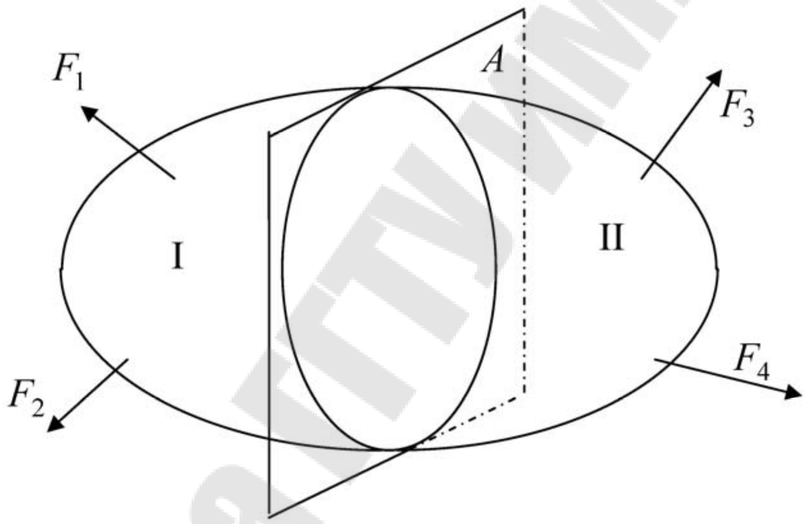
$$T = T_{\text{п}} + T_{\text{вр}} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}.$$

Величина $I_z\omega$ – называется кинетическим моментом вращающего тела.

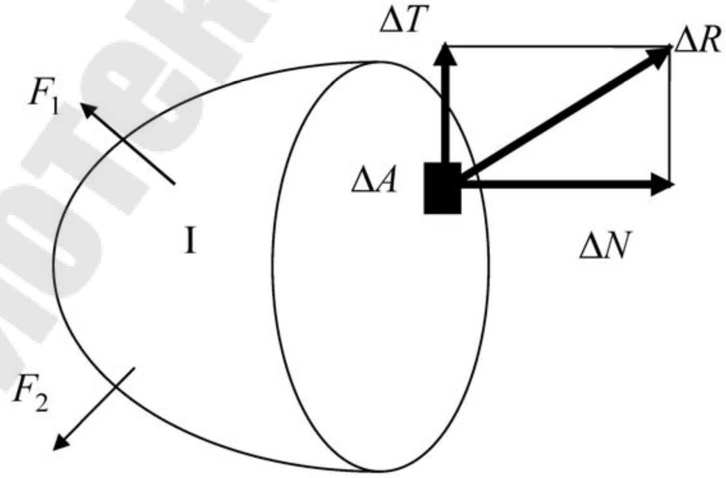
ТЕМА 5. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Метод сечений

Если к твердому телу (рис. 5.1, *а*) приложить внешние силы, то оно будет деформироваться. При этом изменяются расстояния между частицами тела, что, в свою очередь, приводит к изменению сил взаимного притяжения между ними. Отсюда, как следствие, возникают внутренние усилия. Для определения внутренних усилий используют метод сечения. Для этого тело мысленно рассекают плоскостью и рассматривают равновесие одной из его частей (рис. 5.1, *б*). Метод сечений позволяет выявить внутренние силовые факторы, но для оценки прочности необходимо знать внутренние силы в любой точке сечения. С этой целью введем числовую меру интенсивности внутренних сил – напряжение.



а)



б)

Рис. 5.1

Понятие о напряжениях

Выделим в сечение площадку размером ΔA. Равнодействующая внутренних сил, действующих на площадку, равна ΔR, модуль которой зависит от размера выделенной площадки. Равнодействующую ΔR разложим на две составляющие: ΔN – направленную по нормали к площадке, и ΔT – действующую по площадке.

Отношение $\dfrac{\Delta R}{\Delta A} = p_{\text{ср}}$ называется средним напряжением по площадке ΔA. Вектор среднего напряжения совпадает по направлению с вектором равнодействующей ΔR.

При уменьшении площадки ΔA изменяются как модуль, так и направление равнодействующей ΔR, а вектор $\vec{p}_{\text{ср}}$ приближается к истинному значению значению напряжения $\vec{p}$ в заданной точке.

Числовое значение истинного напряжения выражается равенством

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Отношение $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma$ называется нормальным напряжением, а отношение $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta A} = \tau$ называется касательным напряжением.

Зависимость между p, σ и τ имеет вид

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Виды деформационных состояний

В результате приведения внутренних сил к центру тяжести сечения, в общем случае получаем шесть внутренних силовых факторов: продольную силу N, поперечные силы Q_x и Q_z, крутящий момент T и изгибающие моменты M_x и M_z (рис. 5.2).

Нормальные и касательные напряжения связаны с внутренними силовыми факторами следующими соотношениями:

$$N = \int_A \sigma dA;\ Q_x = \int_A \tau_{yx} dA;\ Q_z = \int_A \tau_{yz} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma z\, dA;\ M_z = \int_A \sigma x\, dA;\ T = \int_A \left(\tau_{yx} z - \tau_{yz} x\right) dA.$$

Первый индекс в обозначении касательного напряжения показывает, к какой оси координат перпендикулярна площадка действия этого напряжения, а второй – какой оси параллелен вектор напряжения.

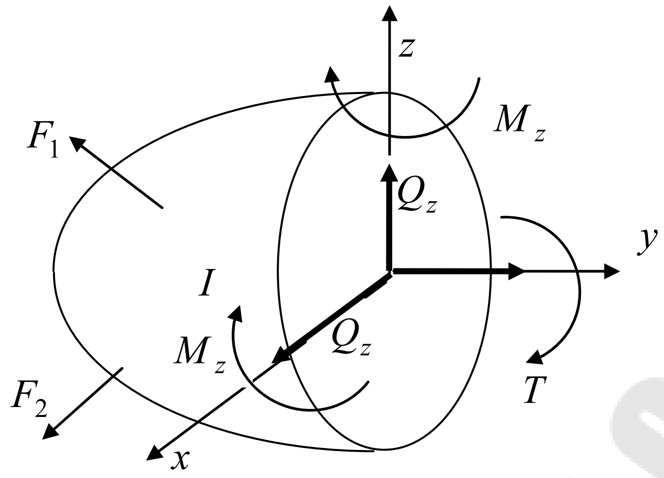


Рис. 5.2

В зависимости от действующих внутренних силовых факторов различают виды нагружения бруса.

Растяжение-сжатие – когда в поперечном сечении действует только продольная сила N.

Чистый сдвиг – когда в поперечном сечении действует только поперечная сила Q_x или Q_z.

Кручение – когда в поперечном сечении действует только крутящий момент T.

Прямой чистый изгиб – когда в поперечном сечении действует только изгибающий момент M_x или M_z.

Прямой поперечный изгиб – когда в поперечном сечении действуют только поперечная сила Q_x и изгибающий момент M_x или Q_z и M_z.

ТЕМА 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Статические моменты сечения

Любое сечение бруса имеет определенную геометрическую форму и площадь (рис. 6.1).

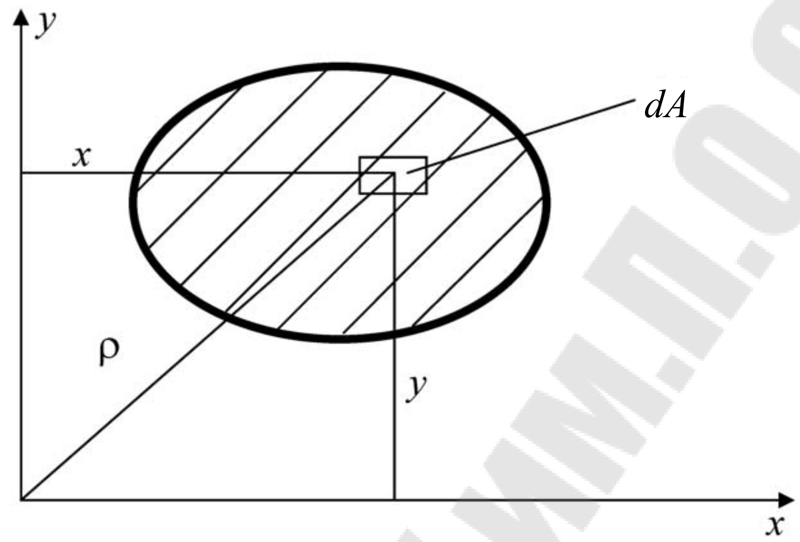


Рис. 6.1

Выделим в сечение элементарную площадку dA, положение которой определено координатами x и y. Статическим моментом сечения S называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на расстояние до оси. Статические моменты сечения относительно осей x и y будут соответственно равны

$$S_x = \int_A dA \cdot y; \; S_y = \int_A dA \cdot x.$$

Определение центра тяжести сечения

Статические моменты сечения, относительно осей проходящих через центр тяжести, равны нулю, поэтому их используют для определения координат центров тяжести сечения. Для этого проводят вспомогательные оси x и y, и координаты центра тяжести сечения определяют по зависимостям:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \; Y_c = \frac{S_x}{A}.$$

Моменты инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения I называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на квадрат расстояния до оси. Осевые моменты инерции сечения относительно осей x и y будут соответственно равны

$$I_x = \int_A dA \cdot y^2; I_y = \int_A dA \cdot x^2.$$

Полярным моментом инерции сечения I_ρ называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на квадрат расстояния до начала координат.

$$I_\rho = \int_A dA \cdot \rho^2.$$

Учитывая, что $\rho^2 = x^2 + y^2$, получаем $I_\rho = I_x + I_y$.

Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции сечения.

Центробежным моментом инерции сечения I_{xy} называется интеграл по площади произведения элементарной площадки на расстояния до осей.

$$I_{xy} = \int_A dA \cdot x \cdot y.$$

Если сечение имеет ось симметрии, то центробежный момент инерции сечения равен нулю.

Определение моментов инерции простых геометрических фигур

Рассмотрим определения момента инерции прямоугольного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести (рис. 6.2).

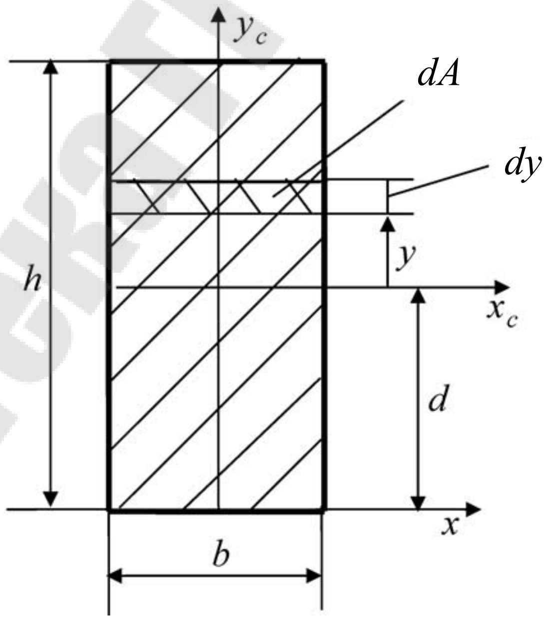


Рис. 6.2

Выделим элементарную площадь dA на расстоянии y от центральной оси x_c толщиной dy. Согласно определению, осевой момент инерции относительно оси x_c равен

$$I_{x_c} = \int_A dA \cdot y^2 .$$

В нашем случае элементарная площадь $\mathrm{d}A = b \cdot dy$. Подставляя значения $\mathrm{d}A$ и изменяя пределы интегрирования, получаем

$$I_{x_c} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Bigg|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} .$$

Аналогичным образом определяются моменты инерции плоского сечения.

Если известен момент инерции сечения относительно оси проходящей через центр тяжести, то момент инерции относительно другой параллельной оси, отстоящей на расстоянии d, определяется по формуле Штейнера $I_x = I_{x_c} + Ad^2$.

Если сечение имеет сложную геометрическую форму, то его разбивают на простые фигуры и его момент инерции рассчитывают, как сумму моментов инерции отдельных фигур.

Момент сопротивления сечения

Момент сопротивления сечения относительно оси представляет собой отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения от этой же оси.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} .$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения, изображенного на рис. 6.2, относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} .$$

Полярный момент инерции представляет собой отношение полярного момента инерции к наибольшему расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной точки сечения

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} .$$

ТЕМА 7. РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

Нормальная сила

При растяжении или сжатии в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – нормальная сила N (рис. 7.1). Брус имеет два характерных участка.

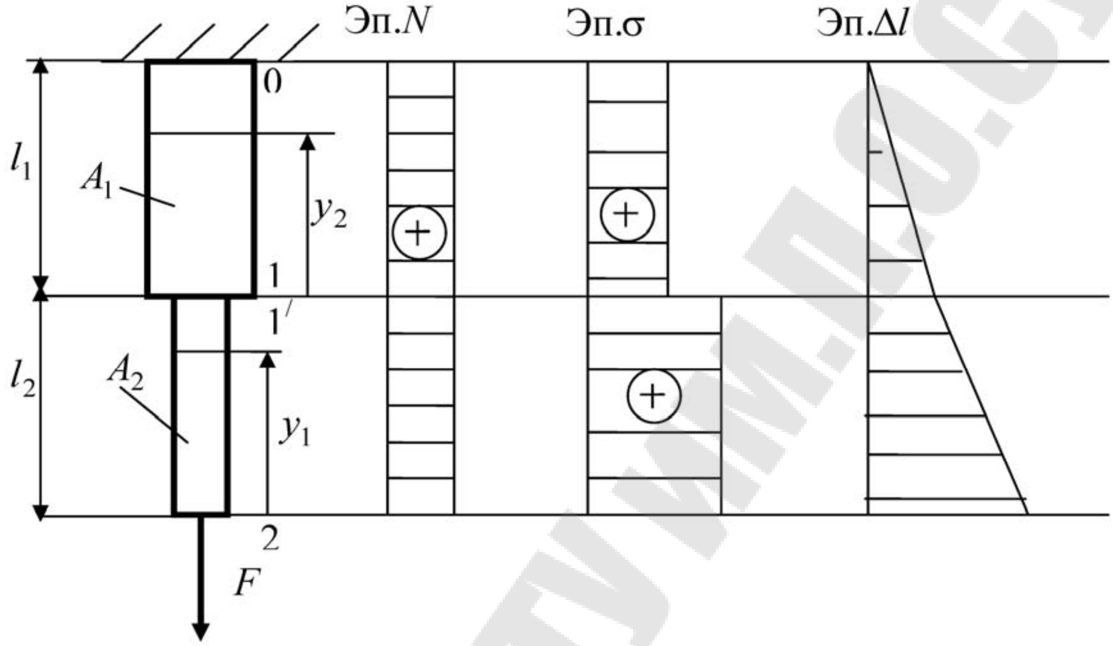


Рис. 7.1

Для определения нормальной силы N воспользуемся методом сечения. На расстоянии y_1 проведем сечение на первом участке и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 7.2). Нормальную силу будем всегда показывать от сечения, что будет соответствовать растяжению бруса.

Составим условие равновесия на ось y

$N_1 - F = 0$, откуда $N_1 = F$.

Проведем на втором участке сечение на расстоянии y_2. Рассматривая равновесие отсеченной части, получаем $N_2 = F$. Строим эпюру нормальных сил.

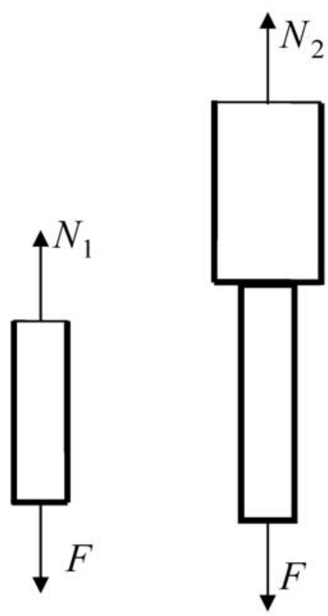


Рис. 7.2

Напряжение

Исходя из определения напряжения, можно записать

$$N = \int_A \sigma \, dA,$$

где σ – нормальное напряжение в произвольной точке сечения.

Согласно гипотезе Бернулли (гипотеза плоских сечений) все продольные волокна бруса деформируются одинаково, а это означает, что напряжения в поперечных сечениях одинаковы, т. е. $\sigma = \text{const}$.

В этом случае получаем

$$N = \sigma \int_A dA, \text{ откуда } \sigma = \frac{N}{A}.$$

Рассчитывая напряжения в каждом сечении, строим эпюру нормальных напряжений.

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_1}; \sigma_1 = \frac{N}{A_1}; \sigma_{1'} = \frac{N}{A_2}; \sigma_2 = \frac{N}{A_2}.$$

Перемещения и деформации

При растяжении бруса длиной l его длина увеличивается на величину Δl, а его диаметр d уменьшается на величину Δd (рис. 7.3).

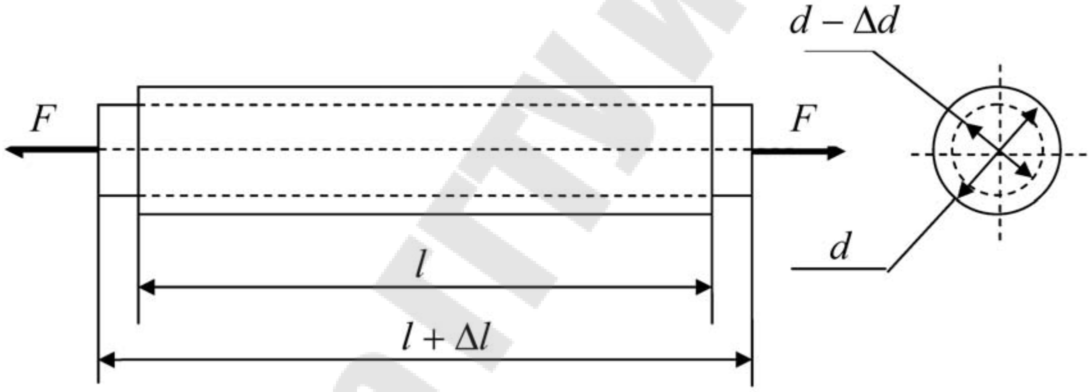


Рис. 7.3

Величина Δl называется абсолютной продольной деформацией, а Δd – абсолютной поперечной деформацией.

О степени деформирования бруса нельзя судить по значениям Δl и Δd, так как они зависят не только от действующих сил, но и от начальных размеров бруса. Для характеристики деформации бруса вводятся понятия относительная продольная деформация ε и относительная поперечная деформация ε', которые рассчитываются по зависимостям

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}.$$

Отношение

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона.

Для большинства материалов в стадии упругой деформации выполняется соотношение, представляющее собой математическое выражение закона Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – коэффициент пропорциональности, который получил название модуля упругости первого рода.

Подставляя в выражение закона Гука σ и ε, получим зависимость для определения абсолютного удлинения бруса

$$\frac{N}{A} = E\frac{\Delta l}{l}, \text{ откуда } \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Произведение EA называется жесткостью бруса при растяжении (сжатии).

Определяя перемещения каждого сечения, строим эпюру продольных перемещений сечений бруса (рис. 7.1).

$$\Delta l_0 = 0; \Delta l_{10} = \frac{Nl_1}{EA_1}; \Delta l_1 = \Delta l_0 + \Delta l_{10}; \Delta l_{21} = \frac{Nl_2}{EA_2}; \Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_{21}.$$

Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации

Внешние силы при нагружении совершают работу на вызываемых ими перемещениях. Работа внешних сил W полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации U при статическом нагружении.

$$W = U = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{N^2 l}{2EA}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации, накопленная в единичном объеме, определяется по зависимости:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N\Delta l}{2Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon.$$

ТЕМА 8. ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА

Необходимые сведения о различных механических свойствах материала получают экспериментальным путем. Самым распространенным является испытание на растяжение. Испытание производят на разрывной машине стандартного образца. При нагружении снимают показание растягивающей силы и длину образца. Затем строится условная диаграмма растяжения в координатах ε и σ. Напряжение в сечении определяют по зависимости

$$\sigma = \frac{F}{A},$$

где F – сила нагружения; A – площадь поперечного сечения образца.

Относительная линейная деформация определяется из выражения

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где $\Delta l = l_i - l$ – относительное удлинение образца; l – исходная длина образца; l_i – длина образца в данный момент отсчета.

Диаграмма растяжения для пластичных материалов имеет вид, показанный на рис. 8.1.

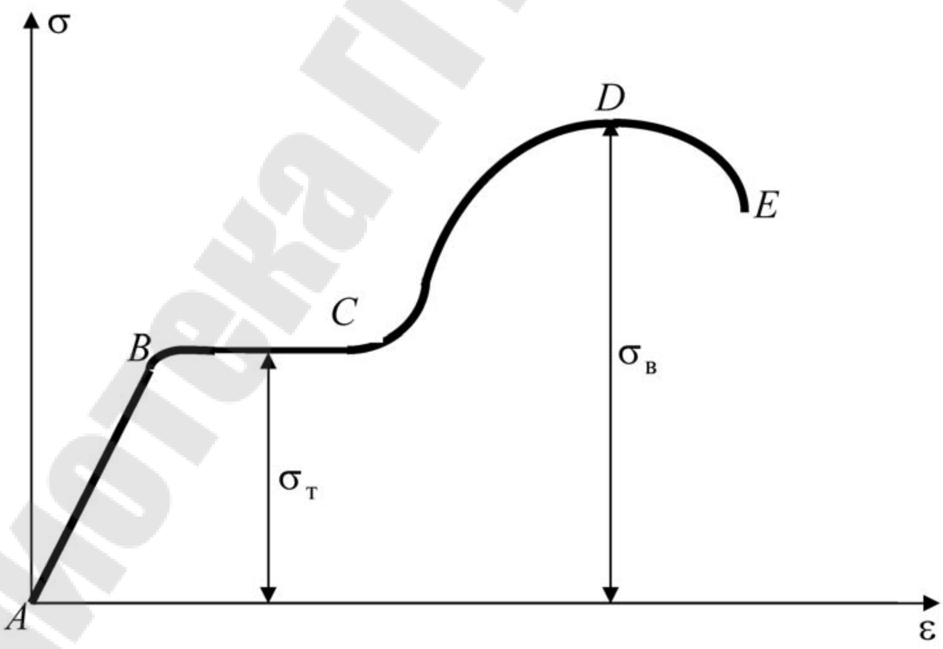


Рис. 8.1

На диаграмме растяжения можно выделить четыре характерные участка.

Участок AB – участок пропорциональности. На этом участке выполняется закон Гука

$$\sigma = \varepsilon E.$$

Участок BC – площадка текучести. На этом участке происходит удлинение образца без изменения нагрузки. Напряжение, при котором происходит течение образца, называется пределом текучести и обозначается $\sigma_т$.

Участок CB – участок упрочнения. На этом участке для дальнейшего удлинения образца необходимо увеличить нагрузку.

В точке D происходит образование шейки и на участке DE происходит местное удлинение образца. Напряжение, при котором образуется шейка, называется пределом прочности и обозначается $\sigma_в$.

Допускаемые напряжения

На участке AB имеют место упругие деформации, так как после снятия нагрузки образец принимает первоначальные размеры. Поэтому для деталей, изготовленных из пластичных материалов, действующие напряжения не должны превышать напряжения текучести $\sigma_т$. С этой целью вводят понятия допускаемых напряжений, которые рассчитываются по зависимости:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{[s]},$$

где $[s]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности, который зависит от назначения детали, точности расчетных формул и ряда других факторов.

Условие прочности и жесткости конструкции

Прочность конструкции будет обеспечена, если максимальное напряжение в ней не будет превышать допускаемого напряжения

$$\sigma_{\max} \le [\sigma].$$

Для бруса, испытывающего напряжения растяжения, условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma_p].$$

Условие жесткости при растяжении бруса будет определяться зависимостью

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \le [\Delta l],$$

где $[\Delta l]$ – допустимая деформация бруса.

ТЕМА 9. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Напряжения при чистом сдвиге

Чистым сдвигом называют такой вид нагружения, при котором в его поперечных сечениях действует только поперечная сила. Сдвиг, как вид нагружения, встречается редко и имеет место в заклепочных и сварных соединениях.

При чистом сдвиге (рис. 9.1) в окрестности точки можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

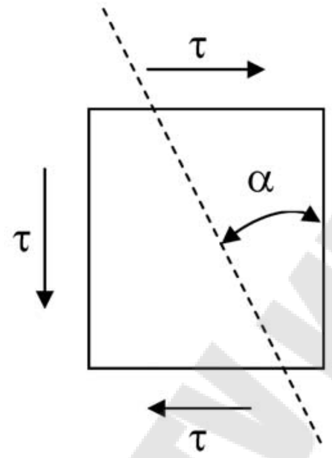


Рис. 9.1

Внутренняя поперечная сила при чистом сдвиге определяется методом сечений. Распределение касательных напряжений принимается равномерным, и тогда связь между поперечной силой и касательным напряжением имеет вид:

$$Q = \int_A \tau dA;\ \tau = \text{const};\ Q = \tau \text{A},$$

откуда $\tau = \dfrac{Q}{A}$.

При чистом сдвиге возникает плоское напряженное состояние, тогда напряжения, действующие на площадке, составляющей угол α с вертикальной исходной площадкой, равны:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha;\ \tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha.$$

Касательные напряжения, показанные на рис. 9.1, по абсолютной величине больше касательных напряжений по любым другим площадкам. Следовательно, они являются экстремальными, а площадки, по которым они действуют – площадками сдвига. Так как по этим площадкам не действуют нормальные напряжения, то их называют площадками чистого сдвига и образуют с главными площадками углы, равные 45º.

Подставляя угол $\alpha = 45^{o}$, получаем

$$\sigma_\alpha = \tau = \tau_{max}.$$

Следовательно, при чистом сдвиге главные напряжения и экстремальные касательные напряжения равны друг другу.

Подставив в уравнения значения углов α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$, получаем

$$\sigma_{\alpha_1} = \tau \sin 2\alpha_1; \sigma_{\alpha_2} = \tau \sin(2\alpha_1 + 180°) = -\tau \sin 2\alpha_1; \sigma_{\alpha_1} = -\sigma_{\alpha_2}.$$

При чистом сдвиге нормальные напряжения на любых двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по модулю и противоположны по направлению.

Деформации при чистом сдвиге

При чистом сдвиге длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями. Первоначально прямые углы становятся равными $90° + \gamma$ и $90° - \gamma$ (рис. 9.2).

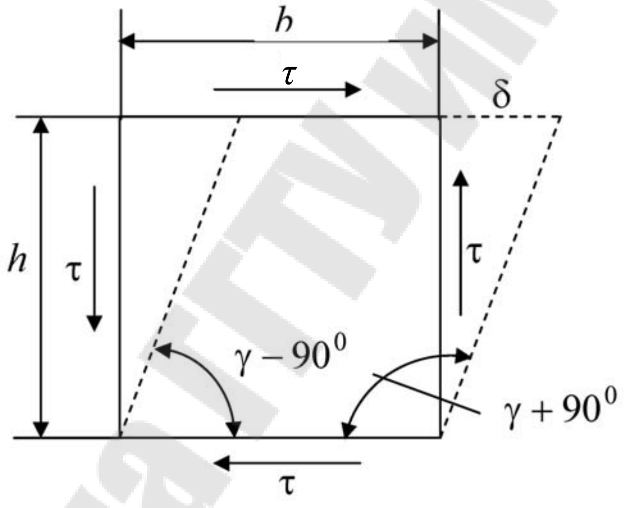


Рис. 9.2

Величина δ называется абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига δ к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом. При малых деформациях имеем

$$\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{h},$$

т. е. относительный сдвиг равен углу сдвига.

Угол сдвига γ пропорционален касательным напряжениям. Математическая зависимость между углом сдвига и касательным напряжением называется законом Гука при сдвиге:

$$\tau = \gamma G,$$

где G – коэффициент пропорциональности или модуль упругости второго рода.

Объемная деформация и потенциальная энергия при сдвиге

Относительное изменение объёма при сдвиге определяется из объёмного закона Гука

$$\theta = \frac{1-\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right).$$

Величина θ не зависит от того, как в окрестности точки выделен элементарный параллелепипед. Так как при чистом сдвиге боковые грани выделенного элементарного параллелепипеда являются площадками чистого сдвига, то $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Тогда относительное изменение объёма при чистом сдвиги $\theta = 0$.

Полная удельная потенциальная энергия u равна сумме удельной потенциальной энергии изменения объёма $u_{об}$ и удельной потенциальной энергии изменения формы $u_{ф}$

$$u = u_{об} + u_{ф}.$$

Учитывая, что при чистом сдвиге $\sigma_1 = \tau_{max}$; $\sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau_{max}$, получаем

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\tau_{max} + 0 - \tau_{max}\right)^2 = 0;$$

$$u_{ф} = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) =$$

$$= \frac{1+\mu}{3E}\left(\tau_{max}^2 + 0 + \tau_{max}^2 - 0 + 0 + \tau_{max}^2\right) = \frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2;$$

$$u = 0 + \frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2 = \frac{1+\mu}{E}\tau_{max}^2.$$

Работа при чистом сдвиге

В результате деформации выделенного параллелепипеда работа силы будет определяться по выражению

$$W = \frac{T}{2}\delta,$$

где T – сила, действующая на грань параллелепипеда. Ее величина будет равна

$$T = \tau b l = \tau_{max} b l,$$

где l – размер параллелепипеда в направлении, перпендикулярном чертежу (рис. 9.2).

Учитывая, что

$$\delta = \gamma h = \frac{\tau}{G} h = \frac{\tau_{\max}}{G} h,$$

получаем

$$W = \frac{\tau_{\max} bl}{2} \frac{\tau_{\max} h}{G} = \frac{\tau_{\max}^2 hbl}{2G} = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2G}.$$

Так как работа силы при статическом действии численно равна потенциальной энергии, имеем

$$U = W = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2G}.$$

Удельная потенциальная энергия в этом случае равна

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\tau_{\max}^2 V}{2GV} = \frac{\tau_{\max}^2}{2G}.$$

Приравнивая полученные выражения для удельной потенциальной энергии, получаем соотношение

$$\frac{1+\mu}{E} \tau_{\max}^2 = \frac{\tau_{\max}^2}{2G},$$

откуда получаем связь между модулем упругости первого рода E и модулем упругости второго рода G

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

ТЕМА 10. КРУЧЕНИЕ

Кручением называют такой вид нагружения, когда в поперечных сечениях бруса возникает только один силовой фактор – крутящий момент. Брус, работающей на кручение называется валом. При кручении вала его поперечные сечения поворачиваются друг относительно друга, вращаясь вокруг оси бруса.

Напряжения и деформации при кручении бруса

Под действием внешнего скручивающего момента, приложенного на правом конце бруса, левый конец которого жестко закреплен, брус будет закручиваться. Выделим из бруса элементарный цилиндр длиной dx (рис. 10.1). Будем считать, что левое сечение бруса жестко закреплено. Под действием крутящего момента T правое сечение повернется на некоторый угол $d\varphi$.

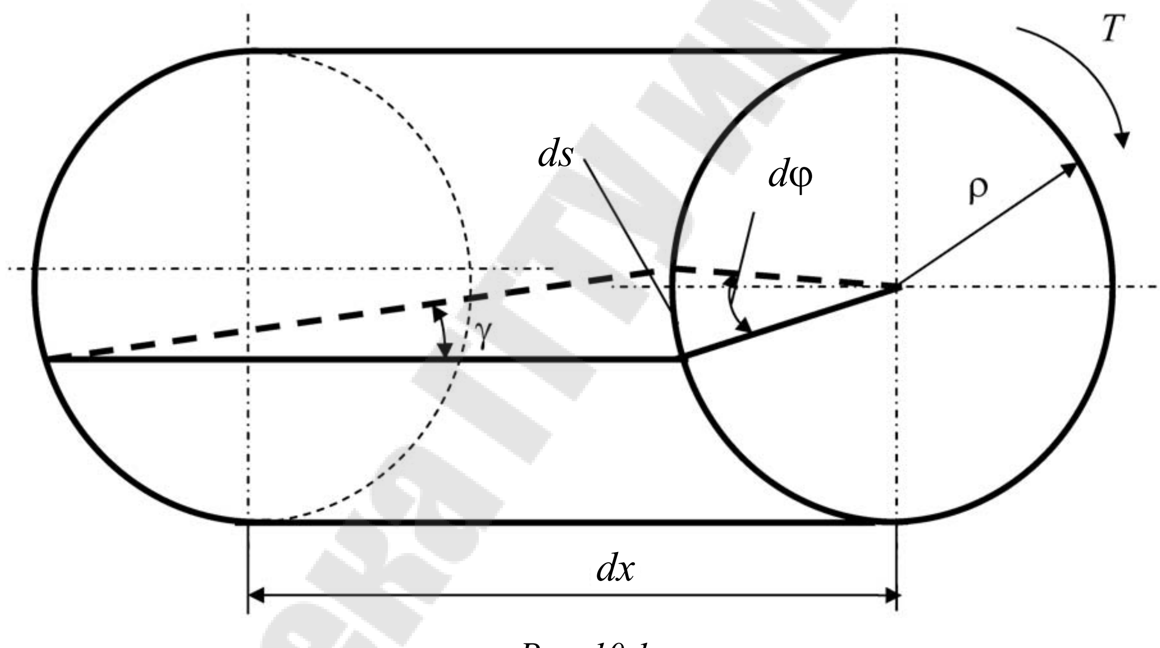


Рис. 10.1

Из рис. 10.1 видно, что $ds = \gamma \cdot dx = \rho \cdot d\varphi$, откуда получаем

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx}\rho.$$

Из данной зависимости видно, что угол сдвига γ изменяется по радиусу вала по линейному закону.

Деформация бруса при кручении характеризуется относительным углом закручивания θ

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Согласно закону Гука при сдвиге, имеем

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

откуда получаем:

$$\tau = \frac{d\varphi}{dx} G\rho = \theta G\rho .$$

Из данной зависимости видно, что касательные напряжения изменяются по радиусу по линейному закону.

При кручении все внутренние силы, распределенные по поперечному сечению, приводятся к одной составляющей – к крутящему моменту. Касательные напряжения перпендикулярны радиусам, проведенным через точки их действия (рис. 10.2). Крутящий момент T в сечении бруса определяется по уравнению

$$T = \int_A \rho \tau_\rho dA,$$

где ρ – плечо элементарной силы.

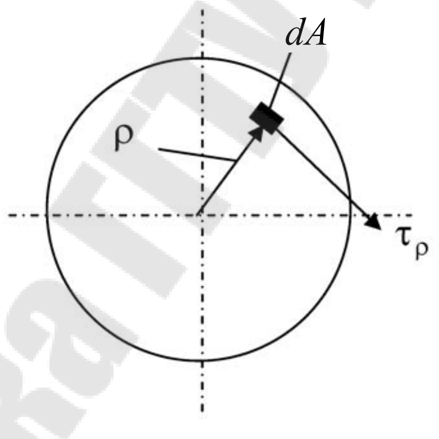


Рис. 10.2

Подставляя значение касательного ускорения, получим

$$T = \int_A \theta G \rho^2 dA = \theta G I_\rho = \frac{d\varphi}{dx} G I_\rho .$$

Элементарный угол закручивания

$$d\varphi = \frac{T \cdot dx}{G I_\rho},$$

а полный угол закручивания бруса

$$\varphi = \frac{Tl}{G I_\rho}.$$

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса будет определяться по зависимости:

$$\tau_{\max} = QG\rho_{\max} = \frac{T}{I_\rho}\rho_{\max} = \frac{T}{\dfrac{I_\rho}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_\rho}.$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} \le [\tau].$$

Условие жесткости при кручении

$$\varphi = \frac{T}{GI_\rho} \le [\varphi].$$

Для бруса круглого сечения эти условия имеют вид

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \le [\tau]; \quad \varphi = \frac{32T}{\pi d^4} \le [\varphi].$$

Построение эпюр крутящих моментов

Крутящий момент в сечении бруса определяется методом сечений. По модулю он численно равен алгебраической сумме внешних моментов слева или справа от сечения.

Брус разбивается на участке и на каждом участке проводится сечение (рис. 10.3). В каждом сечении определяется крутящий момент, а затем строится эпюра крутящих моментов. Для случая, изображенного на рис. 10.3 крутящие моменты в сечениях 1 и 2 будут равны

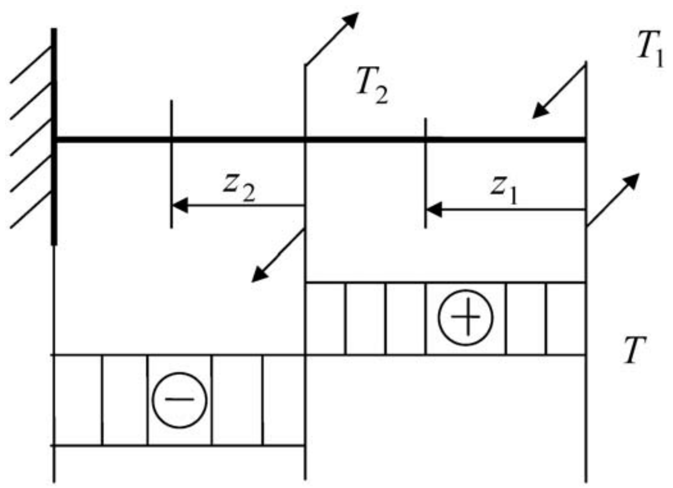


Рис. 10.3

$$T_{z_1} = T_1; \; T_{z_2} = T_1 - T_2.$$

ТЕМА 11. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Основные понятия и определения

В отличие от деформации растяжения-сжатия и кручения изгиб представляет такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса. Осью бруса называется геометрическое место точек центров тяжестей поперечных сечений бруса.

Если в сечении бруса действует только один изгибающий момент, то изгиб называется чистым. Если в поперечных сечениях кроме изгибающего момента действует и поперечная сила, то изгиб называется поперечным.

Брус, работающий на изгиб, называется балкой. Изгиб называется плоским, если ось балки после деформации остается плоской линией. В противном случае имеет место косой изгиб.

В настоящем разделе рассматривается плоский прямой изгиб.

Нормальные напряжения при чистом прямом изгибе

Так как нормальные напряжения зависят только от изгибающих моментов, то вывод формулы для вычисления σ можно производить применительно к чистому изгибу.

Статическая задача о плоском изгибе

Изгибающий момент в сечении представляет собой сумму моментов всех элементарных внутренних нормальных сил $\sigma \cdot dA$, возникающих на элементарных площадках поперечного сечения балки (рис. 11.1), относительно нейтральной оси

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

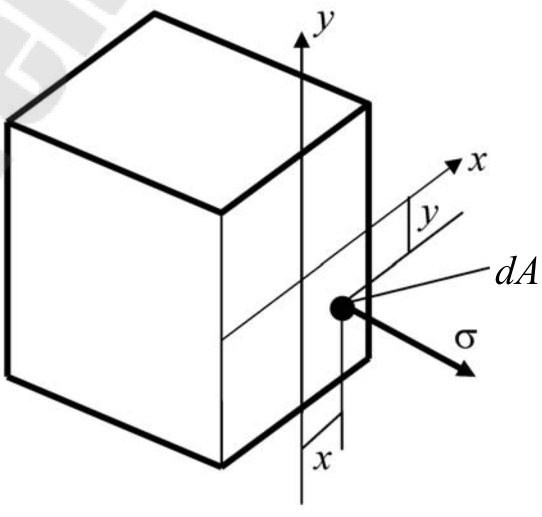


Рис. 11.1

Данное выражение представляет собой статическую сторону задачи о плоском изгибе.

Однако его нельзя использовать для определения нормальных напряжений, так как неизвестен закон распределения напряжений по сечению.

Геометрическая сторона задачи о плоском изгибе

Выделим двумя поперечными сечениями элемент балки длиной dz (рис. 11.2).

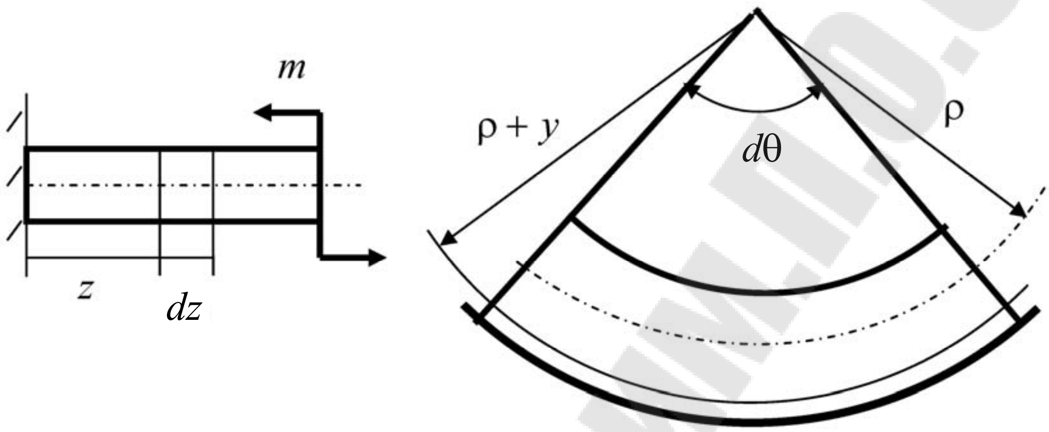


Рис. 11.2

Под нагрузкой нейтральная ось искривляется (радиус кривизны ρ), а сечения поворачиваются относительно своих нейтральных линий на угол $d\theta$. Длина отрезка волокон нейтрального слоя при этом остается неизменной

$$dz = \rho \cdot d\theta .$$

Определим длину отрезка волокон, отстоящего от нейтрального слоя на расстоянии y

$$dz_1 = (\rho + y)d\theta .$$

Относительное удлинение в этом случае будет

$$\varepsilon = \frac{dz_1 - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)dz}{\rho \cdot dz} = \frac{y}{\rho} .$$

Зависимость $\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$ отражает геометрическую сторону задачи о плоском изгибе, из которой видно, что деформации продольных волокон изменяются по высоте сечения по линейному закону.

Физическая сторона задачи о плоском изгибе

Используя закон Гука при осевом растяжении, получаем

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} .$$

Подставив в выражение, отражающее статическую сторону задачи о плоском изгибе, значение σ, получаем

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \int_A E\frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}.$$

Подставив значение $\frac{1}{\rho}$ в исходную формулу, получаем

$$\sigma = E\frac{M_x}{EI_x} y = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Данное выражение отражает физическую сторону задачи о плоском изгибе, которое дает возможность рассчитать нормальные напряжения по высоте сечения.

Хотя это выражение получено для случая чистого изгиба, но как показывают теоретические и экспериментальные исследования, оно может быть использовано и для плоского поперечного изгиба.

Нейтральная линия

Положение нейтральной линии определим из условия равенства нулю нормальной силы в сечениях балки при чистом изгибе

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M_x}{I_x} y dA.$$

Так как $M_x \neq 0$ и $I_x \neq 0$, то необходимо, чтобы нулю был равен интеграл $\int_A y dA$. Данный интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси. Так как статический момент сечения равен нулю только относительно центральной оси, следовательно, нейтральная линия при плоском изгибе совпадает с главной центральной осью инерции сечения.

Касательные напряжения

Касательные напряжения, которые возникают в сечениях балки при плоском поперечном изгибе, определяются по зависимости:

$$\tau = \frac{QS_{xo}}{bI_x},$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом сечении балки; S_{xo} – статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси балки; b – ширина сечения в рассматриваемом слое; I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Касательные напряжения равны нулю в крайних волокнах сечения и максимальны в волокнах нейтрального слоя.

ТЕМА 12. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Расчет балок на прочность при изгибе

Прочность балки будет обеспечена, если будут выполняться условия:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma]; \; \tau_{\max} \le [\tau].$$

Максимальные нормальные напряжения при изгибе возникают в сечениях, где действует максимальный изгибающий момент, в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в сечениях балки, где действует максимальная поперечная сила

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{xo}}{bI_x}.$$

Касательные напряжения $\tau_{\max}$ обычно малы по сравнению с $\sigma_{\max}$ и в расчетах, как правило, не учитываются. Проверка по касательным напряжениям производится только для коротких балок.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

При расчете балок на прочность необходимо знать характер изменения изгибающего момента и поперечной силы вдоль оси балки и знать положение опасного сечения. С этой целью строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила Q_y в сечении численно равна алгебраической сумме всех внешних сил справа или слева от сечения.

Изгибающий момент M_x в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил справа или слева от сечения.

Если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения, то поперечная сила положительна (рис. 12.1).

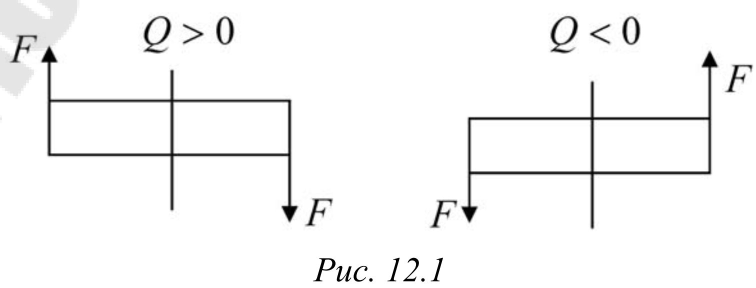


Рис. 12.1

Изгибающий момент будет положительным, если при действии момента внешних сил балка искривляется выпуклостью вниз (рис. 12.2).

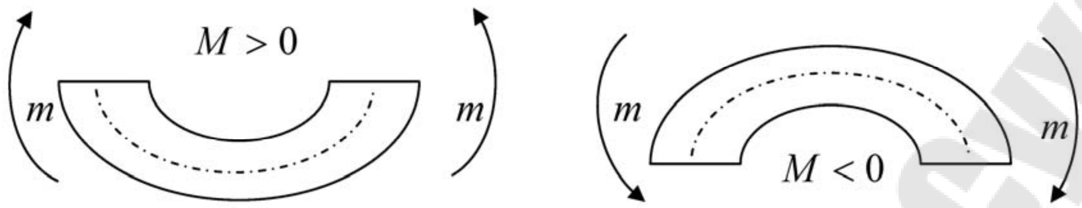


Рис. 12.2

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов рассмотрим на конкретном примере.

Пусть на балку действует внешний изгибающий момент m = 6 кН·м и внешняя сила F = 12 кН, $l = 1$ м. Определим реакции в опорах A и B. Составим уравнения равновесия моментов всех внешних сил относительно опор A и B

$$\sum M_A = 0;\ -F \cdot l + m + R_B \cdot 3l = 0;$$
$$\sum M_B = 0;\ -R_A \cdot 3l + F \cdot 2l + m = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{F \cdot l - m}{3l} = \frac{12 \cdot 1 - 6}{3 \cdot 1} = 2 \text{ кН};$$
$$R_A = \frac{F \cdot 2l + m}{3l} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 6}{3 \cdot 1} = 10 \text{ кН}.$$

Проведем сечения на каждом характерном участке и определим значения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x.

В сечении 1

$$Q_{y1} = R_A;\ M_{x1} = R_A z_1, \text{ где } 0 \le z_1 \le l.$$

При $z_1 = 0$ м; $Q_{y1} = 10$ кН; $M_{x1} = 10 \cdot 0 = 0$ кН · м;
при $z_1 = l = 1$ м; $Q_{y1} = 10$ кН; $M_{x1} = 10 \cdot 1 = 10$ кН · м.

В сечении 2

$$Q_{y2} = R_A - F;\ M_{x2} = R_A(l + z_2) - Fz_2, \text{ где } 0 \le z_2 \le l.$$

При $z_2 = 0$ м, $Q_{y2} = 10 - 12 = -2$ кН; $M_{x2} = 10 \cdot 1 = 10$ кН · м;
при $z_2 = l = 1$ м; $Q_{y2} = -2$ кН; $M_{x2} = 10(1+1) - 12 \cdot 1 = 8$ кН · м.

В сечении 3

$$Q_{y3} = -R_B;\ M_{x3} = R_B z_3;\ 0 \le z_3 \le l.$$

При $z_3 = 0$; $Q_{y3} = -R_B = -2$ кН; $M_{x3} = 2 \cdot 0 = 0$ кН · м;
при $z_3 = l = 1$ м; $Q_{y3} = -2$ кН; $M_{x3} = 2 \cdot 1 = 2$ кН · м.

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 12.3).

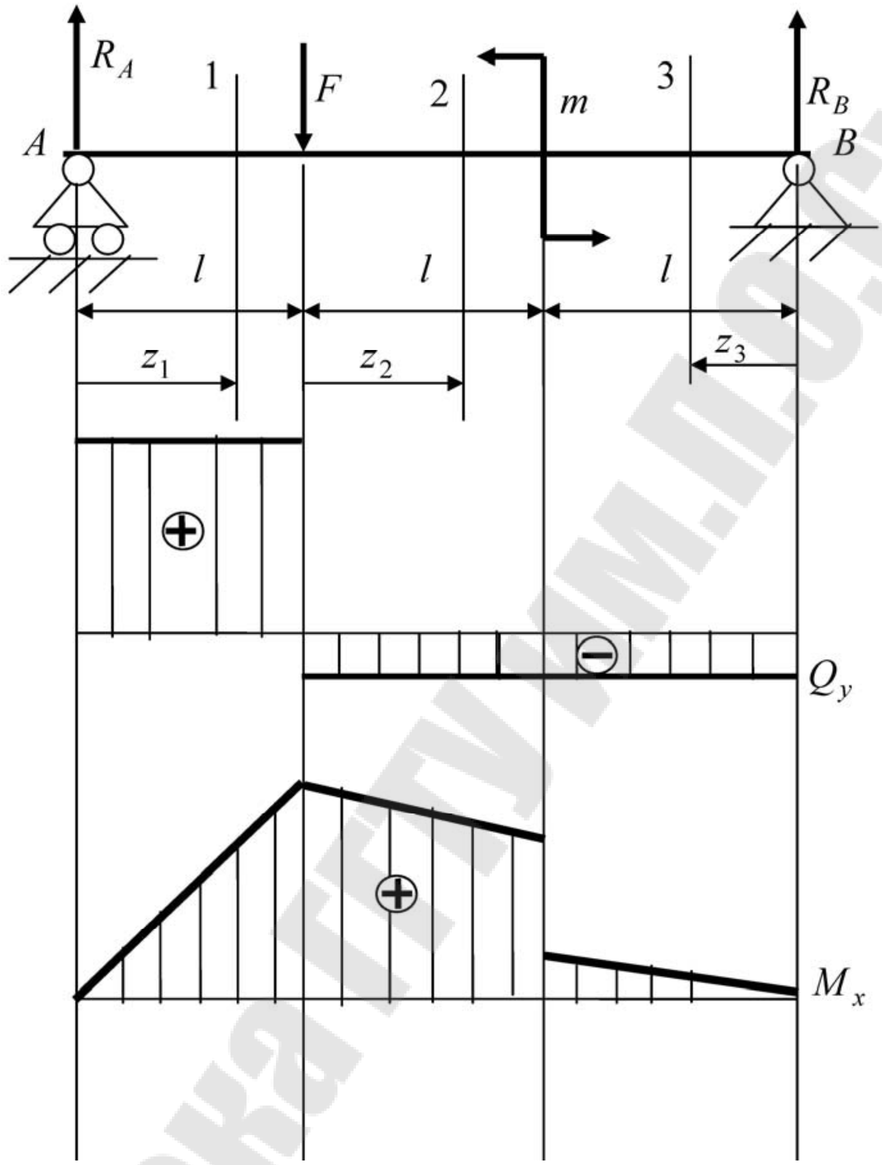


Рис. 12.3

ТЕМА 13. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Основные положения

Для определения напряженного состояния в какой-либо точке тела нужно вокруг этой точки выделить элементарный параллелепипед. В общем случае по граням этого параллелепипеда будут действовать нормальные и касательные напряжения. Зная эти напряжения, можно определить направления главных площадок, по которым будут действовать только нормальные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3, которые называются главными напряжениями.

Если из трех главных напряжений два будут равны нулю, то имеет место линейное напряженное состояние в данной точке тела.

Если из трех главных напряжений одно будет равно нулю, то имеет место плоское напряженное состояние в данной точке тела.

Если ни одно из трех главных напряжений не равно нулю, то имеет место объемное напряженное состояние в данной точке тела.

Установлено, что в общем случае в каждой точке нагруженного тела действуют три главных напряжения.

Опыты показывают, что начало стадии пластических деформаций и характер разрушения зависит от модуля, знака и соотношения главных напряжений. Поэтому, чтобы судить о прочности материала при сложном напряженном состоянии, нужно знать, в какой момент при той или иной комбинации главных напряжений наступает опасное состояние материала.

В связи с этим возникает задача, что, зная максимально допустимое напряжение при простом растяжении, найти равное эквивалентное ему напряжение из комбинации главных напряжений при сложном напряженном состоянии.

Единственным практическим путем решения этой задачи является установление общих критериев разрушения, которые позволили бы оценить опасность перехода материала в предельное состояние при сложном напряженном состоянии, используя лишь данные опытов на растяжение.

Гипотезы прочности представляют собой предположения о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора.

Наиболее важными факторами, связанными с возникновением опасного состояния материала являются: нормальные и касательные напряжения, линейные деформации и потенциальная энергия деформации.

Эквивалентным напряжением называется напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным заданному напряженному состоянию.

Заменяя сложное напряженное состояние эквивалентным растяжением, получаем возможность использовать при сложном напряженном состоянии условие прочности при простом растяжении:

$$\sigma_{экв} \le \lfloor \sigma_р \rfloor.$$

Гипотеза наибольших нормальных напряжений

Эта гипотеза была выдвинута Галилеем 1638 г. и носит название первой теории прочности.

В основу теории наибольших напряжений положена гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине нормальных напряжений.

Согласно этой теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее по модулю главное напряжение достигает предельного значения для заданного материала при простом растяжении (сжатии). Условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 \le [\sigma_р] \text{ или } \sigma_{экв} = \sigma_3 \le [\sigma_{сж}].$$

Эта теория прочности дает положительные результаты лишь для некоторых хрупких материалов.

Гипотеза наибольших линейных деформаций

Эта гипотеза была выдвинута Мариоттом в 1682 г. и носит название второй теории прочности.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшая по модулю относительная линейная деформация достигает предельного значения при простом растяжении или сжатии.

Максимальные относительные деформации согласно обобщенному закону Гука определяются при растяжении и сжатии соответственно по зависимостям:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \; \varepsilon_{max} = |\varepsilon_3| = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)].$$

Предельное значение относительной деформации при растяжении

$$\varepsilon_{пред} = \frac{\sigma_в}{E}.$$

Откуда получаем

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \sigma_в.$$

Тогда условия прочности при растяжении и сжатии имеют вид:

$$\sigma_{экв} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \le [\sigma_p]; \sigma_{экв} = [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \le [\sigma_{сж}].$$

Экспериментальная проверка данной гипотезы выявила ряд существенных недостатков, поэтому она не применяется для расчетов.

Гипотеза наибольших касательных напряжений

Эта гипотеза была выдвинута Кулоном в 1773 г. и носит название третьей теории прочности.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает значения, предельного для данного материала.

При объемном напряженном состоянии

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \le [\tau] = \frac{[\sigma_р]}{2},$$

или

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma_р].$$

Во многих практических случаях третья теория прочности дает удовлетворительные результаты.

Подставляя значения главных нормальных напряжений, выраженных через нормальные и касательные напряжения, получаем

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma_р].$$

Гипотеза энергии формоизменения

Эта гипотеза была выдвинута Бельтрами в 1885 г. и Губером в 1904 г. и носит название четвертой теории прочности.

Согласно данной теории прочности опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает предельного для данного материала значения.

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия изменения формы, выраженная через главные напряжения, определяется следующим уравнением:

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

Предельное значение при простом растяжении

$$u^{\text{р}}_{\text{фпред}} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{\text{т}}^2.$$

Условие прочности в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \le [\sigma_{\text{р}}].$$

Подставляя значения главных нормальных напряжений, выраженных через нормальные и касательные напряжения, получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2+3\tau^2}.$$

Гипотеза прочности Мора (пятая теория прочности)

Гипотеза прочности Мора позволяет учесть различие в свойствах материала при растяжении и сжатии. Ее можно получить путем модификации гипотезы наибольших касательных напряжений.

Условие прочности по гипотезе Мора имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \le [\sigma_{\text{р}}];\ k \approx \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{[\sigma_{\text{сж}}]}.$$

ТЕМА 14. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Понятие о сложном сопротивлении

К сложному сопротивлению относятся такие виды нагружения бруса, при которых в поперечных сечениях возникают одновременно не менее двух внутренних силовых факторов. Исключением является поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя в сечениях возникает изгибающий момент и поперечная сила. Это связано с тем, что в большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость проводятся без учета влияния поперечной силы.

Случаи сложного сопротивления можно словно разделить на две группы.

К первой группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда в опасных точках бруса напряженное состояние является одноосным. В эту группу относят косой изгиб (рис. 14.1, *а*), изгиб с растяжением (рис. 14.1, *б*), внецентренное растяжение-сжатие (рис. 14.1, *в*) и др.

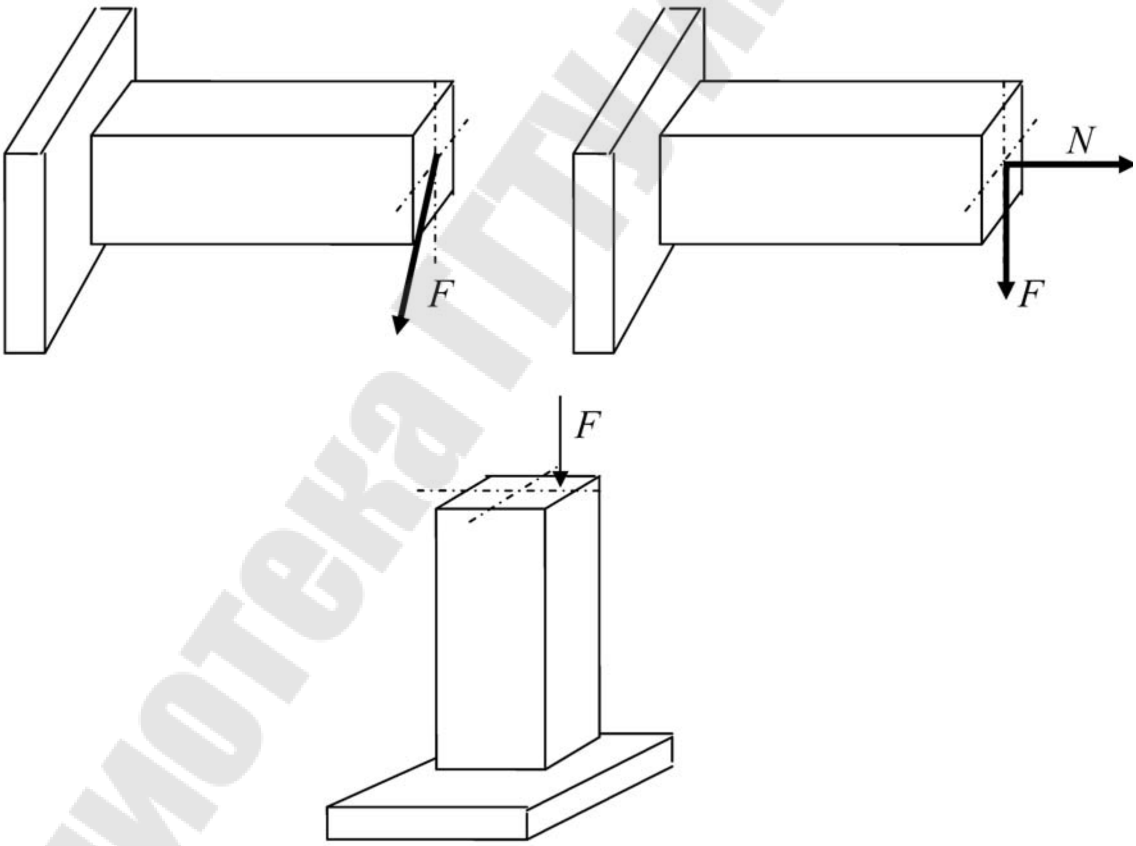


Рис. 14.1

При косом изгибе условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} x_{\max} \le [\sigma_{\text{р}}].$$

Условие прочности при изгибе с растяжением, пренебрегая действием поперечных сил, имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{N}{A} \le [\sigma_\text{р}].$$

Ко второй группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда напряженное состояние является плоским. Например, изгиб с кручением (рис. 14.2).

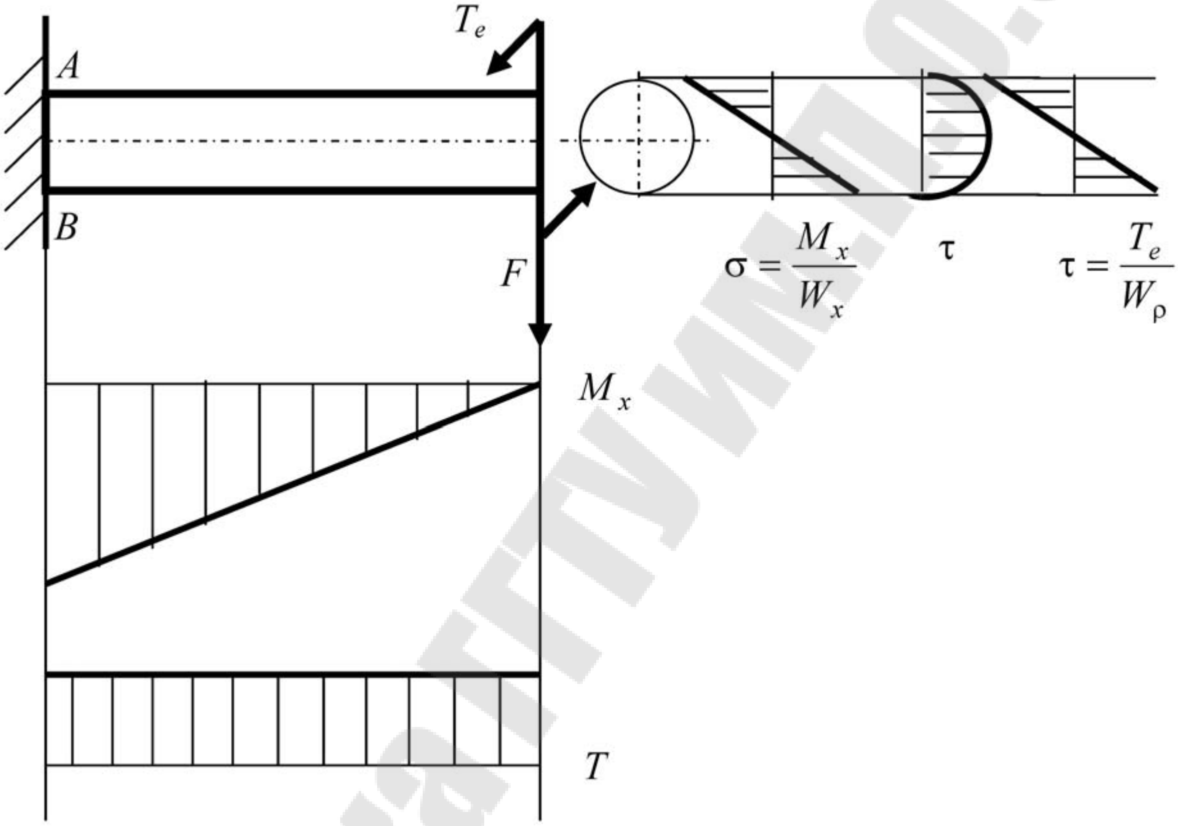


Рис. 14.2

Для случая нагружения, относящегося к первой группе, в отличие от второй группы, нет необходимости в применении гипотез прочности.

Изгиб с кручением

На практике часто встречаются стержни круглого и некруглого сечения, подверженные одновременному действию крутящих и изгибающих моментов.

Такому нагружению подвержены валы машин и механизмов и многих других конструкций.

Для расчета бруса необходимо в первую очередь установить опасные сечения. Для этого необходимо построить эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис. 14.2).

Начнем с того, что, пользуясь принципом независимости действия сил, определим отдельно напряжения, возникающие в брусе при кручении, и отдельно при изгибе.

От кручения в поперечных сечениях бруса возникают касательные напряжения, достигающие наибольшего значения в точках контура сечения

$$\tau = \frac{T_e}{W_\rho}.$$

При изгибе в поперечных сечениях бруса возникают нормальные напряжения, достигающие наибольшего значения в крайних волокнах бруса

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}$$

и касательные напряжения, достигающие наибольшего значения у нейтральной оси, и определяемые по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y S_{xo}}{I_x b}.$$

Эти напряжения значительно меньше напряжений от крутящего момента, поэтому ими пренебрегают.

Опасное сечение бруса будет у заделки, где действуют максимальные напряжения от изгиба и кручения. Опасными точками будут точки A и B.

Рассмотрим напряженное состояние в наиболее опасной точке A (рис. 14.3). Так как напряженное состояние двухосное, то для проверки прочности применяет одну из гипотез.

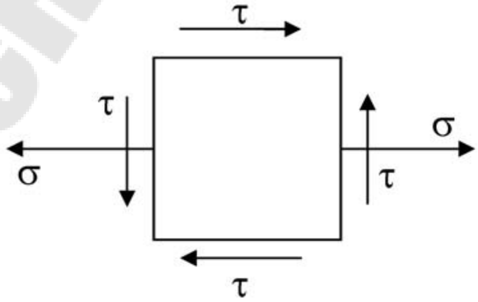


Рис. 14.3

Применим третью теорию прочности

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma_р].$$

Учитывая, что $\sigma = \dfrac{M_x}{W_x}$ и $\tau = \dfrac{T_e}{2W_x}$, получаем

$$\sigma_{экв} = \frac{\sqrt{M_x^2 + T_e^2}}{W_x} \le [\sigma_р].$$

Отсюда для подбора сечения находим требуемый момент сопротивления

$$W_x \ge \frac{\sqrt{M_x^2 + T_e^2}}{[\sigma_р]}.$$

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент запаса прочности s вычисляется по формуле

$$s = \frac{\sigma_т}{\sigma_{экв}}.$$

ТЕМА 15. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ РАЗЪЕМНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Шпоночные соединения

Соединение двух соосных цилиндрических деталей (вала и ступицы) для передачи вращающего движения между ними осуществляется с помощью шпонки – специальной детали, закладываемой в пазы соединяемых вала и ступицы.

На основные виды шпонок имеются ГОСТы, которые предусматривают размеры их поперечных сечений и соответствующих пазов в валу и втулке в зависимости от диаметра вала. Длина шпонки выбирается исходя из длины ступицы, но ее исполнительная длина, должна быть стандартной.

Шпоночные соединения разделяют на соединения ненапряженные и напряженные.

Наибольшее распространение получили ненапряженные шпоночные соединения, сочетающиеся с посадкой ступицы на вал с гарантированным натягом, которые обеспечивают хорошее центрирование и высокую работоспособность соединения. К ненапряженным шпоночным соединениям относятся соединения призматической шпонкой, сегментной шпонкой и круглой шпонкой. Наиболее распространены соединения призматической шпонкой (рис. 15.1).

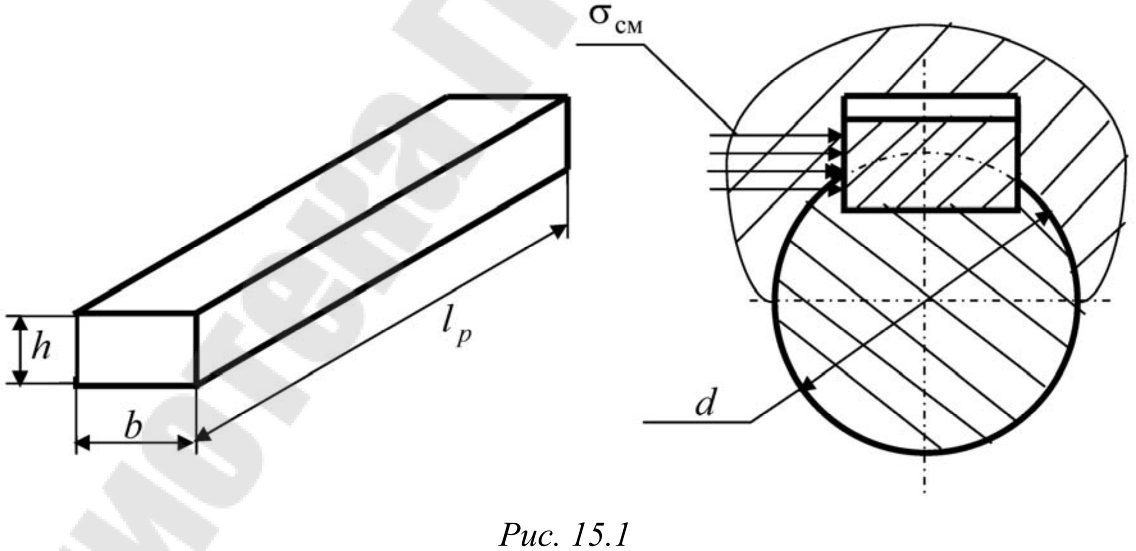


Рис. 15.1

Эти шпонки имеют прямоугольное поперечное сечение. Размеры $b \times h$ этих шпонок и пазов в вале и ступице регламентированы ГОСТом 23360-78 в зависимости от диаметра вала. Размеры $b \times h$ подобраны таким образом, что среза шпонки не происходит, поэтому шпонку проверяют по напряжениям смятия. При расчете принимается, что сила давления ступицы на выступающую часть шпонки равномерно распределена как по высоте, так и по длине шпонки.

Условия прочности на смятие в этом случае будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{dl_{\text{р}}(h - t_1)} \le [\sigma_{\text{см}}],$$

где T – вращающий момент, передаваемый валом; d – диаметр вала; h – высота шпонки; t_1 – глубина шпоночного паза в валу; l_p – рабочая длина шпонки.

К напряженным шпоночным соединениям относятся соединение клиновыми шпонками (рис. 15.2). К ним относятся соединения врезной клиновой шпонкой, шпонкой на лыске, фрикционной шпонкой и тангенциальной шпонкой.

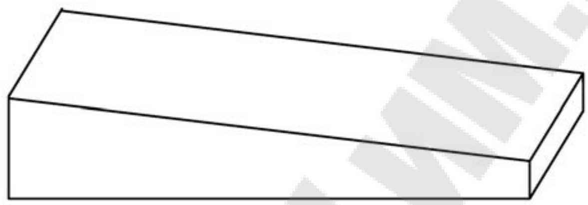


Рис. 15.2

Клиновые шпонки создают напряженное соединение и могут передавать вращающий момент, осевую силу и ударные нагрузки. Область применения *врезных клиновых шпонок* ограничена по следующим причинам:

1) они вызывают радиальные смещения оси ступицы по отношению к оси вала, что приводит к биению насаженной детали;

2) не обеспечивают необходимой прочности соединения в том случае, когда вал работает с реверсивным движением, которое вызывает ослабление шпоночного соединения;

3) вызывает большую концентрацию напряжений в углах паза.

В точном машиностроении и в ответственных соединениях их не применяют.

Размеры клиновых шпонок регламентированы ГОСТ 24068-80. В отличие от призматических шпонок, у клиновых шпонок рабочими гранями являются широкие грани, а на боковых гранях имеется зазор. Одна из широких граней шпонки имеет по длине уклон 1:100, обеспечивающий самоторможение клиновой шпонки. При соединении врезной клиновой шпонкой впадина паза на валу не имеет уклона относительно оси вала, а впадина паза в ступице имеет по длине уклон относительно оси, соответствующий уклону клина, т. е. 1:100.

Для установки *шпонки на лыске* на валу выполняется плоский срез (лыска). Такая обработка значительно меньше ослабевает вал. В ступице устанавливаемой детали делается паз с уклоном 1:100.

Грань *фрикционной шпонки*, которая соприкасается с валом, выполняется цилиндрического радиуса, равного радиусу вала. К достоинству фрикционной шпонки относится то, что ее применение не приводит к ослаблению сечения вала. Она требует лишь паза в ступице устанавливаемой детали с уклоном 1:100. Несущая способность фрикционной шпонки меньше, чем врезной. В основном ее применяют, если требуется часто передвигать ступицу вдоль вала или смещать в угловом направлении.

Нагрузка в соединении с фрикционной шпонкой передается только за счет трения, возникающего на контактируемых поверхностях. Поэтому это соединение можно использовать как предохранительное при перегрузках.

Тангенциальная шпонка состоит из двух односкосных клиньев, прижатых друг к другу скошенными гранями. Узкие грани шпонки параллельны и являются рабочими. Параллельность рабочих граней позволяют изготавливать пазы на валу и в ступице без уклона. В сечении соединения одна из широких граней шпонки располагается касательно к окружности вала.

Допустимая сила между врезной клиновой шпонкой и валом определяется из расчета на смятие по треугольной эпюре давлений по ширине шпонки, которая образуется в результате забивки шпонки и действия вращающего момента.

Прочность по смятию широкой грани у шпонки, поставленной с предварительной затяжкой:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{12T}{bl_{\text{р}}(b + 6fd)} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где T – вращающий момент; b – ширина шпонки; $l_{\text{р}}$ – рабочая длина шпонки; f – коэффициент трения ($f = 0{,}15\ldots0{,}2$); d – диаметр вала.

Соединения шпонки на лыске рассчитывают на прочность по смятию по тем же зависимостям, что и клиновые врезные шпонки.

При расчете прочности соединения фрикционной шпонкой делается допущение, что момент сил трения, приложенный к фрикционной шпонке, не изменяет формы первоначальной эпюры напряжений σ_1.

Условие прочности в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{T}{blfd} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

При расчете на прочность соединения тангенциальной шпонкой принимается, что вся нагрузка со стороны ступицы на шпонку воспринимается ее узкой гранью. Трением между поверхностями ступицы и вала, возникающим при заклинивании шпонок, пренебрегают.

Условие прочности на смятие по узкой грани тангенциальной шпонки имеет вид:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{(t-c)l_{\text{р}}(d-t)} \le [\sigma_{\text{см}}],$$

где T – вращающий момент; t – толщина шпонки; $l_{\text{р}}$ – рабочая длина шпонки; d – диаметр вала; c – ширина фаски.

Шлицевые соединения

Шлицевые соединения можно рассматривать как многошпоночные, когда шпонки выполнены заодно с валом. Шлицевые соединения имеют ряд преимуществ по сравнению со шпоночными соединениями:

1) детали, установленные на шлицевых валах, лучше центрируются и имеют более точное направление при перемещении вдоль оси вала;

2) обеспечивается возможность передачи большего вращающего момента;

3) значительно меньше ослабления вала;

4) выше прочность шлицевых валов при действии динамических нагрузок.

Поэтому шлицевые соединения нашли широкое применение в автотракторной, станкостроительной и самолетостроительной промышленности.

Основным расчетом считается расчет на износ. Условие износостойкости имеет вид:

$$\sigma = \frac{T}{S_A l} \le [\sigma_{\text{изн}}],$$

где T – вращающий момент, передаваемый соединением; l – рабочая длина соединения; S_A – статический момент единицы длины рабочей поверхности шлицев относительно оси вала;

$$S_A = 0{,}5zhd_{\text{ср}},$$

где z – число шлицов; h – высота поверхности контакта шлицов; $d_{\text{ср}}$ – средний диаметр поверхности контакта; $[\sigma_{\text{изн}}]$ – допускаемое среднее давление из расчета на износ.

Для прямобочных шлицевых соединений средний диаметр поверхности контакта и высоту поверхности контакта рассчитывают по следующим зависимостям:

$$d_{\text{ср}} = \frac{D+d}{2};\ h = \frac{D-d}{2} - 2f,$$

где D – наружный диаметр шлицевого вала; d – внутренний диаметр шлицевого вала; f – размер фаски.

Резьбовые соединения. Основные понятия

Резьбовыми называют разъемные соединения, выполняемые с помощью резьбовых крепежных деталей – винтов, гаек, шпилек или резьбы, непосредственно нанесенной на соединяемые детали.

Резьбовые соединения являются наиболее распространенным видом разъемных соединений. Они в основном применяются в следующих случаях:

– для устранения возможности перемещения соединяемых деталей;

– для удержания деталей на определенном расстоянии друг от друга;

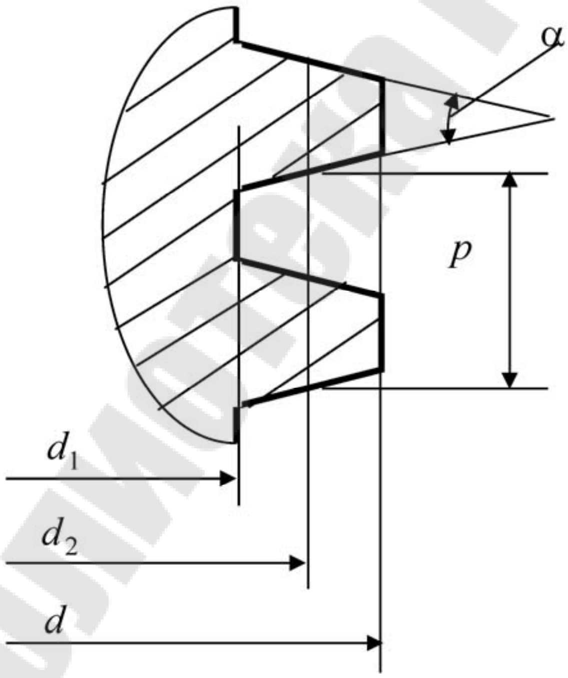
– для обеспечения плотности стыка соединяемых деталей;

– для осуществления поступательного движения (пресса, домкраты, ходовые винты);

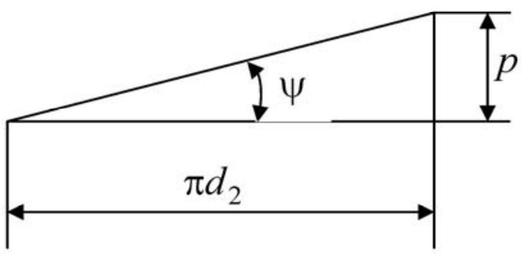
– для получения точных относительных перемещений (регулировочные винты).

По форме основной поверхности резьбы подразделяют на цилиндрические и конические. Широкое применение имеют детали с цилиндрической резьбой.

Параметры резьбы показаны на рис. 15.3.



а)



б)

Рис. 15.3

Любая резьба имеет три диаметра (рис. 15.3, *а*) внутренний d_1, средний d_2 и наружный d.

Профиль резьбы характеризуют углом профиля α, т. е. углом между прямолинейными боковыми сторонами профиля резьбы.

Расстояние между одноименными сторонами двух соседних профилей, измеренное в направления оси резьбы, называется шагом резьбы и обозначается p. Для многозаходных резьб используют термин ход резьбы, который обозначается p_h, и равен произведению шага на число заходов. При повороте гайки на один оборот она перемещается вдоль оси винта на шаг или на ход.

Угол подъема ψ (рис. 15.3, *б*) развертки винтовой линии по среднему диаметру резьбы определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{p}{\pi d_2}.$$

По направлению винтовой линии различают правую и левую резьбу. Левую резьбу применяют только в специальных случаях.

Резьбы также подразделяются по назначению и форме профиля. Крепежные резьбы бывают треугольные и круглые. Резьбы винтовых механизмов – трапецеидальные, упорные и прямоугольные.

Метрическая резьба является основным видом крепежных деталей.

ТЕМА 16. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ РАЗЪЕМНЫХ СОЕДИНЕНИЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Определение нагрузки, действующей на болт

В большинстве случаев соединение деталей осуществляется группой болтов, поэтому необходимо уметь определить силу, действующую на наиболее нагруженный болт при различных случаях нагружения.

Случай 1. На групповое болтовое соединение действует сила, проходящая через центр стыка и направленная параллельно осям болтов (рис. 16.1, *а*).

В этом случае делается допущение, что все болты воспринимают одинаковую нагрузку, тогда сила F_{a1}, растягивающая болт, будет равна

$$F_{a1} = \frac{F}{z},$$

где z – количество болтов в соединении.

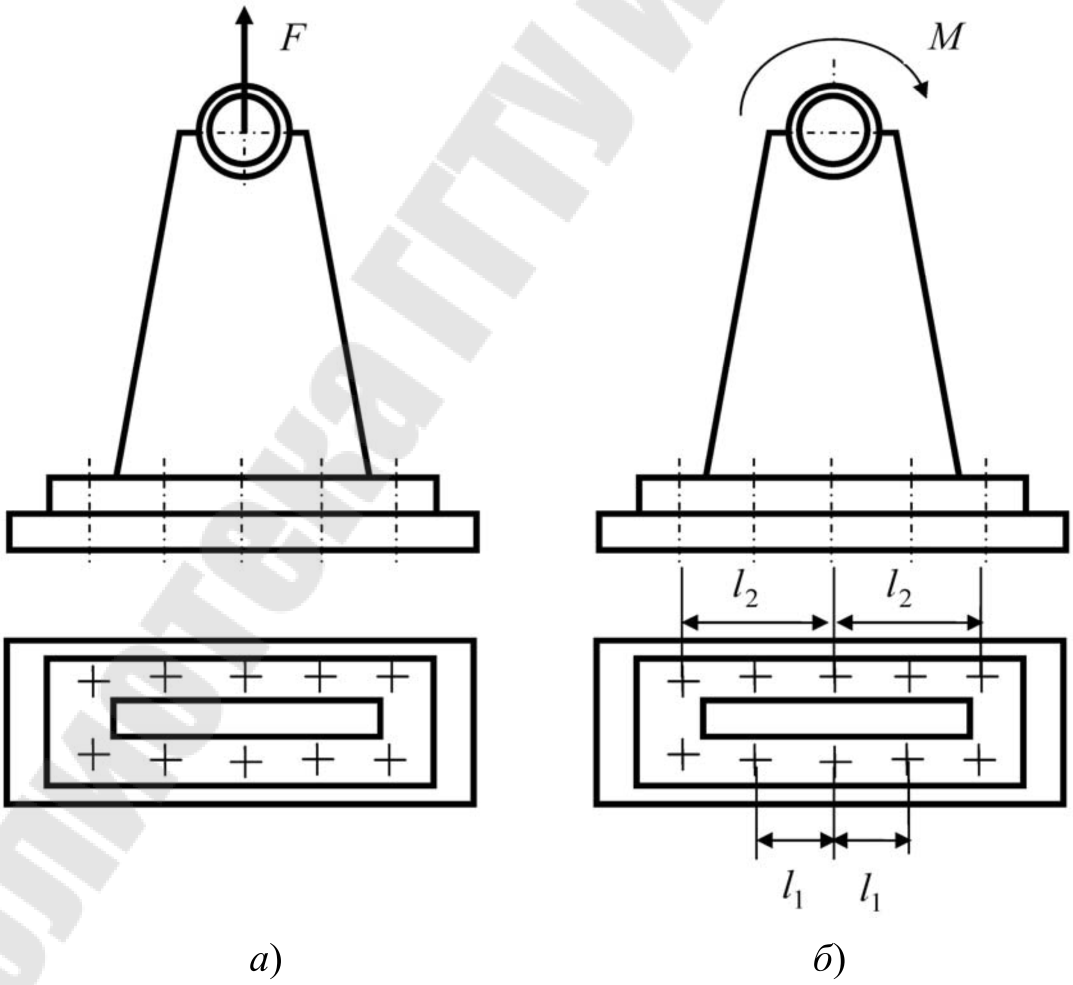


Рис. 16.1

Случай 2. На групповое болтовое соединение действует момент в плоскости, перпендикулярной плоскости стыка (рис. 16.1, *б*). Максимальная сила $F_{a\max 1}$, растягивающая болт, определяется по выражению

$$F_{a\max 1} = \frac{Ml_{\max}}{\sum l_i^2},$$

где $l_{\max}$ – максимальное расстояние от оси болта до оси, проходящей через центр стыка; l_i – расстояние от оси *i*-го болта до оси, проходящей через центр стыка.

Случай 3. На групповое болтовое соединение действует сила, проходящая через центр стыка и направленная перпендикулярно осям болтов (рис. 16.2, *а*).

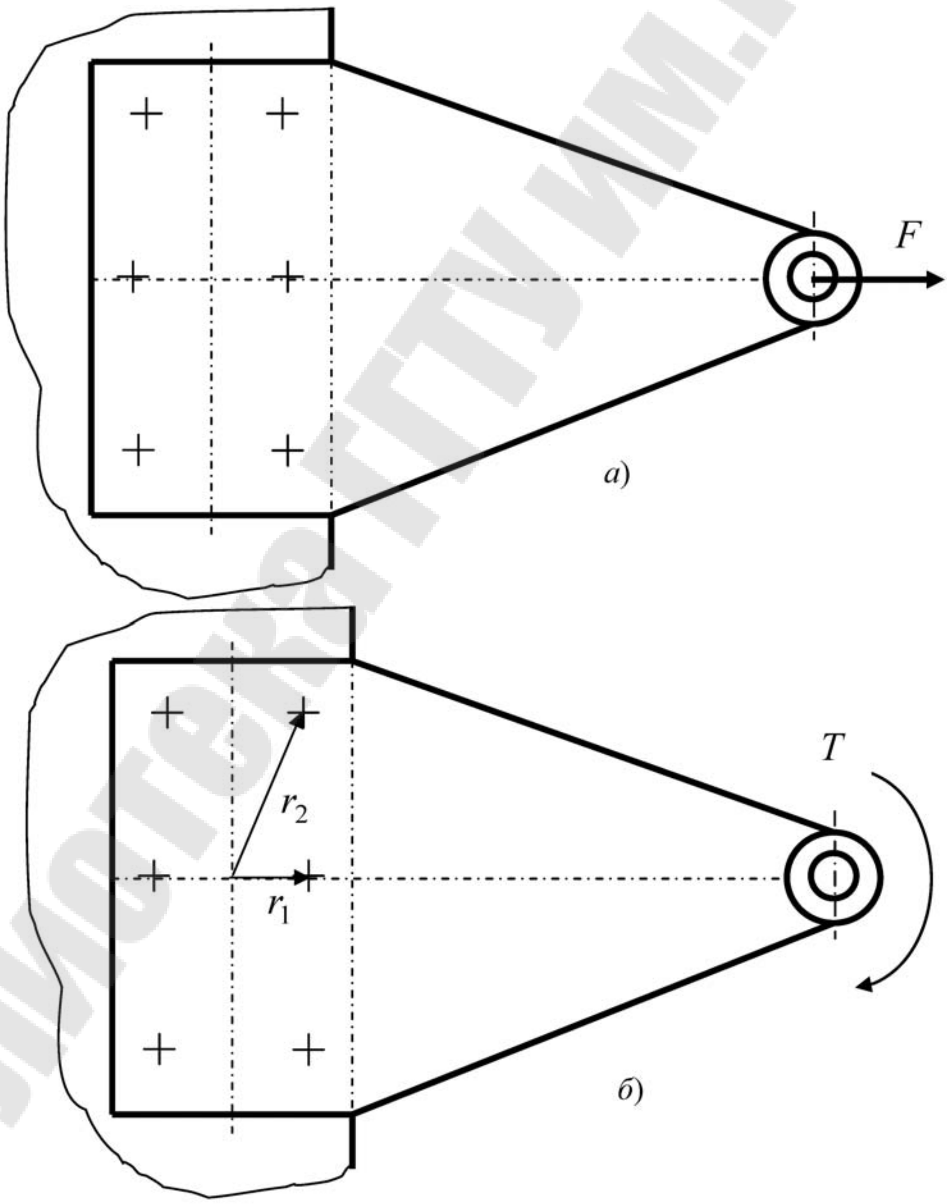


Рис. 16.2

В этом случае делается допущение, что все болты воспринимают одинаковую нагрузку, тогда сила F_{t1}, срезающая болт, будет равна

$$F_{t1} = \frac{F}{z}.$$

Случай 4. На групповое болтовое соединение действует момент в плоскости стыка (рис. 16.2, *б*). Максимальная сила $F_{t\max 1}$, растягивающая болт, определяется по выражению

$$F_{t\max 1} = \frac{Mr_{\max}}{\sum r_i^2},$$

где $r_{\max}$ – максимальное расстояние от центра стыка до оси; r_i – расстояние от центра стыка до оси *i*-го болта.

Если действующая сила не проходит через центр стыка, то ее нужно перенести в центр стыка, предварительно разложив ее на горизонтальную и вертикальную составляющие. Затем, используя принцип независимости сил, найти от каждого силового фактора силу, действующую на болт, а затем и суммарную силу.

Расчет стержня болта на прочность

Рассмотрим расчет стержня болта на прочность, когда известна сила, действующая на болт.

Случай 1. На болт действует растягивающая сила (рис. 16.3).

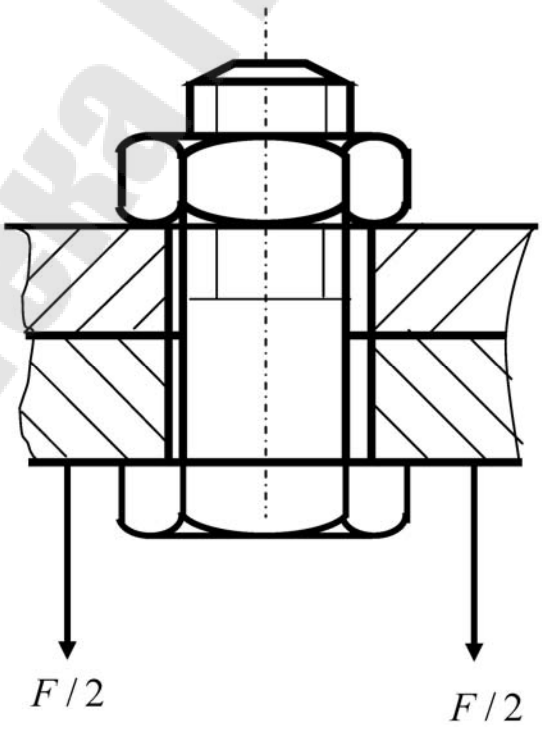


Рис. 16.3

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{р} = \frac{F}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \le [\sigma_{р}],$$

откуда требуемый внутренний диаметр болта

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_{р}]}}.$$

В данном случае не играет роли, как установлен болт с зазором или без зазора.

Случай 2. Болт установлен без зазора и на него действует сила в плоскости стыка (рис. 16.4).

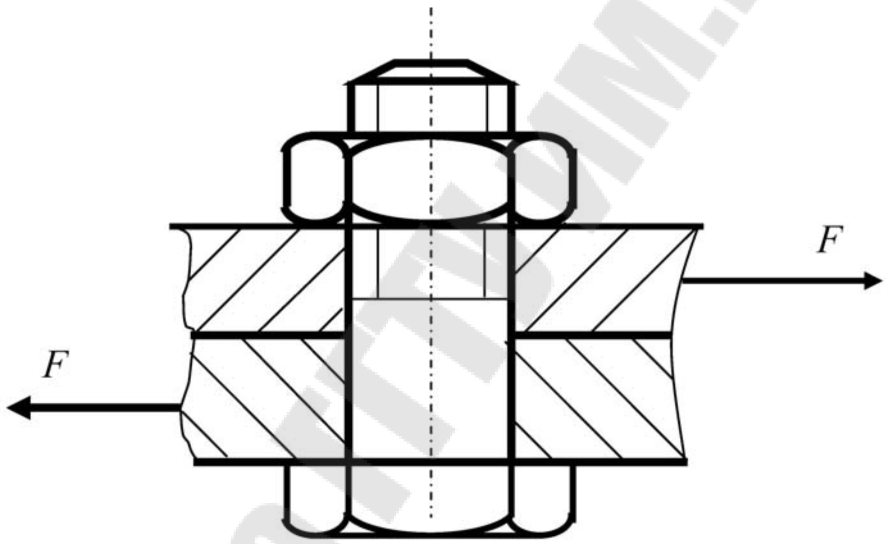


Рис. 16.4

Условие прочности болта в этом случае имеет вид

$$\tau_{ср} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \le \left[\tau_{ср}\right],$$

откуда требуемый наружный диаметр болта

$$d \ge \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_{ср}]}}.$$

Случай 3. Болт установлен с зазором и на него действует сила в плоскости стыка (рис. 16.5).

Чтобы не произошло смещение одной детали относительно другой необходимо на поверхности контакта создать силу трения $F_{тр}$, которая была бы больше сдвигающей силы F. Принимают, что сила трения $F_{\text{тр}}$ должна быть больше сдвигающей силы F на 20 %.

$$F_{\text{тр}} = 1{,}2F.$$

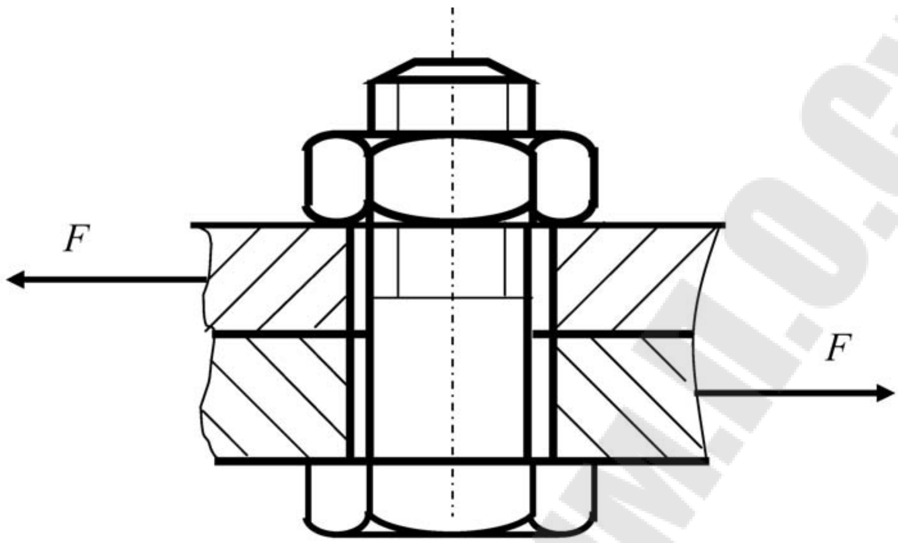


Рис. 16.5

Сила трения на поверхности контакта создается путем завинчивания гайки, при этом болт испытывает растяжение от силы затяжки $F_{\text{зат}}$ и кручение за счет трения в резьбе. Поэтому болт испытывает сложное сопротивление.

Используя третью теорию прочности, имеем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma_{\text{р}}].$$

Нормальные напряжения от силы затяжки равны

$$\sigma = \frac{F_{\text{зат}}}{\frac{\pi d_1^2}{4}}.$$

Касательные напряжения от момента трения в резьбе

$$\tau = \frac{T_{\text{рез}}}{W_\rho} = \frac{F_{\text{зат}} \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\psi + \varphi')}{\frac{\pi d_1^3}{16}},$$

где φ' – приведенный угол трения.

Подставляя значения σ и τ, получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{F_{\text{зат}}}{\frac{\pi d_1^2}{4}}\right)^2 + 4\left[\frac{F_{\text{зат}}\frac{d_2}{2}\operatorname{tg}(\psi+\varphi')}{\frac{\pi d_1^3}{16}}\right]^2} =$$

$$= \frac{F_{\text{зат}}}{\frac{\pi d_1^2}{4}}\sqrt{1+16\left[\frac{d_2\operatorname{tg}(\psi+\varphi')}{d_1}\right]^2} \le [\sigma_{\text{р}}].$$

Значение под корнем квадратным приблизительно равно 1,3. Учитывая, что сила трения

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{зат}} f,$$

получаем

$$F_{\text{зат}} = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = \frac{1{,}2F}{f}.$$

В этом случае условие прочности болта принимает вид:

$$\sigma = \frac{1{,}3\cdot 1{,}2F}{f\frac{\pi d_1^2}{4}} \le [\sigma_{\text{р}}],$$

откуда требуемый внутренний диаметр болта

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{4\cdot 1{,}3\cdot 1{,}2F}{\pi f[\sigma_{\text{р}}]}}.$$

Таким образом, рассчитывается на прочность стержень болта, когда определена сила, действующая на болт.

ТЕМА 17. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ НЕРАЗЪЕМНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Расчет сварных соединений

В зависимости от расположения деталей различают стыковое (рис. 17.1, *а*), нахлесточное (рис. 17.1, *б*) и тавровое (рис. 17.1, *в*) соединение.

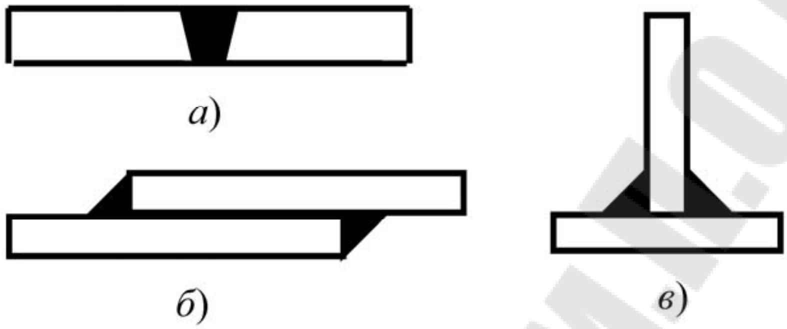


Рис. 17.1

Стыковые соединения выполняются стыковым швом и рассчитываются на разрыв (рис. 17.2).

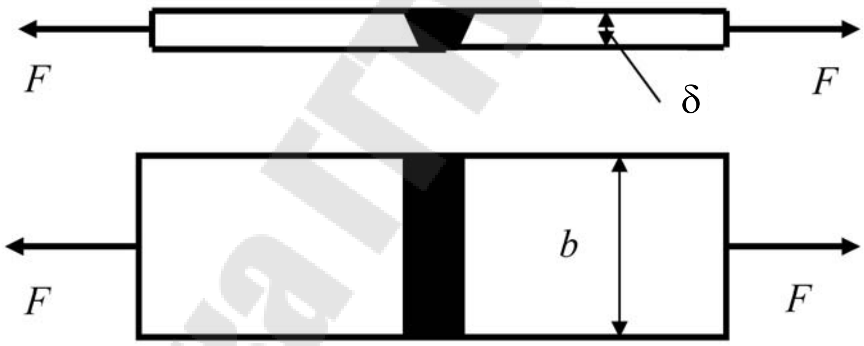


Рис. 17.2

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma'_{\text{р}} = \frac{F}{\delta b} \le \left[\sigma'_{\text{р}}\right],$$

где δ – толщина соединяемых деталей; b – ширина соединяемых деталей; $[\sigma'_{\text{р}}]$ допускаемое напряжение для сварного шва.

Нахлесточные соединения (рис. 17.3) выполняются угловыми швами и рассчитываются на срез. Срез происходит по биссекторной плоскости.

При действии на соединение силы F условие прочности для случая, изображенного на рис. 17.3, имеет вид

$$\tau'_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0{,}7k \cdot 2l_{\text{шв}}} \leq \left[\tau'_{\text{ср}}\right],$$

а при действии момента

$$\tau'_{\text{ср}} = \frac{M}{W_{\rho\text{шв}}} \leq \left[\tau'_{\text{ср}}\right],$$

где k – катет сварного шва; $l_{\text{шв}}$ – длина сварного шва; $W_{\rho\text{шв}}$ – полярный момент инерции сварных швов.

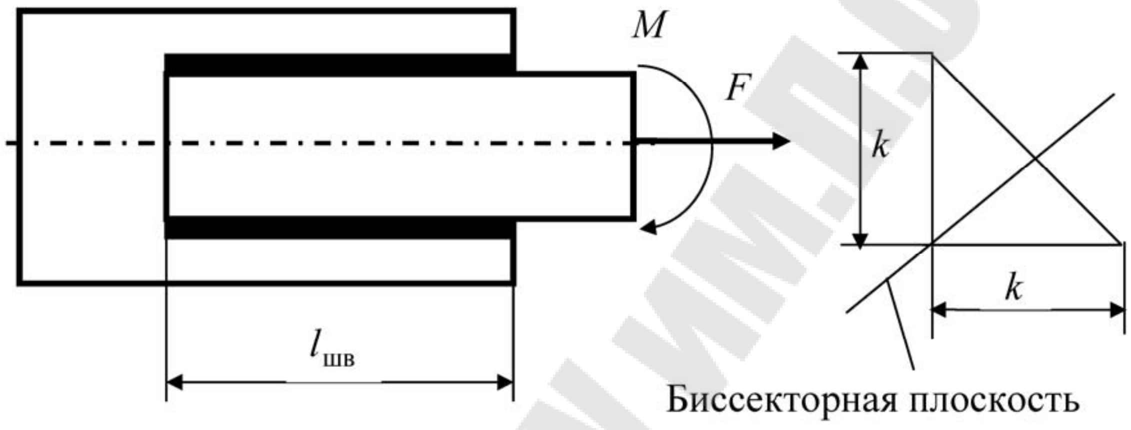


Рис. 17.3

Тавровые сварные соединения в основном выполняются угловыми швами и рассчитываются на срез по биссекторной плоскости.

При действии на тавровое сварное соединение (рис. 17.4) силы F условие прочности сварного шва имеет вид:

$$\tau'_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} = \frac{F}{0{,}7k \cdot 2h} \leq \left[\tau'_{\text{ср}}\right],$$

а при действии момента M

$$\tau'_{\text{ср}} = \frac{M}{W_x} = \frac{M}{2\frac{0{,}7kh^2}{6}} \leq \left[\tau'_{\text{ср}}\right].$$

Если действующая на сварное соединение сила не проходит через центр стыка, то ее нужно перенести в центр стыка, предварительно разложив ее на горизонтальную и вертикальную составляющую. Затем от каждого силового фактора в опасной точке определяют напряжение и находят суммарное напряжение, которое сравнивают с допускаемым напряжением для сварного шва.

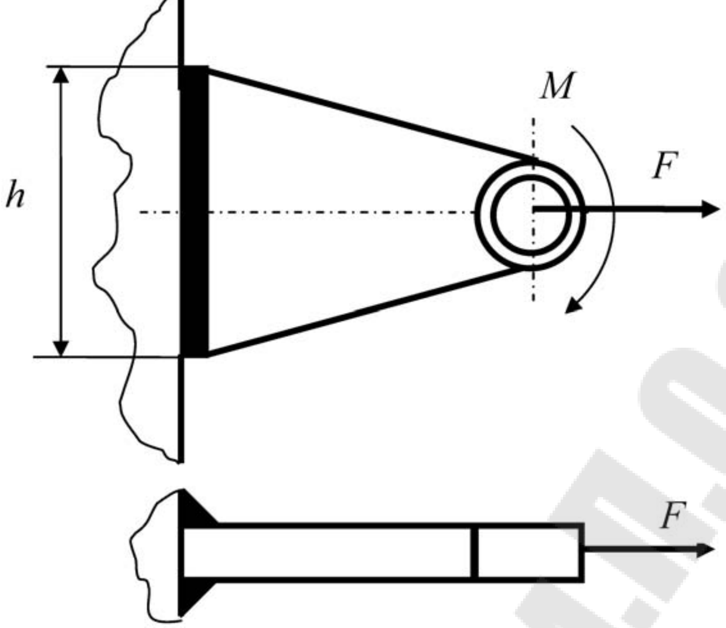


Рис. 17.4

Допускаемое напряжение для сварного шва зависит от марки свариваемого материала, вида сварки и марки применяемого электрода.

Расчет заклепочных соединений

Заклепочные соединения применяют в тех случаях, когда невозможно применить сварку.

Заклепочное соединение – неразъемное соединение деталей при помощи *заклепок*.

Заклепка – крепежная деталь, состоящая из стержня цилиндрической формы и закладной головки (рис. 17.5).

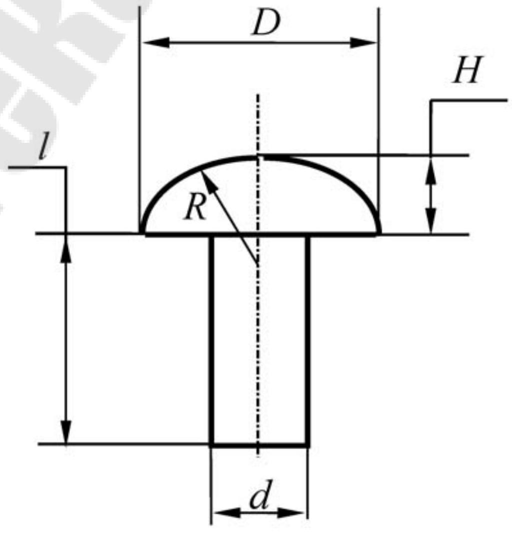


Рис. 17.5

Основные размеры заклепки: d – диаметр заклепки; l – длина заклепки; H – высота закладной головки; R – радиус сферы закладной головки; D – диаметр окружности основания закладной головки.

В соответствии с назначением заклепочные соединения подразделяются на прочные, плотные и прочноплотные соединения.

Прочные заклепочные соединения применяются в стальных конструкциях подъемно-транспортных сооружений, фермах, узлах машин общего назначения, например, для крепления лопаток в турбинах, тормозных лент, рам и колес в автомобилях, венцов зубчатых колес к ступицам и т. д.

Плотные заклепочные соединения применяются в конструкциях, требующих герметичность соединения (резервуары с небольшим внутренним давлением, топливные баки и т. д.).

Прочноплотные заклепочные соединения применяются в тех случаях, когда они должны обеспечивать кроме прочности еще и герметичность (резервуары, баки, котлы, газосборники и т. д.).

В последнее время плотные и прочноплотные соединения вытесняются сварными соединениями.

Для соединения деталей в них изготовляются отверстия, куда вставляются заклепки. Для облегчения ввода заклепки отверстия в деталях делают несколько больше, чем диаметр заклепки. Изготовление отверстий осуществляют путем сверления (точный способ) или путем продавливания (грубый способ).

Диаметр отверстия в деталях зависит от диаметра заклепки и способа изготовления отверстия.

В процессе клепки за счет протекания поперечной упругопластической деформации стержня заклепки происходит заполнения технологического зазора между стержнем и стенками отверстия.

Клепку производят без нагрева заклепок, если их диаметр не превышает 12 мм, и с нагревом до температуры 1000…1100 ºС, если диаметр больше 12 мм. Следует отметить, что при горячем способе формирования замыкающей головки обеспечивается более высокое качество заклепочного соединения. Это происходит потому, что после остывания стержня заклепки длина его уменьшается и происходит дополнительное сжатие соединяемых деталей. Силы трения на контактируемых поверхностях возрастают, что ведет к увеличению прочности заклепочного соединения, так как дополнительные силы трения препятствуют относительному смещению деталей.

Формирование замыкающей головки у заклепок из цветных металлов и сплавов проводят без нагрева.

В зависимости от расположения соединяемых деталей различают заклепочные швы внахлестку (рис. 17.6, *а*) и встык с одной накладкой и двумя накладками (рис. 17.6, *б*).

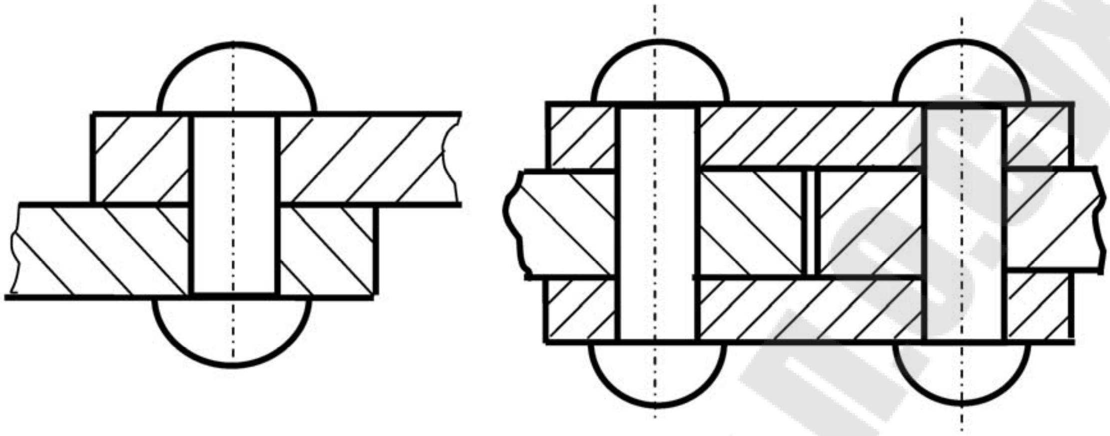


Рис. 17.6

Диаметр заклепок в односрезном силовом соединении (рис. 17.6, *а*) определяют по зависимости:

$$d = 2s,$$

а для двухсрезных заклепочных соединений (рис. 17.6, *б*)

$$d = 1{,}5s,$$

где s – толщина соединяемых элементов.

Параметрами заклепочного шва являются: t – шаг; e – расстояния от центра заклепки до края соединяемых деталей.

Минимальный шаг t размещения заклепок определяется из условия удобства формирования замыкающей головки. Максимальный шаг заклепочного соединения определяется условием плотного соприкосновения листов и зависит от жесткости соединяемых элементов. В зависимости от вида шва шаг принимают равным $t = (3...5)d$.

Расстояние e от центра заклепки до края детали в направлении действующей силы принимают в зависимости от способа изготовления отверстия: при сверлении $e = 1{,}5d$; при продавливании $e = 2d$.

При расчете заклепочного соединения, нагруженного силой в плоскости стыка, необходимо обеспечить:

– прочность заклепок *на срез*;

– прочность заклепок и стенок отверстий в соединяемых элементах *на смятие*;

– прочность соединяемых элементов по сечениям, ослабленным отверстиями под заклепки, *на растяжение*;

– прочность краев соединяемых элементов *на срез* заклепками.

При получении расчетных формул делаются следующие допущения:

1) усилие, передаваемое соединением, распределяется между заклепками равномерно, т. е. все заклепки нагружены одинаково;

2) касательные напряжения среза распределены по поперечным сечениям заклепок равномерно;

3) напряжения смятия в каждой точке поверхности контакта заклепки и стенки отверстия нормальны к этой поверхности и по модулю одинаковы;

4) разгружающее влияния сил трения, действующих на поверхности контакта, не учитывается и считается, что усилие полностью передается заклепками.

Рассмотрим расчетные зависимости на примере однорядного шва в нахлестку (рис. 17.7).

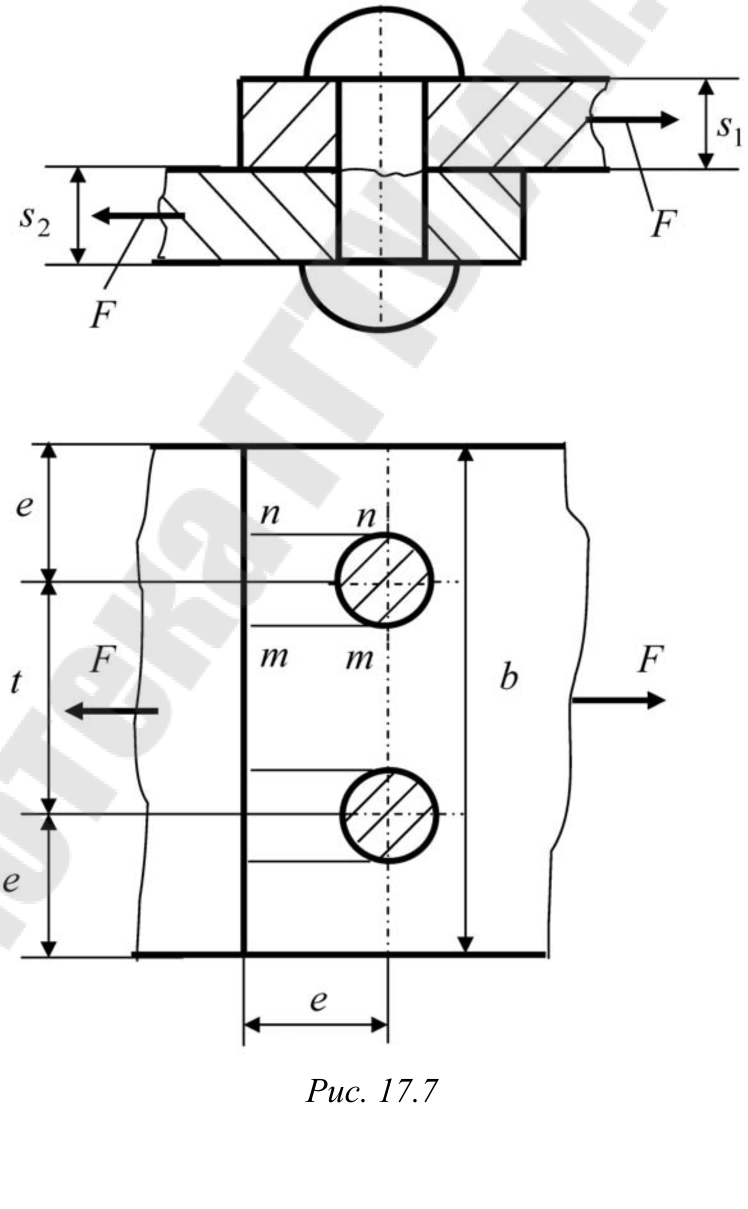


Рис. 17.7

При действии внешней силы разрушение стержня заклепки в результате среза происходит по сечению, лежащему в плоскости стыка соединяемых деталей (сечение условно показано волнистой линией).

Условие прочности заклепки по допускаемым напряжениям среза имеет вид:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{\frac{\pi d_0^2}{4} iz} \le [\tau_{\text{ср}}],$$

где d_0 – диаметр отверстия; i – число плоскостей среза; z – число заклепок в заклепочном шве.

Условие прочности заклепки по допускаемым напряжениям смятия

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d_0 s_{\min} z} \le [\sigma_{\text{см}}].$$

Условие прочности детали на разрыв в ослабленном сечении

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{F}{s_{\min}(b - d_0 z)} \le [\sigma_{\text{р}}],$$

где b – ширина соединяемой детали; $s_{\min}$ – минимальная толщина соединяемой детали.

Условие прочности краев соединяемых деталей на срез заклепками

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{s_{\min} e 2z} \le [\tau_{\text{ср}}].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Прикладная механика : учеб. пособие / А. Т. Скойбеда [и др.] ; под общ. ред. А. Т. Скойбеды. – Минск : Выш. шк., 1997. – 552 с.

2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Машиностроение, 1979. – 560 с.

3. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В. К. Качурина. – Москва : Наука, 1972. – 432 с.

4. Любощиц, М. И. Справочник по сопротивлению материалов / М. И. Любощиц, Г. М. Ицкович. – Минск : Выш. шк., 1969. – 464 с.

5. Аркуша, А. И. Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов : учеб. для машиностр. специальностей техникумов / А. И. Аркуша. – 2-е изд., доп. – Москва : Высш. шк., 1989. – 352 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Бельский Алексей Тимофеевич
Тариков Георгий Петрович

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Краткий курс лекций для студентов экономических специальностей дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. И. Жукова*
Компьютерная верстка *М. В. Лапицкий*

Подписано в печать 17.11.2008 г.

Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 4,11.
Изд. № 169.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.