УДК 681.518.54

АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРАВИЛ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

Р. П. МИГУЩЕНКО
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Украина

Постановка проблемы

Большинство используемых математических моделей классификации и распознавания образов для принятия решений в функциональной технической диагностике относятся к линейным или квадратичным моделям, реализующим в той или иной степени геометрические подходы к пространственному разделению объектов с разными функциональными состояниями. Однако для всех таких моделей характерно наличие определенных ограничений на их применение при априорной неопределенности исходной информации о диагностируемых состояниях.

Анализ литературы

Основой существующих параметрических моделей классификации и функциональной диагностики являются модели классического дискриминантного анализа, приспособленные для принятия решений в условиях ограниченных обучающих выборок [1], [2]. Параметрические модели достаточно просты, однако с увеличением размерности пространства информативных признаков увеличивается неопределенность в решениях таких моделей. Использование для уменьшения такой неопределенности непараметрических вариантов классификации и распознавания образов требует достаточно большого объема априорной информации и больших объемов памяти микропроцессорных систем принятия решений [3]–[5].

Цель статьи. Проанализировать модели параметрических правил принятия решений для задач функциональной диагностики с учетом ограниченности обучающих выборок по диагностируемым состояниям технических объектов.

Анализ вероятностных моделей параметрических правил принятия решений

Рассмотрим информационно-измерительную систему (ИИС) функциональной диагностики как систему, которая осуществляет информационно-логическое преобразование измерительных значений $x_1, \ldots x_n$, составляющих вектора входных сигналов

$$\overline{X} = (x_1, \ldots, x_n)$$

в одно из решений:

$$\begin{cases} \gamma_0 : \text{объект работоспособный;} \\ \gamma_j : \text{объект имеет } j \text{-е функциональное нарушение} \; (j = \overline{1, K}). \end{cases}$$

Если S_0 и $\{S_j\}_1^K$ – работоспособное и неработоспособное, соответственно, состояние объекта, то суммарное число состояний будет $(K+1)$.

Если априори известны условные плотности распределения вероятностей $f(x_i|S_0)$ и $f(x_i|S_j)$, $s=\overline{1,n}$, для любой составляющей x_i вектора $\overline{X}$, то выбор решения о виде состояния удобно проводить по максимуму функции правдоподобия, которая минимизирует вероятность ошибки диагностики при заданных $q_0, q_1, ..., q_K$ априорных вероятностях состояний $S_0, S_1, ..., S_K$. Такое правило называется оптимальным байесовским и является параметрическим. Оно будет правилом выбора решения γ_r, в котором вектор $\overline{X}$ относится к состоянию S_r если

$$q_r f(\overline{X}|S_r) > \max\{q_j f(\overline{X}|S_j)\},\quad j=\overline{0,(K+1)},\quad r\neq j.$$

Для случая двухальтернативных состояний S_0 и S_1 $(K=1)$ решение γ_0 или γ_1 выбирают по значению отношения правдоподобия Λ:

$$\Lambda = \frac{q_0 f(\overline{X}|S_0)}{q_1 f(\overline{X}|S_1)} \underset{\gamma_1}{\overset{\gamma_0}{\gtrless}} 1, \qquad (1)$$

где $f(\overline{X}|S_j)$, $j=\overline{0,1}$ – условная плотность распределения вероятности измерительных значений вектора $\overline{X}$.

В таблице представлены нормативные математические модели решающих функций, пересчитанных в порядке возрастания априорных сведений об условных числовых характеристиках нормально-распределенного вектора $\overline{X}$.

Виды нормативных параметрических решающих функций

Наименование решающей функции	Математическая модель решающей функции $q(\overline{X})$	Известные числовые характеристики
Линейный дискриминант Фишера	$\left[\overline{X}-0{,}5(\mu_{(0)}+\mu_{(1)})\right](\mu_{(0)}-\mu_{(1)})$	$\Sigma_{(j)}=0$; $D_{(j)}=1$; $j=\overline{0,1}$
Линейная, с независимыми информативными признаками	$\left[\overline{X}-0{,}5(\mu_{(0)}+\mu_{(1)})\right]D^{-1}(\mu_{(0)}-\mu_{(1)})$	$\Sigma_{(j)}=0$; $D_{(0)}=D_{(1)}=1$
Линейная, с зависимыми информативными признаками	$\left[\overline{X}-0{,}5(\mu_{(0)}+\mu_{(1)})\right]\Sigma^{-1}(\mu_{(0)}-\mu_{(1)})$	$\Sigma_{(0)}=\Sigma_{(1)}=1$
Квадратическая, с независимыми информативными признаками	$(\overline{X}-\mu_{(1)})' D_{(1)}(\overline{X}-\mu_{(1)})-$ $-(\overline{X}-\mu_{(0)})' D_{(0)}(\overline{X}-\mu_{(0)})+$ $+\ln(\lvert D_{(1)}\rvert)-\ln(\lvert D_{(0)}\rvert)$	$\Sigma_{(0)}=\Sigma_{(1)}=0$; $D_{(0)}\neq D_{(1)}$
Квадратическая, с зависимыми информативными признаками	$(\overline{X}-\mu_{(1)})' \Sigma_{(1)}(\overline{X}-\mu_{(1)})-$ $-(\overline{X}-\mu_{(0)})' \Sigma_{(0)}(\overline{X}-\mu_{(0)})+$ $+\ln(\lvert D_{(1)}\rvert)-\ln(\lvert D_{(0)}\rvert)$	$\Sigma_{(0)}\neq\Sigma_{(1)}$

В таблице использованы характеристики вектора $\overline{X}$, включая:

– векторы средних $\mu_{(0)}$, $\mu_{(1)}$;

– дисперсионные матрицы $D_{(0)}$, $D_{(1)}$;

– ковариационные матрицы $\Sigma_{(0)}$, $\Sigma_{(1)}$.

Выбор модели для процедуры функциональной диагностики

Выбор модели из числа представленных в таблице определяется полнотой априорной информации о числовых характеристиках случайного входного вектора $\overline{X}$ для диагностированных состояний S_0 и S_1 [6]. Хотя модели таблицы реализуют альтернативную диагностику функциональных состояний, их можно использовать и для диагностики многоальтернативной, с числом дефектных состояний $K > 1$, если осуществить последовательное попарное сравнение диагностических состояний (метод дихотомии), выбирая пару S_0 и S_r, для которой

$$g\left(\overline{X}\middle|S_0, S_r\right) > \max\left\{g\left(X\middle|S_0, S_j\right)\right\};\ \ j = \overline{1, K};\ \ j \neq r.$$

Известно, что полнота априорной информации о вероятностных свойств объекта диагностики зависит от объема N результатов измерений составляющих вектора $\overline{X}$ на этапе обучения (оценивания) коэффициентов аналитической модели решающей функции $g\left(\overline{X}\right)$, когда ИИС диагностики предъявляют по N объектов с верифицированными состояниями S_0 и S_1 (статические объекты) или используют по N дискретизированных отсчетов случайного вибросигнала $X(t)$ отдельно для состояний S_0 и S_1 (динамические объекты) [7].

При малых объемах обучающих выборок $(N \leq 20)$ на каждую из составляющих вектора $\overline{X}$ приоритетной является первая модель, которая не чувствительна к нарушению нормальности вектора $\overline{X}$ и смещениям в оценках центральных моментов составляющих этого вектора. Более точной и чувствительной к изменению состояний объекта диагностики является четвертая и пятая модели. Однако для их параметрического синтеза нужны выборки достаточно большие $(N > 500)$, особенно если необходимо оценивать элементы ковариационных матриц $\Sigma_{(0)}$ и $\Sigma_{(1)}$. Кроме того, условные законы распределения самой решающей функции $g\left(\overline{X}\right)$ как случайной, квадратически зависимой от вектора $\overline{X}$ величины – существенно отличаются от закона Гаусса. Реально эти законы распределений резко ассиметричные с сильной корреляционной связью между средними значениями $g\left(\overline{X}\right)$ и ее центральными моментами второго и более высоких порядков, что очень усложняет получение интегральных оценок показателей эффективности диагностики.

Наиболее приемлемой для практического использования является линейная решающая функция (модели 2 и 3) и особенно ее модель 2, когда составляющие входного вектора $\overline{X}$ взаимно независимы. Объемы обучающих выборок в этом случае относительно невелики – $N > 50$. Достаточно просто оцениваются и показатели эффективности диагностики (риски первого и второго рода, достоверность, полная вероятность ошибок диагностики). Сама решающая функция $g\left(\overline{X}\right)$ – это линейная форма от вектора $\overline{X}$ и в скалярном виде может быть представленной как сумма:

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(m_i^{(0)}-m_i^{(1)}\right)}{\sigma_i^2}\left[x_i-\frac{\left(m_i^{(0)}+m_i^{(1)}\right)}{2}\right], \quad (2)$$

где $m_i^{(0)}$, $m_i^{(1)}$ – оценки условных средних для i-й составляющей x_i, $i=\overline{1,n}$; σ_i^2 – оценка дисперсии x_i.

Риски диагностики первого и второго рода (α и β) – одинаковые и являются линейной функцией интеграла вероятности с аргументом $z={}^{\delta}\!/_{2}$:

$$\alpha=\beta=1-\Phi\left({}^{\delta}\!/_{2}\right), \quad (3)$$

где $\Phi(\bullet)$ – интеграл вероятности [8];

$$\delta=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i^{(0)}-m_i^{(1)}}{\sigma_i}\right)^2}. \quad (4)$$

Аргумент δ интеграла вероятности – это геометрическое, нормированное по дисперсии, расстояние в пространстве информативных признаков $(x_1,...,x_n)$ между векторами условных средних $\mu_{(0)}$ и $\mu_{(1)}$, которые характеризуют состояния S_0 и S_1 (расстояния между диагностическими состояниями).

Модель (2) позволяет, учитывая, что $x\sim \mathrm{NORM}(\mu_{(j)}, D)$, $j=\overline{0,1}$, легко рассчитать оценки условных средних значений случайной величины $\xi=g(X)$ и ее дисперсию:

$$\begin{cases}\mu_{\xi|S_0}=\dfrac{1}{2}\delta^2;\\ \mu_{\xi|S_1}=-\dfrac{1}{2}\delta^2;\\ \sigma_\xi^2=\delta^2.\end{cases} \quad (5)$$

Числовые характеристики (5) решающей линейной функции (2) дают возможность проанализировать информационные свойства последней для разных δ^2 объемов N измерений и размерности n пространства информативных признаков (входных сигналов ИИС диагностики). Что касается расчета достоверности диагностики, то при известных априорных вероятностях q_0, q_1 состояний S_0, S_1 она определяется выражением

$$P_{\text{Д}}=1-\alpha q_0-\beta q_1,$$

или, с учетом выражения (4), достоверность $P_{\text{Д}}$ диагностики по линейной решающей функции (3) вычисляется по формуле $(\alpha=\beta)$:

$$P_{\text{Д}}=\Phi\left({}^{\delta}\!/_{2}\right).$$

Заключение

1. Произведено статистическое обоснование выбора вида математической модели измерительно-логических преобразований для процедуры функциональной диагностики с учетом ограниченности априорной информации о свойствах объекта диагностики.

2. Доказана практическая целесообразность использования, для функциональной технической диагностики, линейных решающих правил, позволяющих уменьшить эффекты влияния априорной недостаточности обучающих выборок на риски диагностики.

3. Показаны преимущества линейной дискриминантной функции как практической модели принятия решений в условиях априорной неопределенности.

Литература

1. Раудис, Ш. Ограниченность выборки в задачах классификации / Ш. Раудис // Стат. проблемы управления. – 1976. – Вып. 18. – С. 1–185.
2. Юшкявичюс, З.-К. З. Построение кусочно-линейного классификатора по минимуму расстояния в условиях ограниченного объема обучающей выборки : дис. … канд. техн. наук / З.-К. З. Юшкявичюс. – Вильнюс, 1984. – 216 л.
3. Воронцов, К. В. Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания / К. В. Воронцов. – ЖВМ и МФ. – 2000. – Т. 40, № 1. – С. 166–176.
4. Федотов, Н. Г. Теория признаков распознавания образов на основе стохастической геометрии и функционального анализа / Н. Г. Федотов. – М. : Физматлит, 2009. – 304 с.
5. Минаев, В. Е. Классификация образов на основе решетки множества кортежей данных : дис. канд. техн. наук / В. Е. Минаев. – Пенза, 2009. – 174 л.
6. Вьюгин, В. В. Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования / В. В. Вьюгин. – М., 2013. – 387 с.
7. Уткин, Л. В. Модель классификации на основе неполной информации о признаках в виде их средних значений / Л. В. Уткин, Ю. А. Жук, И. А. Селиховкин // Искусств. интеллект и принятие решений. – 2012. – № 3. – С. 71–81.
8. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

Получено 13.06.2014 г.