МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СТЕНКАМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

М. В. Бадраков

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Беларусь

Научный руководитель С. Ф. Андреев

В настоящей работе решается задача осесимметричной деформациии упругой конической оболочки с нагрузкой и толщиной, изменяющейся по меридиану.

Для расчетов выберем систему координат, в которой расстояние S по меридиану отсчитывается от точки O_1 (рис. 1). Здесь θ_0 – угол между нормалью к поверхности оболочки и осью вращения Z до деформации.

Для осесимметричной задачи решение сводится к системе дифференциальных уравнений [1]:

$$S\frac{d^2\psi}{dS^2}+\frac{d\psi}{dS}\left(1+\frac{S}{D}\cdot\frac{dD}{dS}\right)+\psi\left(\frac{\mu}{D}\cdot\frac{dD}{dS}-\frac{1}{S}\right)=-\frac{V}{D}\operatorname{tg}\theta; \quad (1)$$

$$S\frac{d^2V}{dS^2}+\frac{dV}{dS}\left(1+\frac{S}{3D}\cdot\frac{dD}{dS}\right)+V\left(\frac{\mu}{3D}\cdot\frac{dD}{dS}\right)=Eh\psi\operatorname{tg}\theta+\Phi(S). \quad (2)$$

В уравнениях приняты обозначения:

$D=\dfrac{Eh(S)^3}{12-(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; μ, E – упругие постоянные; $\Psi=\theta-\theta_0$ – угол поворота нормали; $V=Q\cdot S\cdot\operatorname{ctg}(\theta)$; Q – поперечное усилие.

$$\Phi(S)=\operatorname{ctg}\theta\left[1/h\cdot\frac{dh}{dS}\left(\frac{\mu F(S)}{\cos^2\theta}-S^2q_n\right)-\frac{F(S)}{S\cos^2\theta}+\mu q_\tau\cdot S\operatorname{tg}\theta+\frac{d}{dS}(q_n\cdot S^2)\right];$$

$F(S) = F_0 + \int\limits_{S_0}^{S} R\ \sin\theta(q_n \cos\theta - q_\tau \sin\theta)ds$ – функции, определяющие осевую нагрузку; q_n и q_τ – нормальная и касательная составляющие интенсивности распределенной по поверхности нагрузки.

Для численного интегрирования воспользуемся методом конечно-разностных аппроксимаций и математической системой MathCAD.

Производные f_n' в точке n определим центральными или односторонними разностями

$$f_n' = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2\Delta S},\ f_n' = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta S},\ f_n'' = \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n+1}}{\Delta S^2}.$$

Представим систему уравнений (1) и (2) в виде

$$\psi_{n-1}\left[S_n - \frac{\Delta S}{2} - \frac{S_n \Delta S}{2D_n}\left(\frac{D_n - D_{n-1}}{\Delta S}\right)\right] + \psi_n\left[\frac{\mu\Delta S^2}{D_n}\left(\frac{D_n - D_{n-1}}{\Delta S}\right) - 2S_n - \frac{\Delta S^2}{S_n}\right] +$$
$$\psi_{n+1}\left[S_n + \frac{\Delta S}{2} + \frac{S_n \Delta S}{D_n}\left(\frac{D_n - D_{n-1}}{\Delta S}\right)\right] = -\frac{V\Delta S^2}{D_n}\text{tg}\theta; \qquad (3)$$

$$V_{n-1}\left[S_n - \frac{\Delta S}{2} - \frac{S_n \Delta S}{6D_n}\left(\frac{D_n - D_{n-1}}{\Delta S}\right)\right] + V_n\left[\frac{\mu\Delta S^2}{3D_n}\left(\frac{D_n - D_{n-1}}{\Delta S}\right) - 2S_n - \frac{\Delta S^2}{S_n}\right] +$$
$$+V_{n+1}\left[S_n + \frac{\Delta S}{2} + \frac{S_n \Delta S}{6D_n}\left(\frac{D_n - D_{n-1}}{\Delta S}\right)\right] = Eh_n \Delta S^2 \psi_n\, \text{tg}\theta + \Delta S^2 \Phi(S_n). \qquad (4)$$

Здесь все переменные являются безразмерными функциями:

$$D = \frac{D}{E \cdot S_0^3};\ \Delta S = \frac{\Delta S}{S_0};\ S_n = \frac{S_n}{S_0};\ \Phi(S_n) = \frac{\Phi(S_n)}{E \cdot S_0^2}\ \text{и т. д.}$$

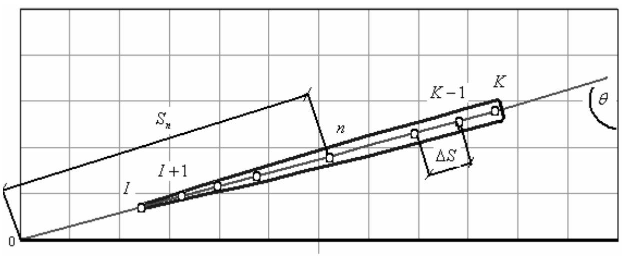

Рис. 1

Решение системы уравнений (1) и (2) начинается с контурных и предконтурных узлов I и $I+1$ – для левого края, и K, $K-1$ – для правого края меридиана.

Считаем заданными значения Ψ_I, Ψ_{I+1}, Ψ_K, Ψ_{K-1}, $V_I, V_{I+1}, V_K, V_{K-1}$.

Причем углы поворота нормали в предконтурных узлах $I+1$ и $K-1$ находим по заданным изгибающим моментам Ms_I и Ms_K.

Ниже приводятся фрагменты программы (рис. 2).

Вычисляем функции $\Psi(S)$ и $V(S)$ по граничным условиям на левом и правом контурах, используя процедуру преобразования индексов I и $I+1$ в индексы K и $K-1$.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$a(\Theta, h, \mu, \alpha, V1, V2, \psi1, \psi2, \Phi, E, D, t, s, \delta) :=$$

$$n \leftarrow N$$

$$V_1 \leftarrow V1$$

$$V_2 \leftarrow V2$$

$$\psi1 \leftarrow \psi1$$

$$\psi2 \leftarrow \psi2$$

$$n \leftarrow \mathrm{rows}(s)$$

$$i \leftarrow 3$$

$$\text{while } i \le N$$

$$K_i \leftarrow \frac{1}{s_{i-1} + \frac{h}{2} + \frac{s_{i-1} \cdot h}{2 \cdot D_{i-1}} \cdot \left(\frac{D_{i-1} - D_{i-2}}{h}\right)}$$

$$L_i \leftarrow \frac{1}{s_{i-1} + \frac{h}{2} - \frac{s_{i-1} \cdot h}{6 \cdot D_{i-1}} \cdot \left(\frac{D_{i-1} - D_{i-2}}{h}\right)}$$

$$k1_i \leftarrow -K_i \cdot \left[s_{i-1} - \frac{h}{2} + \frac{s_{i-1} \cdot h}{2 \cdot D_{i-1}} \cdot \left(\frac{D_{i-1} - D_{i-2}}{h}\right)\right]$$

$$k2_i \leftarrow -K_i \cdot \left[s_{i-1} \cdot (-2) - \frac{h^2}{2} + \frac{\mu \cdot h^2}{D_{i-1}} \cdot \left(\frac{D_{i-1} - D_{i-2}}{h}\right)\right]$$

$$k3_i \leftarrow K_i \cdot \frac{h^2}{D_{i-1}} \cdot \tan(\Theta)$$

$$k4_i \leftarrow K_i \cdot \frac{s_{i-1} \cdot h^2}{D_{i-1}} \cdot \left(\frac{t_{i-1} - t_{i-2}}{h}\right)$$

$$l1_i \leftarrow -L_i \cdot \left[s_{i-1} - \frac{h}{2} - \frac{s_{i-1} \cdot h}{2 \cdot D_{i-1}} \cdot \left(\frac{D_{i-1} - D_{i-2}}{h}\right)\right]$$

$$l2_i \leftarrow -L_i \cdot \left[-2 \cdot s_{i-1} - \frac{h}{2} + \frac{s_{i-1} \cdot h}{6 \cdot D_{i-1}} \cdot \left(\frac{D_{i-1} - D_{i-2}}{h}\right)\right]$$

$$l3_i \leftarrow L_i \cdot E \cdot \delta_{i-1} \cdot h^2 \cdot \tan(\Theta)$$

$$l4_i \leftarrow L_i \cdot \left(h^2 \Phi \cdot s_{i-1} + E \cdot \delta_{i-1} \cdot \alpha \cdot h^2 \cdot s_{i-1} \cdot \frac{t_{i-1} - t_{i-2}}{h}\right)$$

$$V_i \leftarrow l1_i \cdot V_{i-2} + l2_i \cdot V_{i-1} + l3_i \cdot \psi_{i-1} + l4_i$$

$$\psi_i \leftarrow k1_i \cdot \psi_{i-2} + k2_i \cdot \psi_{i-1} + k3_i \cdot V_{i-1} + k4_i$$

$$i \leftarrow i + 1$$

$$a \leftarrow \psi$$

$$\Psi1 := a(\Theta, h, \mu, \alpha, V1, V2, \psi1, \psi2, \Phi, E, D, t, s, \delta)$$

Рис. 2. Фрагмент программы

Аналогично находится функция $V(S)$.

В качестве примера рассмотрены конические оболочки с изменяющейся толщиной стенки (рис. 1). Проведен расчет для продольного усилия для оболочки, нагруженной осевым усилием F_0 по торцам оболочки (рис. 3).

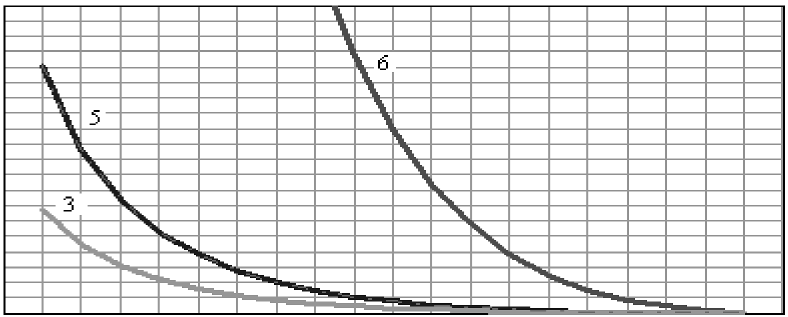

Рис. 3. Зависимость продольных усилий от начальной толщины стенки

Литература

1. Расчет конической оболочки на ЭЦВМ / В. И. Соломин // Расчеты на прочность. – Т. 12. – Москва : Машиностроение, 1966. – С. 72–84.