

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

**О. Н. Шабловский, И. А. Концевой**

## **ДИНАМИКА**

### **ПРАКТИКУМ**

**по курсу «Теоретическая механика» для студентов  
инженерно-технических специальностей  
дневной и заочной форм обучения**

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2008**

УДК 531(075.8)  
ББК 22.21я73  
Ш13

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 1 от 25.09.2006 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Металлорежущие станки и инструменты» ГГТУ им. П. О. Сухого  
канд. техн. наук, доц. *М. И. Михайлов*

**Шабловский, О. Н.**

Ш13 Динамика : практикум по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженер.-техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / О. Н. Шабловский, И. А. Концевой. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 42 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://gstu.local/lib>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-706-3.

Изложены основные способы решения задач динамики несвободной материальной точки, отличительной чертой которых является необходимость проведения анализа движения с энергетической точки зрения (баланс энергий и работ, учет параметров сопротивления среды). Приведены задания для выполнения расчетно-графических работ и самостоятельной работы студентов.

Для студентов инженерно-технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

**УДК 531(075.8)  
ББК 22.21я73**

**ISBN 978-985-420-706-3**

© Шабловский О. Н., Концевой И. А., 2008  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2008

## Предисловие

Цель настоящего практикума – дать основные способы решения задач динамики несвободной материальной точки. Подробно рассмотрены примеры пространственного движения по поверхности и плоского движения по линиям как с учетом, так и без учета шероховатости связей. Обращается внимание студентов на совершенствование навыков проведения аналитических преобразований и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Даны семь видов заданий для расчетно-графических работ.

### 1. Основные понятия и определения

Материальная точка, движение которой не ограничено никакими препятствиями, не связано никакими условиями, называется *свободной*. Материальная точка, на движение которой наложены некоторые ограничения, называется *несвободной*.

Ограничения, препятствующие свободному движению точки, называются *связями*. Если связь характеризуется линией, поверхностью или объемом, в котором движется точка, то она называется *геометрической* (конечной). Если же свойства связи таковы, что имеются ограничения на скорость точки, то это связь *кинематическая* (дифференциальная).

Далее будем рассматривать только геометрические связи. Аналитические условия, описывающие ограничения, накладываемые на координаты точки, называются *уравнениями связей*. *Стационарные связи* неподвижны, не деформируются при движении точки, так что в соответствующие уравнения связей время  $t$  не входит. Например, при движении точки по неподвижной поверхности  $S(x, y, z) = 0$  координаты материальной точки должны в каждый момент времени удовлетворять этому уравнению.

*Нестационарные* связи подвижные или деформирующиеся при движении точки, поэтому  $t$  входит явно в уравнение связей:

$$S(x, y, z, t) = 0. \quad (1)$$

Пример 1. Точка движется по окружности, расположенной в плоскости  $(x, y)$ , и радиус окружности  $r = r(t)$  непрерывно меняется с течением времени. В этом случае координаты движущейся точки должны удовлетворять уравнению  $S(x, y, t) \equiv x^2 + y^2 - r^2(t) = 0$ .

Если во все время движения при  $t \geq 0$  точка находится на поверхности (1), то такая связь называется *удерживающей*. Очевидно, что аналитические соотношения, которым должны в этом случае удовлетворять координаты точки, выражаются равенством вида (1).

Возможны случаи, когда поверхность (1) является границей области, в которой движется точка, причем точка находится на связи некоторый конечный промежуток времени,  $t \in [t_1, t_2]$ , а при  $t > t_2$  действие связи прекращается. Связи такого типа называются *неудерживающими*. Очевидно, что аналитические соотношения, которым удовлетворяют координаты точки при таком движении, выражаются неравенствами вида  $S(x, y, z, t) \geq 0$  либо  $S(x, y, z, t) \leq 0$ , и знак равенства отвечает моментам времени, когда точка находится на связи.

Пример 2. Точка может двигаться только по поверхности и внутри сферы радиуса  $r$ . Уравнение связи имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0$ . Если же точка может двигаться вне сферы, то уравнение связи следующее:  $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0$ .

При движении точки, подчиненной геометрическим связям, число ее независимых координат называется *числом степеней свободы* точки. Значит, свободная материальная точка имеет три степени свободы. Точка имеет две степени свободы, когда она движется по поверхности: в этом случае три декартовы координаты  $x, y, z$  связаны одним уравнением связи (1). Точка имеет одну степень свободы, когда она движется по линии; в этом случае имеется два уравнения, связывающих три координаты точки. Например, для пространственного стационарного случая уравнение линии определяется системой  $S_1(x, y, z) = 0, S_2(x, y, z) = 0$ .

Более детальные признаки классификации связей в рамках данной темы не рассматриваем.

Приведем краткие сведения из динамики несвободной материальной точки, которые понадобятся при решении основных типов задач.

Пусть на несвободную точку массы  $m$  действует сила  $\vec{F}$ . Имеющаяся геометрическая связь изменяет движение подчиненной ей материальной точки. Такое действие связи описывается некоторой силой – *реакцией связи* на точку. Силы, не принадлежащие к числу реакций связей (пассивных сил), называются *приложенными* или *активными*. В задачах механики обычно активные силы заранее известны, а реакции связей нужно найти.

*Аксиома связей*: удерживающую связь можно отбросить, заменив действие связи ее реакцией, и считать точку свободной, находящейся под действием активных сил и реакции данной связи.

Эта аксиома применяется также к недерживающей связи для тех моментов времени, когда точка находится на этой связи.

Итак, векторное уравнение движения несвободной материальной точки имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

где  $\vec{F}$  – равнодействующая активных сил, действующих на точку;  $\vec{R}$  – неизвестная реакция связи.

Если связью является поверхность или линия, то  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ , где *нормальная реакция*  $\vec{N}$  направлена по перпендикуляру к связи, а *сила трения*  $\vec{T}$  лежит в касательной плоскости к связи и направлена противоположно относительной скорости точки. Если условия движения таковы, что  $|\vec{T}| \ll |\vec{N}|$  и силой трения можно пренебречь, то связь называется *идеально гладкой*.

#### *Контрольные вопросы*

1. В чем состоит отличие геометрической связи от кинематической? стационарной связи от нестационарной? реакции связи от активных сил?

2. Каким образом аксиома связей применяется к решению конкретных задач о несвободном движении материальной точки?

## **2. Указания к решению задач о движении точки по неподвижной поверхности**

Векторное уравнение движения материальной точки по неподвижной поверхности  $S(x, y, z) = 0$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} + N\vec{n} - f|N|\vec{\tau}; \\ \vec{N} &= N\vec{n}, \quad \vec{T} = -f|N|\vec{\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $N$  – алгебраическое значение нормальной реакции;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к этой поверхности;  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной к траектории точки, расположенной на поверхности;  $f$  – коэффициент динамического трения.

В данном случае поверхность не деформируется и неподвижна. Так как точка не может по условию сойти с поверхности, то при  $t \geq 0$  будет  $\vec{\vartheta}_n = 0$ . Значит, скорость точки  $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_\tau = \vartheta \vec{\tau}$  направлена по касательной к поверхности. Возьмем полную производную по времени от уравнения удерживающей связи и получим:

$$S(x, y, z) = 0, \quad \frac{dS}{dt} \equiv \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial S}{\partial z} \dot{z} = 0, \\ \vec{\vartheta} \cdot \text{grad}S = 0, \quad \vec{\vartheta}_n = 0. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\vartheta}}{\vartheta}, \quad \vec{\vartheta} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (4)$$

Из курса высшей математики известно, что

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}S}{|\text{grad}S|}, \quad \text{grad}S = \frac{\partial S}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \vec{k}; \quad (5)$$

$$|\text{grad}S| = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты координатных осей (рис. 1).

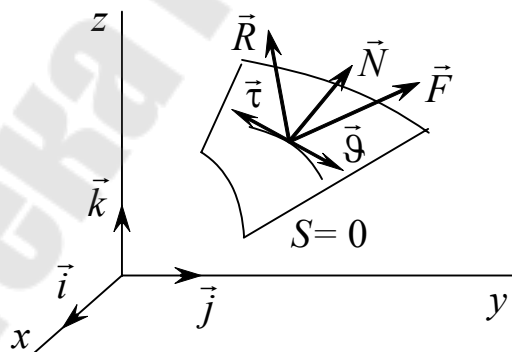


Рис. 1

В механике принято следующее обозначение – *множитель Лагранжа*:

$$\lambda = \frac{N}{|\text{grad}S|}. \quad (6)$$

Тогда для нормальной реакции имеем:

$$\vec{N} = N\vec{n}, \quad \vec{N} = \lambda \text{grad}S, \quad N = \lambda |\text{grad}S|; \quad (7)$$

$$N_x = \lambda \frac{\partial S}{\partial x}, \quad N_y = \lambda \frac{\partial S}{\partial y}, \quad N_z = \lambda \frac{\partial S}{\partial z}.$$

С учетом (3)–(7) уравнение (2) принимает вид:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \lambda \text{grad}S - f|\lambda \text{grad}S| \frac{\vec{g}}{g}. \quad (8)$$

Спроектировав (8) на оси координат, получаем

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda \frac{\partial S}{\partial x} - f|\lambda \text{grad}S| \frac{\dot{x}}{g}; \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \frac{\partial S}{\partial y} - f|\lambda \text{grad}S| \frac{\dot{y}}{g}; \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda \frac{\partial S}{\partial z} - f|\lambda \text{grad}S| \frac{\dot{z}}{g}; \quad S(x, y, z) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, четыре неизвестные функции  $x(t), y(t), z(t), \lambda(t)$  определяются системой уравнений (9), состоящей из одного конечно-го соотношения (уравнение связи) и трех дифференциальных уравнений второго порядка.

Начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} t = 0: \quad x &= x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из шести величин, характеризующих начальное положение точки и ее начальную скорость, независимыми являются любые четыре величины, а остальные две определяются с учетом следующих ограничений: 1) точка находится на связи при  $t = 0$ ,  $S(x_0, y_0, z_0) = 0$ ; 2) начальная скорость точки, согласно (3), должна лежать в плоскости, касательной к связи:

$$t = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x}_0 + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y}_0 + \frac{\partial S}{\partial z} \dot{z}_0 = 0. \quad (*)$$

После решения системы (9) нормальная реакция поверхности подсчитывается по формулам (7).

В частном случае идеально гладкой поверхности ( $f \equiv 0$ ) уравнения движения (9) называются *уравнениями Лагранжа первого рода*.

### Задача 1

Материальная точка массы  $m$  движется в плоскости

$$S(x, y, z) \equiv ax + by + cz + d = 0, \quad (11)$$

$$a, b, c, d - \text{const}, \quad a + b + c + d = 1$$

под действием силы тяжести. Пренебрегая трением, определить реакцию плоскости и найти уравнение движения точки при начальных условиях:

$$t = 0, \quad x_0 = y_0 = z_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0. \quad (12)$$

### Решение

Направим ось  $OZ$  вертикально вверх. При составлении уравнений (9) учтем, что имеется только одна активная сила – сила тяжести  $m\vec{g}$ :  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z = -mg$ . С помощью уравнения связи (11) вычисляем

$$\frac{\partial S}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = c.$$

Уравнения (9) в данном случае имеют вид:

$$m\ddot{x} = \lambda a, \quad m\ddot{y} = \lambda b, \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda c, \quad ax + by + cz + d = 0. \quad (13)$$

Искомые координаты  $x(t), y(t), z(t)$  точки в каждый момент времени удовлетворяют уравнению связи (11). Поэтому, чтобы исключить  $\lambda$  из (13), воспользуемся (11) и продифференцируем его по времени  $t$  дважды:  $a\ddot{x} + b\ddot{y} + c\ddot{z} = 0$ . Подставляя в это выражение  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  из (13) имеем:

$$\frac{\lambda}{m}(a^2 + b^2 + c^2) = gc, \quad \lambda = \lambda_0 = \frac{mgc}{a^2 + b^2 + c^2} \equiv \text{const}.$$

Правые части дифференциальных уравнений в (13) теперь известны. Проинтегрировав дважды по времени, находим



$$x(t) = \frac{\lambda_0 a}{2m} t^2 + C_1 t + C_2;$$

$$y(t) = \frac{\lambda_0 b}{2m} t^2 + C_3 t + C_4;$$

$$z(t) = \frac{(\lambda_0 c - mg)}{2m} t^2 + C_5 t + C_6,$$

где  $C_1, \dots, C_6$  – постоянные интегрирования. Как уже указывалось, эти шесть констант связаны двумя соотношениями. Действительно, при  $t=0$  должны иметь  $ax(0) + by(0) + cz(0) + d = 0$ , значит:  $aC_2 + bC_4 + cC_6 + d = 0$ . Кроме того, надо учесть соотношение (\*):

$$a\dot{x}(0) + b\dot{y}(0) + c\dot{z}(0) = 0, \text{ т.е. } aC_1 + bC_3 + cC_5 = 0. (**)$$

Таким образом, из имеющихся шести постоянных произвольны четыре. Учитывая начальное положение материальной точки (12), находим  $C_2 = C_4 = C_6 = 1$ . Так как движение начинается из состояния покоя (12), то  $C_1 = C_3 = C_5 = 0$ , что удовлетворяет ограничению (\*\*). В итоге получаем уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$x = \frac{\lambda_0 a}{2m} t^2 + 1, \quad y = \frac{\lambda_0 b}{2m} t^2 + 1, \quad z = \frac{(\lambda_0 c - mg)}{2m} t^2 + 1.$$

Исключая отсюда время, найдем уравнение траектории точки:

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c - \frac{mg}{\lambda_0}}, \quad \frac{mg}{\lambda_0} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c},$$

которое представляет собой симметричное (каноническое) уравнение прямой.

Реакция гладкой связи  $\vec{R} = N\vec{n}$ ,  $\vec{T} = 0$  подсчитывается по формулам (7):  $N_x = \lambda_0 a$ ,  $N_y = \lambda_0 b$ ,  $N_z = \lambda_0 c > 0$ .

#### *Контрольный вопрос*

Какие ограничения накладываются на выбор начального положения и начальной скорости точки при ее несвободном движении? Поясните на примере задачи 1.

## Задача 2

Материальная точка  $A$  массой  $m$  движется под действием силы тяжести  $m\vec{g}$  по шероховатой наклонной плоскости, которая составляет с горизонтом угол  $\beta$ . Найти уравнения движения точки  $A$ .

*Решение*

Координатные оси выберем следующим образом:  $Ox$  горизонтальна,  $Oy$  – по линии наибольшего ската,  $Oz$  – перпендикулярна плоскости, в которой происходит движение (рис. 2). Значит, уравнение связи имеет вид:

$$S(x, y, z) \equiv z = 0. \quad (14)$$

Отсюда вычисляем:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 1,$$

$$|\text{grad}S| = 1, \quad N = \lambda.$$

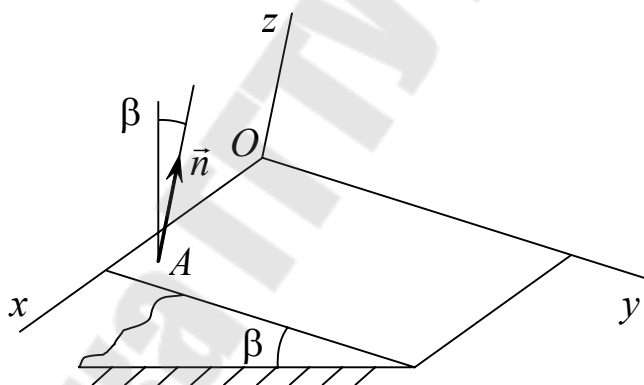


Рис. 2

На точку  $A$  действует только одна активная сила  $m\vec{g}$ , поэтому  $F_x = 0$ ,  $F_y = mg \sin \beta$ ,  $F_z = -mg \cos \beta$ .

Составляем уравнения движения (9):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -f|\lambda|\frac{\dot{x}}{g}, \quad m\ddot{y} = mg \sin \beta - f|\lambda|\frac{\dot{y}}{g}, \\ m\ddot{z} &= -mg \cos \beta + \lambda - f|\lambda|\frac{\dot{z}}{g}, \quad z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из уравнения связи (14), которой подчинена точка  $A$ , получаем дифференциальные следствия:  $\dot{z} = 0$ ,  $\ddot{z} = 0$ . Поэтому из третьего уравнения в системе (15) находим  $\lambda = mg \cos \beta > 0$ , поскольку  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . Тогда уравнения движения (15) можно записать в форме:

$$\ddot{x} = -fg \frac{\dot{x}}{\vartheta} \cos \beta, \quad \ddot{y} = g \sin \beta - fg \frac{\dot{y}}{\vartheta} \cos \beta, \quad N = \lambda = mg \cos \beta > 0. \quad (16)$$

Для удобства дальнейших вычислений обозначим в (16)  $g \sin \beta = a$ ,  $fg \cos \beta = ab$ , т. е.  $b = f \operatorname{ctg} \beta$ . Таким образом, координаты  $x(t), y(t)$  точки  $A$  на плоскости определяются уравнениями

$$\ddot{x} = -ab \frac{\dot{x}}{\vartheta}, \quad \ddot{y} = a \left( 1 - b \frac{\dot{y}}{\vartheta} \right). \quad (17)$$

Согласно (3), (4), (14), имеем для вектора скорости точки  $\vec{\vartheta} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ . Направляющие косинусы вектора скорости равны (рис. 3):

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{i}, \vec{\vartheta}) &= \cos \varphi = \frac{\dot{x}}{\vartheta}, \\ \cos(\vec{j}, \vec{\vartheta}) &= \sin \varphi = \frac{\dot{y}}{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Продифференцировав равенства  $\dot{x} = \vartheta \cos \varphi$ ,  $\dot{y} = \vartheta \sin \varphi$  по времени, вычислим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi - \vartheta \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \ddot{y} &= \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi + \vartheta \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Теперь с учетом (18), (19) уравнения движения (17) примут вид:

$$\frac{d\vartheta}{dt} \cos \varphi - \vartheta \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -ab \cos \varphi, \quad \frac{d\vartheta}{dt} \sin \varphi + \vartheta \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = a(1 - b \cos \varphi).$$

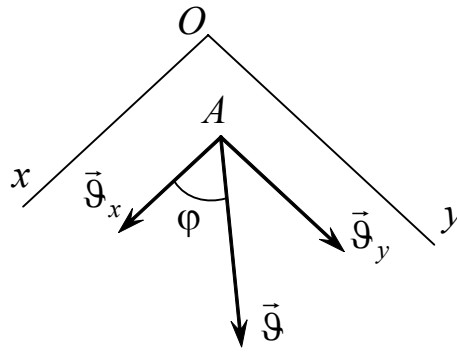


Рис. 3

Эти линейные уравнения нетрудно разрешить относительно производных:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = a(\sin \varphi - b), \quad \vartheta \frac{d\varphi}{dt} = a \cos \varphi. \quad (20)$$

Чтобы исключить  $dt$ , поделим друг на друга соответственно левые и правые части уравнений (20):

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta d\varphi} = \frac{\sin \varphi - b}{\cos \varphi},$$

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \left( \operatorname{tg} \varphi - \frac{b}{\cos \varphi} \right) d\varphi.$$

Проинтегрировав это уравнение с разделяющимися переменными, находим

$$\ln \vartheta = -\ln \cos \varphi + b \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \ln(2c), \quad (21)$$

где  $\ln(2c)$  – произвольная постоянная интегрирования, которую берем в таком виде для удобства дальнейших записей.

При получении (21) воспользовались табличными интегралами и учли, что

$$-\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \left| \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|,$$

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Потенцирование выражения (21) дает скорость

$$\mathfrak{V} = \frac{2c}{\cos \varphi} \tau^b, \quad \tau = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (22)$$

Из тригонометрии известно, что  $\sin 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$ . Тогда, воспользовавшись формулами приведения, найдем:

$$\cos \varphi = \sin 2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}. \quad (23)$$

Подставив (23) в (22), запишем

$$\mathfrak{V} = c\tau^{b-1}(1 + \tau^2) = c(\tau^{b-1} + \tau^{b+1}). \quad (24)$$

С помощью (23) подсчитываем

$$\sin \varphi = (1 - \tau^2)(1 + \tau^2)^{-1}, \quad d \sin \varphi = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} d\varphi, \quad d\varphi = \frac{-2d\tau}{1 + \tau^2}. \quad (25)$$

Цель дальнейших вычислений – определение параметрических зависимостей  $t = t(\tau)$ ,  $x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$ , характеризующих закон движения точки  $A$ . Из второго уравнения (20) находим, применяя (23)–(25):

$$dt = \frac{\mathfrak{V}d\varphi}{a \cos \varphi} = \frac{-c}{a\tau} (\tau^{b-1} + \tau^{b+1}); \quad (26)$$

$$t_0 \equiv \operatorname{const},$$

$$t = \frac{-c}{a} \left[ \frac{\tau^{b-1}}{b-1} + \frac{\tau^{b+1}}{b+1} \right]. \quad (27)$$

Из (18) имеем, применяя (23), (24), (26):

$$dx = \mathfrak{V} \cos \varphi dt = -\frac{2c^2}{a(1 + \tau^2)} (\tau^{b-1} + \tau^{b+1})^2 d\tau = -\frac{2c^2}{a} \tau^{2b-2} (1 + \tau^2) d\tau,$$

$$dy = \mathfrak{V} \sin \varphi dt = -\frac{c^2(1 - \tau^2)}{a\tau(1 + \tau^2)} (\tau^{b-1} + \tau^{b+1})^2 d\tau = -\frac{c^2}{a} \tau^{2b-3} (1 - \tau^4) d\tau.$$

Проинтегрировав по параметру  $\tau$ , окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-2c^2}{a} \left( \frac{\tau^{2b-1}}{2b-1} + \frac{\tau^{2b+1}}{2b+1} \right) + x_0, \\ y &= \frac{-c^2}{a} \left( \frac{\tau^{2b-2}}{2b-2} - \frac{\tau^{2b+2}}{2b+2} \right) + y_0, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где  $x_0, y_0, t_0$  – произвольные постоянные интегрирования, их значения определяются из начальных условий.

Итак, формулы (27), (28) представляют в параметрической форме закон движения точки  $A$ . Очевидно, что в этих зависимостях важную роль играет величина  $b = k \operatorname{ctg} \beta$ , характеризующая трение и наклон плоскости к горизонту. Рассмотрим три варианта:

I. Пусть  $b > 1$ , тогда  $k \operatorname{ctg} \beta > 1$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \beta < k = \operatorname{tg} \gamma, \quad 0 < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad (29)$$

где  $\gamma$  – угол трения. Из (24), (27), (28) заключаем: при  $\tau = 0$  скорость  $\mathfrak{V} = 0$  в точке с координатами  $(x_0, y_0)$  в момент времени  $t = t_0$ . Теперь остается вспомнить свойство конуса трения: сила, линия действия которой находится внутри конуса трения, не может сдвинуть тело с места независимо от величины модуля силы. В данном случае  $\beta < \gamma$ , т. е. линия действия силы тяжести  $m\vec{g}$  лежит внутри конуса трения.

Вывод: остановившись при  $t = t_0$  в точке  $(x_0, y_0)$ , материальная точка  $A$  не сможет двигаться дальше, ее движение прекратится.

II. Пусть  $\frac{1}{2} < b < 1$ , тогда для знаменателей дробей в (27), (28) будет  $b-1 < 0$ ,  $2b-1 > 0$ ,  $2b-2 < 0$ . Имеем при  $\tau \rightarrow 0$ :  $\mathfrak{V} \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow x_0$ ,  $y \rightarrow \infty$ . Кроме того, из неравенства  $k \operatorname{ctg} \beta < 1$  следует, что  $\gamma < \beta$ .

Вывод: траектория точки  $A$  имеет асимптоту, параллельную  $OU$  (прямая, направленная по линии наибольшего ската), и сила трения не вызывает остановки движения.

III. При  $b < \frac{1}{2}$ , как и в случае II, движение безостановочное; для этого варианта траектория точки  $A$  асимптоты не имеет.

*Контрольный вопрос*

Как учитывается влияние шероховатости поверхности при несвободном движении точки? Поясните на примере задачи 2.

**3. Указания к решению задач о движении точки по неподвижной плоской линии**

Уравнения движения материальной точки по неподвижной плоской линии  $Z(x, y) = 0$  можно рассматривать как частный случай уравнений (9). Рассматривая эту линию как результат пересечения поверхности  $S(x, y, z) = 0$  плоскостью  $z = z_0$ ,  $Z(x, y) \equiv S(x, y, z_0) = 0$  и полагая  $F_z = 0$ , получим из (9):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda \frac{\partial Z}{\partial x} - f|\lambda \operatorname{grad} Z| \frac{\dot{x}}{\vartheta}; \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \frac{\partial Z}{\partial y} - f|\lambda \operatorname{grad} Z| \frac{\dot{y}}{\vartheta}; \\ Z(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Искомыми функциями являются  $x(t), y(t), \lambda(t)$ . Все указанные в предыдущем пункте формулы, а также соображения о выборе начальных условий для системы (30) применимы и здесь.

Следует отметить, что многие практические задачи по этой теме удобнее решать, применяя естественные координатные оси (рис. 4): направления касательной и нормали траектории, лежащие в плоскости движения;  $\vec{\tau}$  направлен в сторону возрастания дуговой координаты  $s = s(t)$ , где  $s = O_1A$ , а  $\vec{n}$  направлен к центру кривизны траектории.

Естественные уравнения движения несвободной материальной точки в форме Эйлера имеют вид:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau - fN, \quad \frac{m\vartheta^2}{\rho} = F_n + N, \quad \vartheta = \frac{ds}{dt}, \quad (31)$$

где  $F_\tau, F_n$  – проекции активной силы на естественные координатные оси:  $\vec{F} = \vec{\tau}F_\tau + \vec{n}F_n$ ;  $\rho$  – радиус кривизны линии связи.

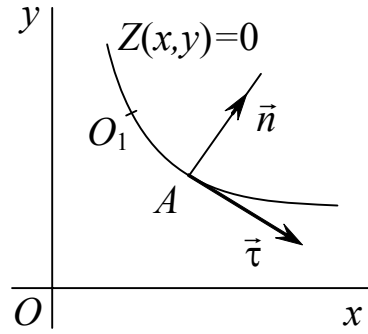


Рис. 4

Второе уравнение в (31) говорит о том, что в случае криволинейного движения динамическая реакция  $N$  зависит не только от вида связи и активных сил, но и от скорости движения точки.

Укажем важный частный случай. Если точка  $A$  движется по инерции ( $F_\tau = 0, F_n = 0$ ), то из (31) имеем:

$$m \frac{d\vartheta}{dt} = -fN, \quad \frac{m\vartheta^2}{\rho} = N.$$

Подставив  $N$  из второго уравнения в первое, запишем уравнение движения точки по кривой:  $d\vartheta/dt = -f\vartheta^2/\rho$ . Проведем вспомогательные вычисления:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{ds} \frac{ds}{dt} = \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\vartheta^2}{2} \right), \quad (32)$$

тогда получим

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\vartheta^2}{2} \right) = -(2f) \frac{\vartheta^2}{2\rho}.$$

Проинтегрировав, определим скорость:

$$\vartheta^2 = \vartheta_0^2 \exp(-2fQ(s)), \quad Q(s) = \int_0^s \frac{ds}{\rho} > 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \exp(-fQ).$$

Выводы: 1) при движении точки по инерции вдоль шероховатой линии ее скорость непрерывно убывает; 2) в данном случае нормальная реакция  $N \sim \vartheta^2$ , а значит, и сила трения  $|T| = f|N| \sim \vartheta^2$  убывает пропорционально квадрату скорости.



Уравнения (31) полезно переписать в виде

$$m \frac{d\vartheta}{dt} = F_\tau - f \left( \frac{m\vartheta^2}{\rho} - F_n \right), \quad \vartheta = \frac{ds}{dt}, \quad N = \frac{m\vartheta^2}{\rho} - F_n \quad (33)$$

и определять скорость и закон движения точки из первых двух уравнений.

При решении задач оказывается выгодным переход от аргумента  $t$  к аргументу  $s$  по формулам (32), что во многих случаях облегчает интегрирование уравнений движения.

### Задача 3

Материальная точка массы  $m$  начинает двигаться без начальной скорости из точки  $A$  по гладкой направляющей, уравнение которой  $y = a \cos(2\pi x/l)$ . Определить силу давления точки на направляющую в тот момент, когда она проходит через точку  $B$ .

#### Решение

Воспользуемся уравнениями (30) и выберем оси координат так, как показано на рис. 5. По условию имеем:

$$F_x = 0, \quad F_y = -mg = -P, \quad f = 0, \quad Z(x, y) \equiv y - a \cos \frac{2\pi x}{l} = 0.$$

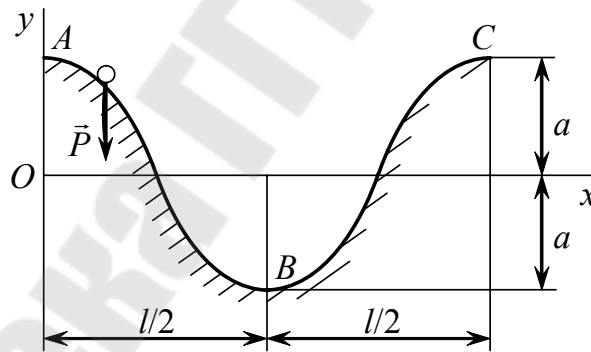


Рис. 5

Для данного случая уравнения движения (30) таковы:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{2a\pi}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda, \quad (34)$$

причем множитель Лагранжа  $\lambda$  подсчитывается по формуле (9):

$$\lambda = N \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как точке  $B$  отвечает координата  $x = l/2$ , то в точке  $B$  имеем  $\lambda_B = N_B$ , определяем:

$$N_B = mg + m\ddot{y}|_{x=l/2}. \quad (35)$$

Здесь второе слагаемое представляет динамическую составляющую давления материальной точки на направляющую линию. Займемся подсчетом этого слагаемого. Значение  $\lambda$  из второго уравнения (34) подставим в первое уравнение:

$$\ddot{x} = (g + \ddot{y}) \frac{2a\pi}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (36)$$

Обозначим  $u = \frac{dx}{dt}$ ,  $\vartheta = \frac{dy}{dt}$  и осуществим переход к аргументу  $x$ :

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{2} \right),$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{d\vartheta}{dx}.$$

Теперь уравнение (36) принимает вид:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \left( g + u \frac{d\vartheta}{dx} \right) \frac{2a\pi}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (37)$$

Продифференцировав по времени  $t$  уравнение связи, получим

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2a\pi}{l} \frac{dx}{dt} \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \vartheta = -\frac{2a\pi}{l} u \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Далее вычисляем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dx} &= -\frac{2a\pi}{l} \left( \frac{du}{dx} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{2\pi u}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \\ \left( u \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=l/2} &= \frac{8a\pi^2}{l^2} \left( \frac{u^2}{2} \right)_B. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Теперь уравнение (37) можем записать в следующей форме:

$$M_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{2} \right) + M_2 \left( \frac{u^2}{2} \right) = M_0,$$

$$M_0 = \frac{2a\pi}{l} g \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad M_1 = 1 + \left( \frac{2a\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{l},$$

$$M_2 = 2a^2 \left( \frac{2\pi}{l} \right)^3 \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка, которое надо проинтегрировать при условии  $x = 0$ ,  $\frac{u^2}{2} = 0$ , поскольку движение начинается в точке  $A$  (рис. 5) из состояния покоя. В результате интегрирования имеем:

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{ag}{M_1} \left( \cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right), \quad \frac{u_B^2}{2} = 2ag.$$

Из выражения, учитывая (38), находим  $\ddot{y}_B = 16a^2\pi^2 g/l^2$ . В итоге по формуле (35) вычисляем

$$N_B = mg \left( 1 + 16 \frac{a^2\pi^2}{l^2} \right).$$

Пользуясь этим выражением, нетрудно проследить, как влияют параметры  $a$ ,  $l$ , характеризующие уравнение связи, на  $N_B$ .

#### *Контрольные вопросы*

1. Какими факторами определяется динамическая реакция  $N$  линии связи при криволинейном движении?
2. Какое преобразование аргументов удобно для решения некоторых задач несвободной материальной точки?

#### **Задача 4**

Материальная точка  $M$  массы  $m$  движется в вертикальной плоскости по кольцу радиуса  $r$ . В начальный момент времени точка  $M$  находится в точке  $A$  на горизонтальном диаметре кольца и ей сообщается скорость  $\vec{\vartheta}_0$ . Коэффициент трения скольжения между точкой и кольцом равен  $f$ . Найти наименьшее значение начальной скорости,

при котором точка  $M$  достигает противоположного конца горизонтального диаметра.

*Решение*

Для решения задачи применим уравнения Эйлера (33). Направление естественных координатных осей показано на рис. 6.

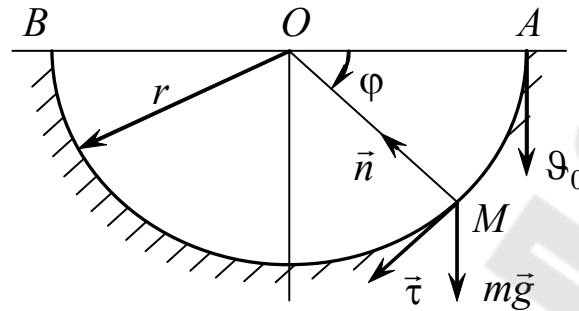


Рис. 6

В данном случае имеем:

$$s = r\varphi, \quad \rho = r \equiv \text{const},$$

$$F_{\tau} = mg \cos \varphi, \quad F_n = -mg \sin \varphi,$$

$$\vartheta = \omega r, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

поэтому уравнения (33) представляются в форме:

$$r \frac{d\omega}{dt} = g \cos \varphi - f(g \sin \varphi + \omega^2 r); \quad (39)$$

$$N = mr\omega^2 + mg \sin \varphi. \quad (40)$$

Переходя в (39) от  $t$  к аргументу  $\varphi$  по формуле

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\omega^2}{2} \right),$$

запишем линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) + 2f \left( \frac{\omega^2}{2} \right) = \frac{g}{r} (\cos \varphi - f \sin \varphi).$$

Это уравнение надо проинтегрировать с учетом начального условия  $\varphi = 0$ ,  $\omega = \omega_0 \equiv \vartheta_0 / r$ , указанного в постановке задачи. Проводя интегрирование, находим решение:

$$\frac{\omega^2}{2} = \exp(-2f\varphi) \left[ \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{g}{r} \int_0^\varphi \exp(2f\varphi)(\cos \varphi - f \sin \varphi) d\varphi \right]. \quad (41)$$

В интересующей нас точке  $B$ , положение которой определяется значением угла  $\varphi = \pi$ , согласно (40), имеем  $N_B = mr\omega_B^2$ , т. е. статическая составляющая нормальной реакции равна нулю. Значение угловой скорости подсчитаем по формуле (41):

$$\frac{\omega_B^2}{2} = \exp(-2\pi f) \left[ \frac{\vartheta_0^2}{2r^2} + \frac{g}{r} \int_0^\pi \exp(2f\varphi)(\cos \varphi - f \sin \varphi) d\varphi \right]. \quad (42)$$

Теперь остается найти то значение начальной линейной скорости  $\vartheta_0$ , при котором  $\omega_B = 0$ ,  $N_B = 0$ , т. е. динамическая составляющая нормальной реакции тоже равна нулю. Этим будет обеспечено выполнение условия, поставленного в задаче. Приравнивая нулю квадратную скобку в (42) и вычисляя содержащийся в ней определенный интеграл, находим искомую величину

$$\vartheta_0^2 = \frac{6grf}{(1+4f^2)} (1 + \exp(2\pi f)).$$

Как видим, влияние коэффициента трения  $f$  весьма значительно.

### Задача 5

Лыжник массы  $m$ , находящийся на вершине горы высоты  $h$ , за счет толчка приобретает скорость  $\vec{\vartheta}_0$  и скользит вниз по склону в вертикальной плоскости. Вначале траекторией лыжника является дуга окружности радиуса  $r = h$ , затем траекторией становится прямая линия – касательная к дуге окружности в точке  $B$ . Сила сопротивления, возникающая при движении лыжника на прямолинейном участке,  $\vec{R} = -\mu\vec{\vartheta}$ , где  $\mu = \text{const} > 0$ ,  $\vec{\vartheta}$  – скорость лыжника. Найти закон движения лыжника на прямолинейном участке спуска, пренебрегая силами сопротивления на криволинейном участке и полагая  $\vartheta_0^2 = 0,1gh$ .

*Решение*

Прежде всего рассмотрим движение лыжника на криволинейном участке  $AB$  (рис. 7) – этап 1. Применяем здесь уравнения Эйлера (31), учитывая, что

$$f = 0, \quad \rho = r \equiv \text{const}, \quad F_\tau = mg \sin \varphi, \quad F_n = mg \cos \varphi.$$

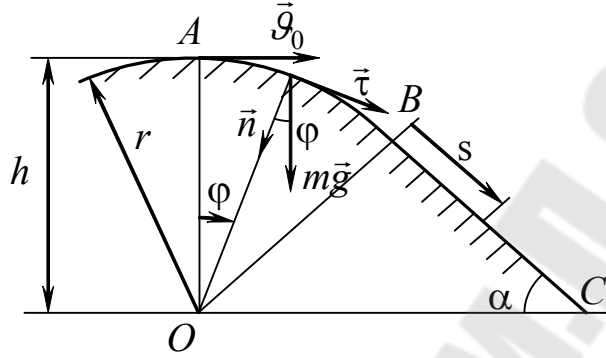


Рис. 7

В этом случае уравнения движения такие:

$$\frac{d^2 s^I}{dt^2} = g \sin \varphi, \quad \frac{m \vartheta^2}{r} = F_n + N. \quad (43)$$

Далее, аналогично задаче 4, применяем соотношения

$$s^I = r\varphi, \quad \vartheta^I = \frac{ds^I}{dt}, \quad \vartheta^I = \omega r, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d^2 s^I}{dt^2} = \frac{d\vartheta^I}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\omega^2}{2} \right),$$

где верхний индекс отмечает номер этапа движения. Следовательно, первое уравнение в (43) принимает вид:

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) = \frac{g}{r} \sin \varphi. \quad (44)$$

Из постановки задачи следует такое начальное условие для этого дифференциального уравнения:

$$\varphi = 0, \quad \omega = \omega_0 \equiv \frac{\vartheta_0}{r}.$$

Проинтегрировав (44) и удовлетворив этому начальному условию, найдем

$$\omega^2 - \frac{\vartheta_0^2}{r^2} = \frac{2g}{r}(1 - \cos \varphi), \quad \vartheta_0^2 = 0,1gh. \quad (45)$$

Положение точки  $B$  на линии связи определяется углом  $\varphi = \angle AOB = \alpha$  (рис. 7). Тогда с помощью (45) подсчитываем

$$\omega_B^2 = k_*^2 \frac{g}{r}, \quad k_*^2 = 2,1 - 2 \cos \alpha, \quad \vartheta_B = k_* \sqrt{gr}. \quad (46)$$

Линейная скорость  $\vartheta_B$  – скорость лыжника в конечной точке первого этапа – является начальным значением скорости при изучении движения по прямолинейному склону  $BC$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ .

Учитывая наличие силы сопротивления, пропорциональной скорости движения, уравнение движения лыжника на II-м этапе запишем в виде:

$$m \frac{d^2 s^{\text{II}}}{dt^2} = mg \sin \alpha - \mu \frac{ds^{\text{II}}}{dt}. \quad (47)$$

Здесь за начальный момент времени  $t = 0$  принимаем момент пребывания лыжника в точке  $B$ , поэтому начальные условия для уравнения (47) следующие:

$$t = 0, \quad s^{\text{II}} = 0, \quad \frac{ds^{\text{II}}}{dt} = \vartheta_B.$$

Чтобы понизить порядок уравнения (47), запишем его в виде:

$$\frac{d\vartheta^{\text{II}}}{dt} = -\frac{\mu}{m} \vartheta^{\text{II}} + g \sin \alpha; \quad t = 0, \quad \vartheta^{\text{II}} = \vartheta_B.$$

Проинтегрировав это уравнение и удовлетворив начальному условию, найдем

$$\vartheta^{\text{II}} \equiv \frac{ds^{\text{II}}}{dt} = \frac{mg \sin \alpha}{\mu} + \left( k_* \sqrt{gr} - \frac{mg \sin \alpha}{\mu} \right) \exp\left( \frac{-\mu t}{m} \right), \quad (48)$$

$$t = 0, \quad s^{\text{II}} = 0.$$

Проинтегрировав еще раз по времени, получим искомый закон движения на II этапе:

$$s^{\text{II}}(t) = \frac{mg}{\mu} \left[ t \sin \alpha - \frac{1}{g} \left( \frac{mg \sin \alpha}{\mu} - k_* \sqrt{gr} \right) \left( 1 - \exp\left( \frac{-\mu t}{m} \right) \right) \right].$$

По формуле (48) нетрудно проследить влияние величины начальной скорости  $|\vec{\mathfrak{v}}_0|$ , коэффициента сопротивления  $\mu$  и геометрических параметров  $r, \alpha$  на скорость движения.

#### Контрольные вопросы

1. В каких случаях задачу динамики несвободной точки предпочтительнее решать, применяя уравнения движения в форме Эйлера?

2. Укажите формулы для подсчета реакции при использовании декартовых и естественных координатных осей. Какая из этих формул более содержательна в физическом отношении?

### 4. Задания для расчетно-графических работ

#### Задание 1

Точка массы  $m$  движется в трехмерном пространстве. Известны ее уравнения движения:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Найти:

- 1) компоненты вектора скорости  $\vec{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z)$ ,  $t \geq 0$ ;
- 2) компоненты вектора ускорения  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ ,  $t \geq 0$ ;
- 3) компоненты вектора силы, вызвавшей это движение  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ ,  $t \geq 0$ ;
- 4) кинетическую энергию точки  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ ;
- 5) работу силы  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$  на интервале времени  $t \in [t_1, t_2]$ ;
- 6) компоненты вектора силы инерции точки  $\vec{\Phi}(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$  при  $t = t_1$ .

Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1

| № п/п | $m$ , кг | $x(t)$ , м    | $y(t)$ , м     | $z(t)$ , м   | $t_1$ , с | $t_2$ , с |
|-------|----------|---------------|----------------|--------------|-----------|-----------|
| 1     | 2,5      | $0,5t^3 + 2t$ | $4t - 4$       | $0,3t^2 + t$ | 2         | 3         |
| 2     | 3        | $t^2 - 0,5t$  | $0,2t^3 - t^2$ | $2t + 1,5$   | 1         | 2         |
| 3     | 1        | $-t + 5$      | $3t^2 - 2t$    | $t^3 - 2t$   | 0,5       | 1         |



| № п/п | $m$ , кг | $x(t)$ , м       | $y(t)$ , м       | $z(t)$ , м      | $t_1$ , с | $t_2$ , с |
|-------|----------|------------------|------------------|-----------------|-----------|-----------|
| 4     | 2        | $-2t^3 + t^2$    | $7t + 3$         | $5t^2 - 6t$     | 1         | 3         |
| 5     | 4        | $0,2t^2 + t$     | $0,1t^3 + 0,5t$  | $0,5t - 4$      | 2         | 2,5       |
| 6     | 1,5      | $-1,5t - 1,5$    | $0,75t^2 + t$    | $0,4t^3 - 2t^2$ | 1         | 2         |
| 7     | 5        | $1,5t^3 + 2t$    | $2,5t - 5$       | $2t^2 - 5t$     | 0,5       | 2         |
| 8     | 2        | $2,5t^2 - 2t$    | $1,5t^2 - 6t$    | $4t + 4$        | 0         | 2         |
| 9     | 3        | $10t + 2$        | $5t^2 + 3t$      | $-2t^3 + 4t^2$  | 1         | 1,5       |
| 10    | 4        | $-0,6t^3 - t$    | $0,5t - 1$       | $t^2 + t$       | 1,5       | 2         |
| 11    | 5        | $-t^2 + 10t$     | $0,4t^3 + 2t$    | $2t + 3$        | 2         | 3         |
| 12    | 3        | $2t + 1$         | $0,2t^2 - t$     | $t^3 - 0,5t$    | 3         | 4         |
| 13    | 1        | $2t^3 - t^2 + t$ | $5t - 3$         | $-t^2 - 4t$     | 1         | 4         |
| 14    | 2        | $4t^2 - 6t$      | $-3t^3 - 2t$     | $5t + 2$        | 0,5       | 1         |
| 15    | 2,5      | $2t + 1$         | $2t^2 + 2,5t$    | $-t^3 - 4t$     | 1         | 2         |
| 16    | 4        | $t^3 + t^2 - 2t$ | $5t - 3$         | $-5t^2 + 2t$    | 0         | 1,5       |
| 17    | 1,5      | $0,4t^2 - 3t$    | $-0,1t^3 + 2t$   | $2 + 2t$        | 2         | 4         |
| 18    | 2,5      | $-10t + 1$       | $t - 3t^2$       | $0,2t^3 + 5t$   | 1,5       | 3         |
| 19    | 1        | $0,1t^3 + t^2$   | $-2,5t - 6$      | $0,5t^2 - 2t$   | 3         | 4         |
| 20    | 5        | $0,75t^2 - 2t$   | $2t^3 - 5t$      | $-3t + 1$       | 0,5       | 1         |
| 21    | 3        | $3,5 - 3t$       | $2,5t^2 + 2t$    | $1,5t^3 - 6t$   | 1         | 2         |
| 22    | 4        | $t^3 - 0,8t^2$   | $0,5t - 1$       | $4t + 1,5t^2$   | 0,5       | 2         |
| 23    | 1,5      | $0,5t^2 + 3t$    | $t^3 + 2t^2 - t$ | $2t - 5$        | 0         | 0,5       |
| 24    | 2,5      | $4t + 2,5$       | $3t^2 - 6t$      | $0,2t^3 + t$    | 1,5       | 2         |
| 25    | 2        | $-0,1t^3 + 2t$   | $0,5t - 1$       | $-t^2 + 5t$     | 2         | 3         |
| 26    | 5        | $t - 5t^2$       | $1,5t^3 - 3t$    | $-2t + 1$       | 0,5       | 1         |
| 27    | 1,5      | $2 - 4t$         | $0,4t^2 + t$     | $-0,2t^3 - t$   | 2         | 5         |
| 28    | 3        | $0,5t^3 + 2t^2$  | $2,5t - 2,5$     | $-3t^2 + 2t$    | 1         | 2         |
| 29    | 4        | $3t^2 - t$       | $2t^3 + 1,5t^2$  | $-2t + 0,5$     | 1         | 1,5       |
| 30    | 2,5      | $0,6t + 1$       | $0,5t^2 + 2t$    | $0,1t^3 - 0,6t$ | 2         | 4         |
| 31    | 3        | $0,4t^3 - 8t$    | $2,5t + 1$       | $1,5t^2 - 2t$   | 2         | 2,5       |
| 32    | 1        | $0,3t^2 - t$     | $0,5t^3 - 2t$    | $2t + 1$        | 3         | 4         |
| 33    | 2,5      | $2t + 1$         | $-1,5t^2 + 3t$   | $-0,2t^3 - t$   | 0,5       | 2         |
| 34    | 2        | $0,25t^3 - 6t$   | $1,8t - 1$       | $1 - 3t^2 + 5t$ | 1         | 2         |
| 35    | 1,5      | $-t + 5t^2$      | $0,4t^3 + 2t^2$  | $2t + 1$        | 1         | 1,5       |

| № п/п | $m$ , кг | $x(t)$ , м      | $y(t)$ , м       | $z(t)$ , м      | $t_1$ , с | $t_2$ , с |
|-------|----------|-----------------|------------------|-----------------|-----------|-----------|
| 36    | 5        | $2t + 6$        | $0,2t^2 - 5t$    | $-0,5t^3 + 4t$  | 2         | 3         |
| 37    | 3        | $2t^3 - 4t$     | $0,6t - 1$       | $3t - 0,5t^2$   | 2         | 4         |
| 38    | 1        | $1,5t^2 - t$    | $-0,2t^3 - t$    | $2t + 1$        | 1,5       | 3         |
| 39    | 4        | $6t + 1$        | $t^2 + 4t$       | $-0,1t^3 + 5t$  | 2         | 2,5       |
| 40    | 2        | $0,5t^3 + 2t^2$ | $0,9t - 1$       | $-2t^2 + 3t$    | 1         | 1,5       |
| 41    | 3        | $3t^2 - 4t$     | $-2t^3 - t$      | $5t + 2$        | 0,5       | 1         |
| 42    | 2        | $2t + 1$        | $3t^2 + 3t$      | $-t^3 - 5t$     | 1         | 2         |
| 43    | 2,5      | $t^3 + 5t^2$    | $5t - 5$         | $-7,5t^2 + t$   | 0         | 1,5       |
| 44    | 1        | $0,6t^2 - 3t$   | $-0,1t^3 + 4t$   | $4 + 3t$        | 2         | 4         |
| 45    | 4        | $-8t + 1$       | $4t - 3t^2$      | $1,2t^3 + 4t$   | 1,5       | 3         |
| 46    | 3        | $0,9t^3 + t^2$  | $-6t - 3$        | $3t^2 - 4t$     | 3         | 4         |
| 47    | 1,5      | $9t^2 - 1,5t$   | $3t^3 - 6t$      | $-3t + 3$       | 0,5       | 1         |
| 48    | 2        | $4 - 3t$        | $5t^2 + 2t$      | $8t^3 - 6t$     | 1         | 2         |
| 49    | 2,5      | $t^3 - 0,75t^2$ | $2,5t - 1$       | $4t + 5t^2$     | 0,5       | 2         |
| 50    | 3        | $3t^2 + 6t$     | $t^3 + 3t^2 - t$ | $2t - 6$        | 0         | 0,5       |
| 51    | 5        | $5t + 2,5$      | $5t^2 - 10t$     | $2t^3 + t$      | 1,5       | 2         |
| 52    | 2        | $-0,8t^3 + t$   | $4t - 2$         | $-t^2 + 6t$     | 2         | 3         |
| 53    | 4        | $t - 10t^2$     | $8t^3 - 3t$      | $-2t + 2$       | 0,5       | 1         |
| 54    | 1,5      | $3 - 6t$        | $9t^2 + 3t$      | $-1,5t^3 - t$   | 2         | 5         |
| 55    | 3        | $6t^3 + 2t^2$   | $6t - 2,5$       | $-3t^2 + 9t$    | 1         | 2         |
| 56    | 2,5      | $5t^2 - t$      | $2t^3 + 2,5t^2$  | $-5t + 2,5$     | 1         | 1,5       |
| 57    | 3        | $0,9t + 1$      | $0,9t^2 + 2t$    | $1,2t^3 - 0,6t$ | 2         | 4         |
| 58    | 1        | $0,4t^3 - 8t$   | $2,5t + 1$       | $1,5t^2 - 2t$   | 2         | 2,5       |
| 59    | 1,5      | $3t^2 - 3t$     | $6t^3 - 2t$      | $2t + 1,5$      | 3         | 4         |
| 60    | 2        | $4t + 2$        | $-6t^2 + 3t$     | $-0,8t^3 - 2t$  | 0,5       | 2         |

**Задание 2**

Точка массы  $m$  движется по окружности радиуса  $R$ . Закон движения точки задан как функция дуговой координаты от времени  $s = s(t)$ . Найти:

- 1) компоненты вектора силы  $\vec{F}(F_\tau, F_n)$ , вызвавшей это движение;
- 2) кинетическую энергию точки  $T(t)$ ;

- 3) работу силы  $A_{1,2}(\vec{F})$  при  $t \in [t_1, t_2]$ ;
- 4) построить при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  вектор ускорения  $\vec{a}(a_\tau, a_n)$  и вектор силы инерции  $\vec{\Phi}(\Phi_\tau, \Phi_n)$ .

Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 2.

Таблица 2

| № п/п | $m$ , кг | $R$ , м | $s = s(t)$ , м                | $t_1$ , с  | $t_2$ , с  |
|-------|----------|---------|-------------------------------|------------|------------|
| 1     | 2        | 0,5     | $2 \sin(\pi t) - 3t$          | 0,25       | 1,5        |
| 2     | 1        | 2       | $1 - 2 \cos(\pi t / 3)$       | 1          | 3          |
| 3     | 0,5      | 1       | $0,5 \sin(2\pi t / 3) - \pi$  | 1          | 2          |
| 4     | 1        | 0,2     | $-0,5 \cos(2t) + 2\pi t$      | 0          | $\pi / 6$  |
| 5     | 3        | 0,5     | $3 - 2t - 4 \cos(t / 2)$      | $\pi / 2$  | $2\pi$     |
| 6     | 2,5      | 2       | $2t - \sin(\pi t / 6)$        | 3          | 4          |
| 7     | 2        | 0,4     | $4 \cos(\pi t / 2) + \pi t$   | 0,5        | 2          |
| 8     | 1,5      | 1       | $-3t - 3 \cos(2t / 3)$        | $3\pi / 2$ | $3\pi$     |
| 9     | 0,5      | 1,5     | $-2 \sin(\pi t / 3) + 2$      | 2          | 4          |
| 10    | 4        | 2       | $0,75 \sin(2t) - 1$           | $\pi / 3$  | $2\pi / 3$ |
| 11    | 5        | 2       | $3 \cos(\pi t / 6) + 2t$      | 2          | 6          |
| 12    | 3        | 2,5     | $4 \sin(0,5t) - \pi$          | $\pi / 2$  | $8\pi / 3$ |
| 13    | 2,5      | 1       | $5 - 4 \cos(\pi t / 4)$       | 1          | 4          |
| 14    | 1        | 0,5     | $-3t - \sin(2\pi t / 3)$      | 0,25       | 2          |
| 15    | 2        | 2       | $2 \cos(t / 2) - 5$           | $\pi / 2$  | $3\pi / 2$ |
| 16    | 1,5      | 0,5     | $\pi t - 9 \cos(\pi t / 3)$   | 0          | 1          |
| 17    | 0,5      | 0,3     | $-\sin(\pi t / 4) + 2\pi$     | 3          | 5          |
| 18    | 4        | 3       | $-0,5 \sin(3t) + 3t$          | $\pi / 6$  | $\pi / 2$  |
| 19    | 3        | 2,5     | $0,25 \cos(2\pi t) - \pi t$   | 0          | 0,5        |
| 20    | 2,5      | 2       | $5 \cos(\pi t / 2) - 2t$      | 0,5        | 2          |
| 21    | 2        | 1       | $3t - 5 \sin(\pi t)$          | 0,5        | 1,5        |
| 22    | 3        | 1,5     | $-5t + \cos(2t)$              | $\pi / 6$  | $\pi / 3$  |
| 23    | 4        | 2       | $8 \sin(t / 4) + 2t$          | $\pi$      | $5\pi$     |
| 24    | 2        | 0,6     | $-6 \cos(t / 2) - \pi t / 2$  | $\pi / 3$  | $4\pi / 3$ |
| 25    | 1,5      | 0,8     | $\pi - 2 \cos(\pi t / 2)$     | 0,5        | 2          |
| 26    | 5        | 3       | $0,5t - \sin(0,5t)$           | $\pi / 2$  | $3\pi$     |
| 27    | 3        | 1,5     | $3 \sin(\pi t / 3) + \pi / 2$ | 1          | 4          |
| 28    | 2,5      | 2       | $t + 4 \cos(\pi t / 4)$       | 1          | 3          |
| 29    | 0,5      | 0,4     | $2 \sin(t) - \pi t$           | $\pi / 6$  | $3\pi / 2$ |
| 30    | 2        | 2,5     | $\pi t - \sin(\pi t / 6)$     | 3          | 9          |

| № п/п | $m$ , кг | $R$ , м | $s = s(t)$ , м                 | $t_1$ , с  | $t_2$ , с  |
|-------|----------|---------|--------------------------------|------------|------------|
| 31    | 1        | 0,5     | $-6 \cos(\pi t / 12)$          | 4          | 8          |
| 32    | 2        | 1,5     | $2 - 5 \cos(t / 2)$            | $\pi / 2$  | $3\pi / 2$ |
| 33    | 1,5      | 1       | $3 - 2t - \sin(3t)$            | $\pi / 6$  | $\pi / 2$  |
| 34    | 3        | 2       | $6 \cos(t / 6) + 5$            | $2\pi$     | $4\pi$     |
| 35    | 4        | 2       | $0,5 \sin(3\pi t / 4) - 2t$    | 2          | 4          |
| 36    | 0,5      | 0,25    | $3t - 6 \cos(t / 3)$           | $\pi$      | $2\pi$     |
| 37    | 2        | 3       | $4 \cos(\pi t / 2) + 4t$       | 0,5        | 2          |
| 38    | 3        | 0,3     | $\pi - 2 \sin(\pi t / 4)$      | 1          | 5          |
| 39    | 1,5      | 0,6     | $3 \sin(t / 2) - 4$            | $\pi / 2$  | $5\pi / 4$ |
| 40    | 2        | 1,5     | $0,5 \cos(2\pi t) + 5t$        | 0          | 0,5        |
| 41    | 2,5      | 1       | $-2t + \cos(3t)$               | $\pi / 12$ | $\pi / 3$  |
| 42    | 4        | 2       | $-0,5 \sin(\pi t / 2) - \pi t$ | 1          | 2,5        |
| 43    | 5        | 2,5     | $1 - t - 3 \cos(t)$            | $\pi / 3$  | $3\pi / 4$ |
| 44    | 0,5      | 0,5     | $3t - \sin(0,5t)$              | $\pi$      | $5\pi / 2$ |
| 45    | 2        | 0,4     | $2 \cos(\pi t / 4) + 3$        | 1          | 3          |
| 46    | 3        | 1       | $-\sin(\pi t) - 2\pi t$        | 0,5        | 1,25       |
| 47    | 2        | 2,5     | $0,5 \sin(2t) + 0,5t$          | $\pi / 6$  | $3\pi$     |
| 48    | 1        | 2       | $2 \cos(t / 2) + \pi t$        | $\pi / 2$  | $5\pi / 2$ |
| 49    | 1,5      | 3       | $-3t - 2 \sin(2\pi t / 3)$     | 0,75       | 2          |
| 50    | 5        | 1       | $2t - 3 \cos(\pi t / 6)$       | 1          | 4          |
| 51    | 4        | 2       | $\cos(2t) - \pi t$             | 0          | $3\pi / 8$ |
| 52    | 2        | 2,5     | $\sin(t / 3) + 1$              | $\pi$      | $4\pi$     |
| 53    | 3        | 1,5     | $t - 4 \sin(\pi t / 4)$        | 2          | 7          |
| 54    | 0,5      | 0,4     | $-8 \cos(t / 4) - t$           | 0          | $3\pi$     |
| 55    | 2        | 0,5     | $5t - 2 \sin(t) + 1$           | $\pi / 3$  | $5\pi / 4$ |
| 56    | 3        | 1       | $15 \cos(t / 3) + \pi t$       | $\pi$      | $2\pi$     |
| 57    | 2,5      | 2       | $0,5 \cos(2t) - t$             | $\pi / 6$  | $\pi$      |
| 58    | 2        | 0,4     | $3 \sin(\pi t / 6) - 2t$       | 1          | 9          |
| 59    | 3        | 2       | $-2t - 4 \cos(0,5t)$           | $\pi / 3$  | $2\pi$     |
| 60    | 4        | 3       | $3\pi - \sin(\pi t / 2)$       | 0,5        | 3          |

**Задание 3**

Точка массы  $m$  движется в трехмерном пространстве  $OXYZ$  под действием силы  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ . Даны начальные условия при  $t = 0$ :

$$\vartheta_x(0) = \vartheta_x^0, \vartheta_y(0) = \vartheta_y^0, \vartheta_z(0) = \vartheta_z^0, x(0) = x_0,$$

$$y(0) = y_0, z(0) = z_0.$$

Найти:

- 1) компоненты вектора ускорения  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ ;
- 1) компоненты вектора скорости  $\vec{v}(\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ ;
- 1) уравнения движения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ;
- 1) кинетическую энергию точки  $T(t)$ ;
- 1) работу силы  $A_{1,2}(\vec{F})$  при  $t \in [t_1, t_2]$ .

Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 3.

Таблица 3

| №<br>п/п | $m$ ,<br>кг | $F_x$ ,<br>Н | $F_y$ ,<br>Н | $F_z$ ,<br>Н | Начальные условия |              |              |                          |                          |                          | $t_1$ ,<br>с | $t_2$ ,<br>с |
|----------|-------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|--------------|--------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|--------------|
|          |             |              |              |              | $x_0$ ,<br>м      | $y_0$ ,<br>м | $z_0$ ,<br>м | $\vartheta_x^0$ ,<br>м/с | $\vartheta_y^0$ ,<br>м/с | $\vartheta_z^0$ ,<br>м/с |              |              |
| 1        | 3           | $6t$         | -6           | 3            | 1                 | 0,5          | 0            | 2                        | -1                       | -3                       | 1            | 2            |
| 2        | 2           | -8           | $2t+1$       | 2            | 2                 | 0            | -1           | 1                        | 3                        | -2                       | 0,5          | 1            |
| 3        | 4           | -12          | 8            | $4-4t$       | 0                 | 1,5          | 2            | 3                        | 0,4                      | 1                        | 0,5          | 2            |
| 4        | 2           | $10t$        | 5            | -4           | 0,5               | 0            | 1            | 6                        | 5                        | 2                        | 1            | 3            |
| 5        | 1           | -3           | $3t+2$       | 7            | 3                 | -1           | 0            | -2                       | 1                        | 4                        | 2            | 3            |
| 6        | 3           | 6            | 9            | $-6t$        | -3                | 0            | 0,5          | 1                        | -6                       | 3                        | 0,5          | 1            |
| 7        | 2           | $t-4$        | 2            | -2           | 0                 | 1            | 5            | 2                        | 0,5                      | -1                       | 1            | 2,5          |
| 8        | 2           | 4            | $6t$         | 5            | -1                | 0            | 2            | -3                       | 1                        | -4                       | 1            | 4            |
| 9        | 1           | 2            | -5           | $-2t$        | 1                 | 2            | 0            | 5                        | 10                       | -2                       | 2            | 3            |
| 10       | 3           | $9t-3$       | 3            | -6           | 3                 | 0            | 0,4          | 1                        | 2                        | 0,5                      | 0,5          | 2            |
| 11       | 4           | -8           | $4t$         | 2            | 0                 | -1           | -2           | 2                        | 3                        | 1                        | 1            | 3            |
| 12       | 2           | -4           | 10           | $6t+1$       | 1                 | 0            | 2            | -3                       | 4                        | 0,5                      | 2            | 4            |
| 13       | 1           | $2t+4$       | 5            | 7            | 0,5               | 1            | 0            | -1                       | 0,7                      | 3                        | 2            | 2,5          |
| 14       | 1           | 6            | $t-1$        | 3            | 2                 | 0            | 3            | 1                        | -2                       | -3                       | 0,5          | 3            |
| 15       | 3           | 3            | -3           | $-9t$        | 0                 | -3           | -1           | 0,5                      | 3                        | 1                        | 1            | 4            |
| 16       | 3           | $15t$        | 9            | -6           | -1                | 0            | 5            | 1                        | 2                        | -3                       | 1            | 2            |
| 17       | 2           | 2            | $4t+6$       | -2           | 4                 | -4           | 0            | 2                        | 1                        | -1                       | 3            | 4            |
| 18       | 4           | 8            | -4           | $-12t$       | 3                 | 0            | 2            | -1                       | 0,5                      | 1                        | 2            | 3            |
| 19       | 5           | $-5t$        | 15           | -10          | 0                 | -1           | -3           | 1                        | 2                        | 5                        | 2,5          | 3            |
| 20       | 3           | -6           | $6t$         | 3            | 5                 | 0            | 1            | -2                       | -1                       | 0                        | 1,5          | 3            |
| 21       | 1           | 5            | -3           | $2t-1$       | 1                 | -2           | 0            | 1                        | -3                       | 2                        | 0,5          | 3            |
| 22       | 2           | $10t$        | 2            | -4           | 2                 | 0            | 1,5          | 3                        | 1                        | 5                        | 1            | 2            |
| 23       | 4           | -2           | $8t$         | 4            | 0                 | -2           | 2            | -4                       | -1                       | 1                        | 1            | 3            |
| 24       | 1           | 3            | -2           | $-3t$        | -1                | 0            | 0,5          | 3                        | -2                       | -1                       | 2            | 3            |
| 25       | 3           | $3t+3$       | -12          | 6            | 3                 | -3           | 0            | 1                        | -1                       | 2                        | 2            | 4            |

| № п/п | $m$ , кг | $F_x$ , Н | $F_y$ , Н | $F_z$ , Н | Начальные условия |           |           |                       |                       |                       | $t_1$ , с | $t_2$ , с |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-------------------|-----------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------|-----------|
|       |          |           |           |           | $x_0$ , м         | $y_0$ , м | $z_0$ , м | $\vartheta_x^0$ , м/с | $\vartheta_y^0$ , м/с | $\vartheta_z^0$ , м/с |           |           |
| 26    | 5        | 15        | $-10t$    | $-5$      | $-2$              | 0         | 0,5       | $-1$                  | 2                     | 0,4                   | 1         | 3         |
| 27    | 2        | $-4$      | 8         | $-6t$     | 0                 | 1         | 2         | $-3$                  | $-4$                  | $-1$                  | 0,5       | 2         |
| 28    | 1        | $2t$      | $-1$      | 2         | 5                 | 0         | 4         | $-2$                  | $-1$                  | 1                     | 3         | 4         |
| 29    | 3        | $-6$      | $9t-3$    | 3         | 4                 | $-3$      | 0         | 3                     | $-1$                  | 2                     | 1         | 2,5       |
| 30    | 2        | $-8$      | 5         | $-2t$     | 5                 | 0         | $-1$      | $-5$                  | 6                     | 3                     | 1         | 2         |
| 31    | 2        | $-12t$    | 4         | $-2$      | 0                 | 0,5       | 3         | $-1$                  | 1                     | 1,5                   | 3         | 4         |
| 32    | 3        | 9         | $-15t$    | $-12$     | $-1$              | 0         | 2         | 3                     | 5                     | $-6$                  | 2         | 3         |
| 33    | 2        | $-5$      | 7         | $2t-1$    | 4                 | 3         | 0         | 2                     | $-2$                  | $-1$                  | 0,5       | 1         |
| 34    | 4        | $4t$      | $-8$      | 2         | 5                 | 0         | 1,5       | 0,5                   | 1                     | 3                     | 2         | 3         |
| 35    | 2        | 10        | $8t$      | $-6$      | 0                 | $-1$      | 6         | 4                     | $-4$                  | 2                     | 1         | 3         |
| 36    | 3        | $-3$      | 6         | $3t$      | 3                 | 0         | $-3$      | 6                     | $-6$                  | 2                     | 3         | 4         |
| 37    | 3        | $6t-3$    | 12        | $-9$      | 0,5               | 0,4       | 0         | $-1$                  | 2                     | 3                     | 0,5       | 2         |
| 38    | 2        | 7         | $4+2t$    | $-5$      | 2                 | 0         | $-2$      | 3                     | $-3$                  | 4                     | 1         | 2         |
| 39    | 2        | $-4$      | 11        | $10t$     | 0                 | 1         | $-1$      | 2                     | $-2$                  | 5                     | 1         | 3         |
| 40    | 1        | $5t$      | 1         | $-2$      | 0,7               | 0         | 0,5       | $-3$                  | $-4$                  | 2                     | 2         | 3         |
| 41    | 3        | 9         | $6-3t$    | $-3$      | $-3$              | 1         | 0         | 1                     | 2                     | $-4$                  | 0,5       | 1         |
| 42    | 4        | $-12$     | 2         | $-8t$     | 1                 | 0         | 3         | $-3$                  | $-4$                  | $-5$                  | 0,5       | 3         |
| 43    | 2        | $2t+1$    | $-5$      | $-6$      | 0                 | $-1$      | 0,7       | 0,5                   | 0,6                   | $-1$                  | 1         | 4         |
| 44    | 1        | 2         | $-3t$     | $-1$      | 5                 | 0         | 8         | $-3$                  | $-5$                  | 5                     | 4         | 5         |
| 45    | 1        | $-3$      | 5         | $t+3$     | 1                 | 2         | 0         | 3                     | 5                     | $-6$                  | 0,5       | 2         |
| 46    | 2        | $2-6t$    | $-10$     | 4         | 4                 | 0         | $-3$      | 2                     | 1                     | 0,5                   | 1         | 2         |
| 47    | 3        | 6         | $-12t$    | $-3$      | 0                 | 0,5       | 3         | 0,4                   | 0,7                   | $-1$                  | 2         | 3         |
| 48    | 2        | 5         | $-8$      | $4t$      | 1                 | 0         | 2         | $-5$                  | 3                     | $-1$                  | 1         | 3         |
| 49    | 4        | $8t-4$    | 10        | $-12$     | 2                 | 1         | 0         | $-2$                  | 4                     | $-3$                  | 0,5       | 1         |
| 50    | 5        | 10        | $20t$     | $-15$     | $-3$              | 0         | 0,5       | 2                     | $-1$                  | 1                     | 2         | 4         |
| 51    | 3        | 6         | 12        | $-18t$    | 0                 | 2         | $-1$      | 4                     | $-5$                  | 6                     | 3         | 4         |
| 52    | 1        | $7t$      | 2         | 3         | $-1$              | 0         | 3         | $-6$                  | 1                     | $-2$                  | 1         | 3         |
| 53    | 5        | 15        | $5t+5$    | $-10$     | 2                 | $-3$      | 0         | 0                     | 5                     | 4                     | 3         | 4         |
| 54    | 2        | 7         | $-3$      | $2+4t$    | 0,5               | 0         | 0,3       | 7                     | 4                     | $-6$                  | 0,5       | 3         |
| 55    | 1        | $1-6t$    | 2         | 5         | 0                 | 1         | 2         | $-1$                  | $-2$                  | $-3$                  | 2         | 3         |
| 56    | 3        | 9         | $6t$      | $-6$      | 3                 | 0         | $-1$      | 0,5                   | 1                     | 2                     | 1         | 4         |
| 57    | 5        | 20        | $-15$     |           | 1                 | 0,5       | 0         | $-3$                  | 3                     | $-1$                  | 2         | 3         |
| 58    | 2        | $-8t$     | 3         | $-4$      | $-2$              | 0         | 2         | 1                     | $-5$                  | 3                     | 1         | 3         |
| 59    | 1        | 2         | $3t+1$    | $-3$      | 0                 | 1         | 3         | 0,4                   | $-1$                  | $-2$                  | 0,5       | 1         |
| 60    | 4        | 6         | $-12$     | $8-4t$    | $-1$              | 1         | 0         | 3                     | 2                     | $-4$                  | 2         | 4         |

### Задание 4

Тяжелая точка поднимается под действием силы  $\vec{F}(t)$  по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $\gamma$  с горизонтом. Входные параметры задачи и начальные условия движения указаны в табл. 4. Найти:

- 1) скорость движения  $\vartheta_x(t)$  и закон движения  $x(t)$ ;
- 2) работу, которую совершает на интервале времени  $t \in [0, t_1]$  **каждая из сил** (сила тяжести, сила трения, движущая сила) **в отдельности**;
- 3) кинетическую энергию точки  $T(t)$ .

Проверить справедливость баланса энергий и работ

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n A_{1,2}(\vec{F}_i) \text{ при } t \in [0, t_1] \text{ для указанных условий движения.}$$

Таблица 4

| № п/п | $m$ , кг | $F(t) = A + Bt$ , Н |     | $\gamma$ , рад | $f$  | $x_0$ , м | $\vartheta_x^0$ , м/с | $t_1$ , с |
|-------|----------|---------------------|-----|----------------|------|-----------|-----------------------|-----------|
|       |          | $A$                 | $B$ |                |      |           |                       |           |
| 1     | 200      | 2000                | 100 | $\pi/4$        | 0,1  | 5,5       | 3,5                   | 2         |
| 2     | 500      | 4200                | 250 | $\pi/5$        | 0,25 | 1         | 2                     | 1         |
| 3     | 250      | 2500                | 250 | $\pi/6$        | 0,15 | 3,7       | 4,3                   | 3         |
| 4     | 400      | 3400                | 400 | $\pi/9$        | 0,2  | 2         | 2,4                   | 2         |
| 5     | 100      | 2000                | 600 | $\pi/6$        | 0,2  | 1,4       | 3                     | 2         |
| 6     | 200      | 3000                | 400 | $\pi/4$        | 0,1  | 2,3       | 2,2                   | 1         |
| 7     | 100      | 1200                | 300 | $\pi/6$        | 0,35 | 0         | 5,6                   | 2         |
| 8     | 500      | 4000                | 200 | $\pi/6$        | 0,3  | 1,5       | 6                     | 1         |
| 9     | 200      | 1600                | 300 | $\pi/9$        | 0,2  | 2         | 2,5                   | 3         |
| 10    | 300      | 2400                | 300 | $\pi/6$        | 0,15 | 3         | 4,5                   | 2         |
| 11    | 400      | 3500                | 200 | $\pi/5$        | 0,1  | 4,5       | 3                     | 1         |
| 12    | 250      | 2000                | 500 | $\pi/6$        | 0,2  | 1         | 2                     | 2         |
| 13    | 100      | 1500                | 150 | $\pi/4$        | 0,3  | 2         | 3,5                   | 2         |
| 14    | 200      | 1700                | 240 | $\pi/9$        | 0,25 | 2,5       | 2,3                   | 3         |
| 15    | 500      | 3800                | 500 | $\pi/5$        | 0,35 | 1,5       | 6,6                   | 2         |
| 16    | 100      | 1800                | 250 | $\pi/6$        | 0,1  | 0         | 5                     | 1         |
| 17    | 300      | 2550                | 300 | $\pi/6$        | 0,2  | 2,3       | 4,7                   | 2         |
| 18    | 400      | 3300                | 800 | $\pi/9$        | 0,4  | 2         | 3,2                   | 1         |
| 19    | 200      | 1700                | 320 | $\pi/4$        | 0,15 | 1         | 2,5                   | 2         |
| 20    | 500      | 3800                | 400 | $\pi/6$        | 0,15 | 0         | 5                     | 3         |
| 21    | 100      | 1200                | 200 | $\pi/4$        | 0,1  | 1,6       | 3,8                   | 1         |
| 22    | 200      | 1600                | 100 | $\pi/9$        | 0,35 | 2,2       | 2,6                   | 2         |
| 23    | 300      | 2700                | 200 | $\pi/4$        | 0,1  | 1,8       | 2                     | 1         |

Окончание табл. 4

| №<br>п/п | m, кг | F(t) = A + Bt, Н |     | γ, рад | f    | x <sub>0</sub> , м | ḡ <sub>x</sub> , м/с | t <sub>1</sub> , с |
|----------|-------|------------------|-----|--------|------|--------------------|----------------------|--------------------|
|          |       | A                | B   |        |      |                    |                      |                    |
| 24       | 100   | 1000             | 240 | π/6    | 0,2  | 1,5                | 5,2                  | 2                  |
| 25       | 500   | 3600             | 600 | π/6    | 0,1  | 2,8                | 3                    | 3                  |
| 26       | 250   | 2700             | 200 | π/5    | 0,1  | 3,4                | 4,3                  | 2                  |
| 27       | 300   | 2850             | 120 | π/4    | 0,2  | 1                  | 2,6                  | 1                  |
| 28       | 100   | 1400             | 600 | π/6    | 0,3  | 1,6                | 2,2                  | 1                  |
| 29       | 200   | 1800             | 500 | π/9    | 0,1  | 2                  | 5,8                  | 2                  |
| 30       | 500   | 4600             | 500 | π/6    | 0,35 | 0                  | 1,3                  | 3                  |
| 31       | 400   | 3800             | 400 | π/4    | 0,15 | 1                  | 2,4                  | 2                  |
| 32       | 150   | 1500             | 150 | π/6    | 0,2  | 1,6                | 2                    | 1                  |
| 33       | 250   | 2400             | 400 | π/6    | 0,25 | 4,2                | 6                    | 2                  |
| 34       | 500   | 3800             | 300 | π/9    | 0,3  | 2                  | 3,9                  | 1                  |
| 35       | 300   | 3000             | 150 | π/5    | 0,4  | 2,5                | 4,4                  | 2                  |
| 36       | 200   | 1700             | 240 | π/6    | 0,2  | 1                  | 2,5                  | 3                  |
| 37       | 200   | 2000             | 480 | π/4    | 0,1  | 1,2                | 2,5                  | 1                  |
| 38       | 150   | 3000             | 150 | π/6    | 0,2  | 0                  | 1,2                  | 2                  |
| 39       | 200   | 1800             | 400 | π/4    | 0,25 | 1,3                | 2                    | 1                  |
| 40       | 500   | 3600             | 300 | π/9    | 0,3  | 1                  | 2,5                  | 3                  |
| 41       | 300   | 2700             | 300 | π/6    | 0,4  | 2                  | 1,6                  | 1                  |
| 42       | 240   | 3200             | 240 | π/4    | 0,35 | 2,5                | 1                    | 2                  |
| 43       | 100   | 1000             | 240 | π/4    | 0,1  | 3                  | 3,4                  | 2                  |
| 44       | 200   | 1600             | 400 | π/6    | 0,3  | 2,6                | 3                    | 2                  |
| 45       | 500   | 4200             | 200 | π/9    | 0,15 | 1,5                | 1,7                  | 3                  |
| 46       | 100   | 1200             | 180 | π/4    | 0,2  | 1,4                | 2,5                  | 2                  |
| 47       | 250   | 2500             | 200 | π/4    | 0,1  | 5,8                | 2                    | 1                  |
| 48       | 400   | 3600             | 120 | π/9    | 0,15 | 4,3                | 3,9                  | 3                  |
| 49       | 200   | 1800             | 300 | π/6    | 0,25 | 2                  | 1,6                  | 2                  |
| 50       | 500   | 3900             | 400 | π/6    | 0,2  | 3,2                | 5                    | 2                  |
| 51       | 150   | 1500             | 300 | π/4    | 0,1  | 1,5                | 2,5                  | 1                  |
| 52       | 200   | 1700             | 600 | π/5    | 0,2  | 3                  | 1,5                  | 2                  |
| 53       | 500   | 4100             | 250 | π/6    | 0,15 | 2,2                | 4,6                  | 3                  |
| 54       | 300   | 3600             | 150 | π/6    | 0,1  | 0                  | 1,3                  | 2                  |
| 55       | 240   | 2000             | 120 | π/4    | 0,25 | 1,9                | 1                    | 1                  |
| 56       | 100   | 1500             | 150 | π/6    | 0,1  | 1,2                | 1,8                  | 1                  |
| 57       | 500   | 3300             | 200 | π/6    | 0,1  | 1                  | 4                    | 3                  |
| 58       | 400   | 3600             | 400 | π/5    | 0,15 | 3                  | 2,5                  | 2                  |
| 59       | 100   | 1800             | 300 | π/6    | 0,25 | 2,5                | 2                    | 1                  |
| 60       | 200   | 1900             | 240 | π/4    | 0,2  | 2                  | 3,5                  | 2                  |



### Задание 5

Материальная точка массы  $m$  движется горизонтально вдоль оси  $OX$  под действием силы  $\vec{F}(t)$ . Сопротивление среды характеризуется силой  $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\alpha\vec{v}$ ;  $\alpha > 0$ . Входные параметры задачи и начальные условия движения указаны в табл. 5. Найти:

- 1) закон движения точки  $x(t)$  и ее скорость  $v_x(t)$ ;
- 2) кинетическую энергию точки  $T(t)$ ;
- 3) работу, которую совершает движущая сила  $F_x(t)$  при  $t \in [0, t_1]$ ;
- 4) работу, которую совершает сила сопротивления среды  $\vec{F}_{\text{сопр}}$  при  $t \in [0, t_1]$ .

Проверить справедливость баланса энергий и работ  $T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^n A_{1,2}(\vec{F}_i)$  при  $t \in [0, t_1]$  для указанных условий движения.

Таблица 5

| № п/п | $m$ , кг | $F(t) = A + Bt$ , Н |     | $\alpha$ , Н· $\frac{с}{м}$ | $x_0$ , м | $v_x^0$ , м/с | $t_1$ , с |
|-------|----------|---------------------|-----|-----------------------------|-----------|---------------|-----------|
|       |          | $A$                 | $B$ |                             |           |               |           |
| 1     | 5        | 10                  | 2   | 2                           | 0,2       | 3,5           | 1         |
| 2     | 2        | 4                   | 2   | 1                           | 0,1       | 2             | 2         |
| 3     | 3        | 6                   | 1   | 1,5                         | 0,5       | 4,3           | 2         |
| 4     | 1        | 3                   | 4   | 0,5                         | 0,6       | 2,4           | 3         |
| 5     | 2        | 6                   | 2   | 1,2                         | 0,4       | 3             | 2         |
| 6     | 3        | 10                  | 2   | 2,5                         | 0,2       | 2,2           | 1         |
| 7     | 4        | 9                   | 1   | 3                           | 0,8       | 1,6           | 2         |
| 8     | 2        | 4                   | 3   | 0,4                         | 0,9       | 6             | 1         |
| 9     | 1        | 5                   | 2   | 1,5                         | 1         | 2,5           | 2         |
| 10    | 2        | 6                   | 4   | 2                           | 1,2       | 1,5           | 3         |
| 11    | 1        | 3                   | 2   | 1                           | 1,5       | 3             | 1         |
| 12    | 3        | 8                   | 3   | 3,2                         | 2         | 2             | 2         |
| 13    | 2        | 5                   | 1   | 2,5                         | 1,4       | 3,5           | 1         |
| 14    | 2        | 4                   | 4   | 1                           | 2,2       | 2,3           | 2         |
| 15    | 1        | 6                   | 2   | 1,5                         | 1         | 4             | 3         |
| 16    | 2        | 2                   | 1   | 0,8                         | 0,5       | 5             | 2         |
| 17    | 1        | 4                   | 3   | 1,1                         | 0,6       | 1,7           | 1         |
| 18    | 3        | 7                   | 2   | 2,2                         | 0,3       | 3,2           | 1         |
| 19    | 4        | 6                   | 1   | 2                           | 2         | 2,5           | 2         |

Продолжение табл. 5

| №<br>п/п | m, кг | F(t) = A + Bt, Н |   | α, Н·с/м | x <sub>0</sub> , м | v <sub>x</sub> <sup>0</sup> , м/с | t <sub>1</sub> , с |
|----------|-------|------------------|---|----------|--------------------|-----------------------------------|--------------------|
|          |       | A                | B |          |                    |                                   |                    |
| 20       | 5     | 9                | 1 | 3,5      | 0,4                | 5                                 | 3                  |
| 21       | 1     | 5                | 2 | 1        | 0,5                | 3,8                               | 2                  |
| 22       | 2     | 2                | 3 | 0,5      | 1,5                | 2,6                               | 1                  |
| 23       | 3     | 10               | 2 | 2        | 1,2                | 2                                 | 2                  |
| 24       | 2     | 7                | 2 | 2,5      | 2,5                | 1,2                               | 1                  |
| 25       | 4     | 5                | 1 | 1,5      | 2                  | 3                                 | 2                  |
| 26       | 3     | 4                | 3 | 0,6      | 2,3                | 4,3                               | 3                  |
| 27       | 3     | 3                | 4 | 1        | 1,8                | 2,6                               | 1                  |
| 28       | 2     | 5                | 2 | 2        | 2,6                | 2,2                               | 2                  |
| 29       | 2     | 6                | 4 | 1,5      | 2                  | 1,8                               | 1                  |
| 30       | 5     | 8                | 2 | 3        | 1                  | 1,3                               | 3                  |
| 31       | 4     | 10               | 2 | 2,4      | 1,5                | 2,4                               | 1                  |
| 32       | 2     | 7                | 1 | 1,6      | 0,5                | 2                                 | 2                  |
| 33       | 1     | 4                | 1 | 1        | 1,6                | 5                                 | 2                  |
| 34       | 2     | 5                | 2 | 2,8      | 0,8                | 3,9                               | 2                  |
| 35       | 3     | 9                | 3 | 3,5      | 0,4                | 4,4                               | 3                  |
| 36       | 5     | 10               | 4 | 4        | 3                  | 2,5                               | 2                  |
| 37       | 2     | 4                | 4 | 2        | 2                  | 2,5                               | 1                  |
| 38       | 3     | 6                | 3 | 1,5      | 1                  | 1,2                               | 3                  |
| 39       | 1     | 2                | 1 | 0,6      | 0,5                | 2                                 | 2                  |
| 40       | 2     | 5                | 1 | 2,2      | 0,6                | 2,5                               | 2                  |
| 41       | 3     | 10               | 3 | 3        | 1,8                | 1,6                               | 1                  |
| 42       | 4     | 3                | 2 | 1,8      | 1,2                | 1                                 | 2                  |
| 43       | 2     | 8                | 4 | 3,5      | 0,3                | 3,4                               | 3                  |
| 44       | 1     | 7                | 2 | 2        | 2,4                | 3                                 | 2                  |
| 45       | 2     | 5                | 4 | 1,4      | 1,5                | 1,7                               | 1                  |
| 46       | 1     | 6                | 2 | 1,2      | 1                  | 2,5                               | 1                  |
| 47       | 3     | 4                | 3 | 1        | 2,5                | 2                                 | 3                  |
| 48       | 2     | 3                | 6 | 0,6      | 3                  | 3,9                               | 2                  |
| 49       | 2     | 7                | 2 | 2        | 0,5                | 1,6                               | 1                  |
| 50       | 1     | 10               | 2 | 2,8      | 0,9                | 5                                 | 2                  |
| 51       | 2     | 8                | 4 | 2,3      | 2                  | 2,5                               | 2                  |
| 52       | 1     | 6                | 1 | 3        | 1,5                | 1,5                               | 1                  |
| 53       | 3     | 5                | 3 | 1,5      | 1                  | 4,6                               | 3                  |
| 54       | 4     | 4                | 2 | 0,6      | 0,9                | 1,3                               | 2                  |
| 55       | 5     | 2                | 4 | 0,5      | 0,3                | 1                                 | 2                  |
| 56       | 1     | 3                | 1 | 1        | 1,5                | 1,8                               | 1                  |

| №<br>п/п | $m$ , кг | $F(t) = A + Bt$ , Н |     | $\alpha$ , Н·с/м | $x_0$ , м | $\vartheta_x^0$ , м/с | $t_1$ , с |
|----------|----------|---------------------|-----|------------------|-----------|-----------------------|-----------|
|          |          | $A$                 | $B$ |                  |           |                       |           |
| 57       | 2        | 5                   | 1   | 1,3              | 0,6       | 4                     | 2         |
| 58       | 3        | 8                   | 2   | 2,6              | 2         | 2,5                   | 1         |
| 59       | 2        | 4                   | 1   | 0,7              | 0,5       | 2                     | 3         |
| 60       | 4        | 6                   | 2   | 2                | 3         | 3,5                   | 2         |

### Задание 6

Точка массы  $m$  совершает движение на двух участках траектории  $ABC$  (рис. 8), расположенной в вертикальной плоскости. Участок  $AB$  – дуга окружности радиуса  $r = h$ ; силы трения и сопротивления отсутствуют; в начальный момент  $t = 0$  скорость точки равна  $\vec{\vartheta}_0$ .

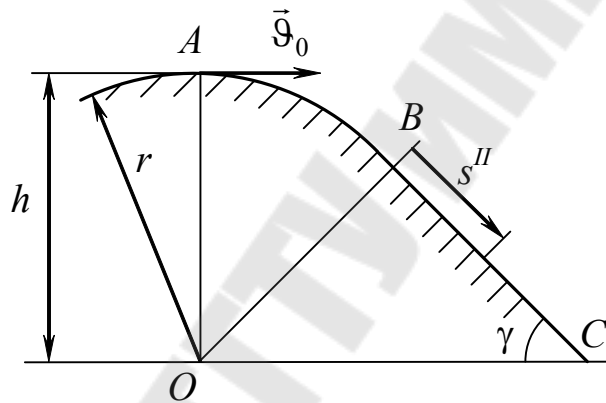


Рис. 8

Участок  $BC$  – прямая линия, касательная к дуге  $AB$  в точке  $B$ . На этом участке действует движущая сила  $\vec{F}(t)$ , параллельная  $BC$ , а также сила сопротивления  $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\alpha\vec{\vartheta}$ ,  $\alpha \equiv \text{const} > 0$ . Угол наклона  $\gamma$  известен. Нужно изучить движение точки на каждом участке. Построить графики функций: закон движения точки  $s^{\text{II}}(t)$ , скорость  $\vartheta^{\text{II}}(t)$  и кинетическая энергия  $T^{\text{II}}(t)$  на этапе  $BC$ . Выбрать самостоятельно момент  $t = t_*$ , когда изучаемая точка находится справа от точки  $B$ , на участке  $BC$ . Для этого мгновения построить на схеме векторы скорости, ускорения, движущей силы, силы сопротивления и силы инерции точки. Исходные данные приведены в табл. 6.

*Примечание.* При выполнении этого задания нужно воспользоваться алгоритмом решения задачи 5.

Таблица 6

| №<br>п/п | m,<br>кг | $F(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3$ , Н |       |       |       | $\vartheta_0$ ,<br>м/с | $\alpha$ , Н· $\frac{с}{м}$ | $h = r$ ,<br>м | $\gamma$ ,<br>град |
|----------|----------|---|-------|-------|-------|------------------------|-----------------------------|----------------|--------------------|
|          |          | $A_0$                                     | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |                        |                             |                |                    |
| 1        | 2        | 16  | -2    | 6     | 1     | 2,4                    | 5,5                         | 2              | 20                 |
| 2        | 1        | 24  | 1     | 0     | 2     | 3                      | 1                           | 1,5            | 45                 |
| 3        | 3        | 32  | 2     | 4     | 0     | 2,2                    | 3,7                         | 1              | 10                 |
| 4        | 4        | 20  | -3    | 3     | 0     | 5,6                    | 2                           | 0,5            | 60                 |
| 5        | 5        | 15  | -1,5  | 2     | 1,2   | 6                      | 1,4                         | 3              | 15                 |
| 6        | 1        | 16  | 3     | 1     | 4     | 2,5                    | 2,3                         | 2,5            | 20                 |
| 7        | 2        | 38  | 1     | 2     | 2,4   | 4,5                    | 0                           | 0,7            | 30                 |
| 8        | 3        | 18  | -2    | 0     | 3     | 3                      | 1,5                         | 2,2            | 40                 |
| 9        | 2        | 24  | 2     | 4     | 0     | 2                      | 2                           | 1              | 50                 |
| 10       | 4        | 32  | -0,8  | 0     | 1     | 3,5                    | 3                           | 1,5            | 10                 |
| 11       | 3        | 17  | 0,5   | 1     | 3     | 2,3                    | 4,5                         | 3              | 25                 |
| 12       | 3        | 36  | 1,5   | 0     | 4     | 6,6                    | 1                           | 2,6            | 20                 |
| 13       | 2        | 12  | -1    | 4     | 2     | 5                      | 2                           | 1,4            | 15                 |
| 14       | 2        | 16  | 1     | 3     | 0     | 4,7                    | 2,5                         | 2              | 60                 |
| 15       | 5        | 27  | -2,5  | 2     | 1,2   | 3,2                    | 1,5                         | 1,9            | 30                 |
| 16       | 4        | 10  | 3     | 0     | 4     | 2,5                    | 0                           | 0,6            | 35                 |
| 17       | 2        | 34  | -2    | 2     | 0,6   | 5                      | 2,3                         | 1              | 40                 |
| 18       | 1        | 27  | 1,2   | 0     | 3     | 3,8                    | 2                           | 3              | 50                 |
| 19       | 2        | 25  | 2     | 4     | 2     | 2,6                    | 1                           | 2,4            | 45                 |
| 20       | 3        | 14  | -0,5  | 0     | 4     | 2                      | 0                           | 1,3            | 10                 |
| 21       | 5        | 18  | 0,6   | 3     | 0     | 5,2                    | 1,6                         | 2              | 60                 |
| 22       | 2        | 40  | 1,6   | 4     | 1     | 3                      | 2,2                         | 2,5            | 25                 |
| 23       | 3        | 36  | -3    | 0     | 1,5   | 4,3                    | 1,8                         | 1,5            | 30                 |
| 24       | 1        | 15  | 0,8   | 1     | 0     | 2,6                    | 1,5                         | 1,6            | 60                 |
| 25       | 2        | 24  | 2     | 0     | 2     | 2,2                    | 2,8                         | 3              | 20                 |
| 26       | 3        | 38  | -2,4  | 2     | 0,8   | 5,8                    | 3,4                         | 2,7            | 45                 |
| 27       | 4        | 30  | 1,6   | 0     | 2,4   | 1,3                    | 1                           | 2,2            | 50                 |
| 28       | 2        | 16  | -0,4  | 2     | 4     | 2,4                    | 1,6                         | 1,1            | 30                 |
| 29       | 1        | 20  | 1,2   | 3     | 1     | 2                      | 2                           | 3,2            | 60                 |
| 30       | 2        | 30  | -2    | 0     | 3     | 6                      | 0                           | 0,8            | 35                 |
| 31       | 1        | 18  | 2,5   | 1     | 2     | 3,9                    | 1                           | 2              | 25                 |
| 32       | 3        | 36  | 0,5   | 0     | 1,2   | 4,4                    | 1,6                         | 1,5            | 30                 |
| 33       | 2        | 24  | -0,8  | 2     | 0     | 2,5                    | 4,2                         | 1              | 10                 |
| 34       | 2        | 32  | -1    | 3     | 4     | 2,5                    | 2                           | 0,5            | 45                 |
| 35       | 1        | 10  | 2     | 0     | 2     | 1,2                    | 2,5                         | 3              | 30                 |
| 36       | 2        | 16  | 1,6   | 2     | 1     | 2                      | 1                           | 2,5            | 40                 |
| 37       | 1        | 32  | -0,6  | 1     | 2,4   | 2,5                    | 1,2                         | 0,7            | 15                 |

| №<br>п/п | $m$ ,<br>кг | $F(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3$ , Н |       |       |       | $\vartheta_0$ ,<br>м/с | $\alpha$ , Н· $\frac{с}{м}$ | $h = r$ ,<br>м | $\gamma$ ,<br>град |
|----------|-------------|---|-------|-------|-------|------------------------|-----------------------------|----------------|--------------------|
|          |             | $A_0$                                     | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |                        |                             |                |                    |
| 38       | 3           | 12  | 0,4   | 0     | 2     | 1,6                    | 0                           | 2,2            | 30                 |
| 39       | 4           | 24  | 3     | 0     | 3     | 1                      | 1,3                         | 1              | 20                 |
| 40       | 5           | 35  | -1,5  | 3     | 0     | 3,4                    | 1                           | 1,5            | 40                 |
| 41       | 1           | 18  | 2     | 2     | 4     | 3                      | 2                           | 3              | 60                 |
| 42       | 2           | 37  | 1,2   | 1     | 0     | 1,7                    | 2,5                         | 2,6            | 45                 |
| 43       | 3           | 15  | 3     | 0     | 1,5   | 2,5                    | 3                           | 1,4            | 50                 |
| 44       | 2           | 17  | -0,5  | 3     | 2     | 2                      | 2,6                         | 2              | 35                 |
| 45       | 4           | 35  | 1,6   | 0     | 1     | 3,9                    | 1,5                         | 1,9            | 30                 |
| 46       | 2           | 36  | 0,5   | 4     | 0     | 1,6                    | 1,4                         | 0,6            | 10                 |
| 47       | 2           | 20  | 1,2   | 3     | 4     | 5                      | 5,8                         | 1              | 45                 |
| 48       | 3           | 15  | 0,8   | 0     | 3     | 2,5                    | 4,3                         | 3              | 20                 |
| 49       | 1           | 33  | -2    | 1     | 1,6   | 1,5                    | 2                           | 2,4            | 50                 |
| 50       | 2           | 36  | 2,5   | 4     | 1     | 4,6                    | 3,2                         | 1,3            | 45                 |
| 51       | 3           | 18  | 2     | 3     | 2     | 1,3                    | 1,5                         | 2              | 30                 |
| 52       | 4           | 19  | -0,2  | 0     | 4     | 1                      | 3                           | 2,8            | 60                 |
| 53       | 2           | 20  | 1,2   | 0     | 3     | 1,8                    | 2,2                         | 1,5            | 10                 |
| 54       | 1           | 40  | -2,4  | 4     | 0     | 4                      | 0                           | 1,6            | 15                 |
| 55       | 2           | 25  | 0,6   | 2     | 1     | 2,5                    | 1,9                         | 3              | 50                 |
| 56       | 1           | 32  | 1,6   | 0     | 3     | 2                      | 2,7                         | 2,5            | 20                 |
| 57       | 3           | 20  | 2,2   | 1     | 0     | 3,5                    | 1                           | 3,2            | 25                 |
| 58       | 5           | 30  | 2     | 0     | 4     | 3,5                    | 3                           | 1,7            | 40                 |
| 59       | 2           | 10  | -0,4  | 2     | 0     | 2                      | 2,5                         | 2,2            | 30                 |
| 60       | 1           | 12  | 0,5   | 3     | 1     | 4,3                    | 2                           | 0,5            | 45                 |

**Задание 7**

Материальная точка  $M$  массы  $m$  совершает движение на двух участках. Участок  $AB$  (рис. 9): наклонная шероховатая плоскость, расположенная вертикально под углом  $\gamma$  к горизонту. При  $t = 0$  ее начальная скорость известна:  $\vec{\vartheta}_0 = \vec{\vartheta}_A$ . Точка движется под действием силы  $\vec{F}_{AB} \equiv \text{const}$ , параллельной  $AB$ . Длина участка  $AB = l$  известна. На финише участка  $AB$  точка  $M$  покидает наклонную плоскость и движется в вертикальной плоскости на участке  $BC$ .

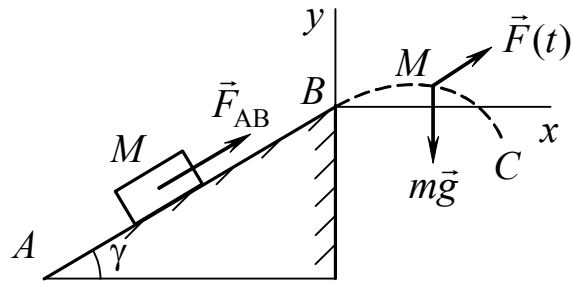


Рис. 9

Участок  $BC$ : на точку  $M$ , кроме силы тяжести, действует сила  $\vec{F}(F_x, F_y)$ , являющаяся результирующей двух сил – движущей силы и силы сопротивления. Функции  $F_x(t)$ ,  $F_y(t)$  заданы. Нужно изучить движение точки на каждом участке. На участке  $BC$  определить:

- 1) закон движения точки  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $t \geq 0$ ;
- 2) кинетическую энергию точки  $T(t)$ ; построить графики функций  $y = y(x)$ ,  $T = T(t)$ ;

3) выбрать самостоятельно момент  $t = t_*$ , когда изучаемая точка находится справа от точки  $B$ , на участке  $BC$ . Для этого мгновения построить на схеме векторы скорости, ускорения, силы  $\vec{F}$  и силы инерции точки.

Исходные данные приведены в табл. 7.

Таблица 7

| № п/п | $m$ , кг | $\vartheta_0$ , м/с | $f$  | $\gamma$ , град | $F_{AB}$ , Н | $l$ , м | $F_x(t) = B + \frac{D}{t^n + 1}$ , Н |     |     | $F_y(t) = Ae^{-kt}$ , Н |     |
|-------|----------|---------------------|------|-----------------|--------------|---------|--------------------------------------|-----|-----|-------------------------|-----|
|       |          |                     |      |                 |              |         | $B$                                  | $D$ | $n$ | $A$                     | $k$ |
| 1     | 1        | 3                   | 0,1  | 40              | 14           | 5,5     | 10                                   | 5   | 1,5 | -4                      | 0,5 |
| 2     | 3        | 3,7                 | 0,25 | 60              | 35           | 4       | 15                                   | 3,9 | 2,5 | 20                      | 0,3 |
| 3     | 2        | 2,5                 | 0,3  | 45              | 20           | 3,8     | 20                                   | 2,4 | 2   | 15                      | 0,2 |
| 4     | 2        | 5                   | 0,1  | 50              | 30           | 4,6     | 10                                   | 4,8 | 3   | -10                     | 0,4 |
| 5     | 1        | 4,9                 | 0,2  | 35              | 10           | 3,2     | 8                                    | 2,5 | 3,5 | 12                      | 0,6 |
| 6     | 2        | 5,5                 | 0,15 | 30              | 24           | 5,1     | 14                                   | 3,2 | 2   | -14                     | 0,8 |
| 7     | 1        | 4,1                 | 0,2  | 10              | 7            | 6       | 15                                   | 5,2 | 3   | 8                       | 0,4 |
| 8     | 3        | 2,2                 | 0,25 | 45              | 25           | 4,3     | 16                                   | 6,5 | 2,5 | 15                      | 0,2 |
| 9     | 4        | 3                   | 0,3  | 20              | 32           | 2,6     | 10                                   | 4,6 | 1,5 | -12                     | 0,5 |
| 10    | 5        | 4,6                 | 0,15 | 50              | 45           | 6,2     | 25                                   | 3,1 | 2   | 25                      | 0,9 |
| 11    | 1        | 2,3                 | 0,2  | 45              | 11           | 5,8     | 9                                    | 5,4 | 1,5 | 11                      | 0,4 |

| №<br>п/п | m,<br>кг | g <sub>0</sub> ,<br>м/с | f    | γ,<br>град | F <sub>AB</sub> ,<br>Н | l, м | F <sub>x</sub> (t) = B + $\frac{D}{t^n + 1}$ , Н |     |     | F <sub>y</sub> (t) = Ae <sup>-kt</sup> ,<br>Н |     |
|----------|----------|-------------------------|------|------------|------------------------|------|--|-----|-----|---|-----|
|          |          |                         |      |            |                        |      | B  | D   | n   | A   | k   |
| 12       | 2        | 5,3                     | 0,1  | 30         | 19                     | 3,3  | 19   | 6   | 2,5 | -9  | 0,3 |
| 13       | 3        | 2,8                     | 0,05 | 60         | 36                     | 4,4  | 36   | 4   | 3   | -16   | 0,7 |
| 14       | 2        | 4                       | 0,25 | 10         | 8                      | 2,7  | 8  | 3,7 | 2   | 8   | 0,5 |
| 15       | 4        | 2,5                     | 0,3  | 15         | 36                     | 5    | 30   | 2,5 | 1,5 | 16  | 0,6 |
| 16       | 2        | 2                       | 0,4  | 50         | 30                     | 3,9  | 20   | 5   | 2   | -10   | 0,2 |
| 17       | 2        | 3,5                     | 0,35 | 20         | 18                     | 2,4  | 15   | 4,9 | 2,5 | 18  | 0,7 |
| 18       | 3        | 4,5                     | 0,1  | 25         | 33                     | 4,8  | 13   | 5,5 | 3   | -13   | 0,3 |
| 19       | 1        | 5                       | 0,3  | 40         | 14                     | 2,5  | 7  | 4,1 | 2   | -4  | 0,9 |
| 20       | 2        | 2,4                     | 0,15 | 30         | 22                     | 3,2  | 22   | 3,2 | 1,5 | 22  | 0,8 |
| 21       | 3        | 3                       | 0,2  | 45         | 27                     | 5,2  | 17   | 3   | 3   | -7  | 0,4 |
| 22       | 4        | 2,2                     | 0,1  | 20         | 50                     | 6,5  | 30   | 4,3 | 2,5 | 20  | 0,6 |
| 23       | 2        | 5,6                     | 0,15 | 35         | 16                     | 4,6  | 26   | 2,6 | 2   | 16  | 0,2 |
| 24       | 1        | 6                       | 0,25 | 10         | 13                     | 3,1  | 10   | 2,2 | 2,5 | -6  | 0,7 |
| 25       | 2        | 2,5                     | 0,2  | 60         | 24                     | 5,4  | 14   | 5,8 | 3   | 24  | 0,3 |
| 26       | 1        | 4,5                     | 0,1  | 15         | 8                      | 4    | 6  | 3,3 | 1,5 | -4  | 0,6 |
| 27       | 3        | 3                       | 0,2  | 20         | 20                     | 6    | 15   | 4,4 | 2   | -10   | 0,5 |
| 28       | 5        | 2,8                     | 0,15 | 30         | 44                     | 3,7  | 24   | 2,7 | 2,5 | 18  | 0,9 |
| 29       | 2        | 3,5                     | 0,1  | 40         | 25                     | 2,5  | 20   | 6   | 3   | -5  | 0,4 |
| 30       | 1        | 2,3                     | 0,25 | 50         | 15                     | 5    | 16   | 3,9 | 1,5 | 10  | 0,8 |
| 31       | 2        | 5,6                     | 0,2  | 10         | 17                     | 4,9  | 17   | 2,4 | 2   | 25  | 0,2 |
| 32       | 1        | 5                       | 0,1  | 25         | 9                      | 5,5  | 11   | 4,8 | 2,5 | -6  | 0,5 |
| 33       | 3        | 4,7                     | 0,15 | 20         | 25                     | 4,1  | 27   | 2,5 | 3   | 17  | 0,6 |
| 34       | 4        | 3,2                     | 0,25 | 15         | 33                     | 3,2  | 13   | 3,2 | 2   | -12   | 0,3 |
| 35       | 5        | 5,5                     | 0,2  | 60         | 48                     | 3    | 28   | 5,2 | 1,5 | -18   | 0,8 |
| 36       | 1        | 5                       | 0,1  | 30         | 12                     | 4,6  | 8  | 2,5 | 2,5 | 10  | 0,4 |
| 37       | 2        | 3,8                     | 0,15 | 35         | 17                     | 3,3  | 15   | 4,6 | 2   | 18  | 0,6 |
| 38       | 3        | 2,6                     | 0,2  | 40         | 40                     | 5,3  | 30   | 3,1 | 3   | -14   | 0,7 |
| 39       | 2        | 3,2                     | 0,3  | 50         | 30                     | 2,8  | 20   | 5,4 | 1,5 | -9  | 0,3 |
| 40       | 4        | 5,1                     | 0,25 | 45         | 50                     | 4    | 25   | 4   | 2   | 20  | 0,5 |
| 41       | 3        | 3                       | 0,1  | 10         | 26                     | 2,5  | 18   | 3   | 1,5 | 32  | 0,2 |
| 42       | 3        | 4,3                     | 0,15 | 60         | 35                     | 6    | 15   | 4,3 | 2,5 | -15   | 0,6 |
| 43       | 2        | 2,6                     | 0,3  | 25         | 24                     | 3,5  | 14   | 2,6 | 3   | -4  | 0,8 |
| 44       | 2        | 2,2                     | 0,2  | 30         | 15                     | 4,5  | 12   | 2,2 | 2   | 25  | 0,4 |
| 45       | 5        | 5,8                     | 0,25 | 60         | 45                     | 5    | 35   | 5,8 | 1,5 | -11   | 0,3 |
| 46       | 4        | 3,3                     | 0,1  | 20         | 38                     | 2,4  | 30   | 3,3 | 2   | 18  | 0,5 |
| 47       | 2        | 4,4                     | 0,2  | 45         | 22                     | 3    | 12   | 4,4 | 2,5 | 20  | 0,9 |

Окончание табл. 7

| №<br>п/п | m,<br>кг | g <sub>0</sub> ,<br>м/с | f    | γ,<br>град | F <sub>AB</sub> ,<br>Н | l, м | F <sub>x</sub> (t) = B + $\frac{D}{t^n + 1}$ , Н |     |     | F <sub>y</sub> (t) = Ae <sup>-kt</sup> ,<br>Н |     |
|----------|----------|-------------------------|------|------------|------------------------|------|--|-----|-----|---|-----|
|          |          |                         |      |            |                        |      | B  | D   | n   | A   | k   |
| 48       | 1        | 2,7                     | 0,3  | 50         | 14                     | 5,2  | 10   | 2,7 | 3   | -7  | 0,7 |
| 49       | 2        | 6                       | 0,25 | 30         | 16                     | 5,6  | 12   | 6   | 2   | 14  | 0,6 |
| 50       | 3        | 3,9                     | 0,1  | 60         | 27                     | 6    | 20   | 3,9 | 1,5 | -6  | 0,3 |
| 51       | 5        | 2,4                     | 0,15 | 35         | 40                     | 6,1  | 25   | 2,4 | 3   | -10   | 0,5 |
| 52       | 2        | 4,8                     | 0,2  | 25         | 15                     | 4,3  | 15   | 4,8 | 2,5 | 9   | 0,9 |
| 53       | 3        | 2,5                     | 0,35 | 30         | 30                     | 3    | 20   | 2,5 | 2   | -8  | 0,4 |
| 54       | 1        | 3,2                     | 0,15 | 10         | 7                      | 4,8  | 10   | 3,2 | 2,5 | 17  | 0,6 |
| 55       | 2        | 5,2                     | 0,2  | 45         | 20                     | 3,5  | 15   | 5   | 3   | -4  | 0,8 |
| 56       | 3        | 2,5                     | 0,1  | 30         | 25                     | 6,3  | 17   | 4,5 | 1,5 | -8  | 0,2 |
| 57       | 4        | 4,6                     | 0,25 | 40         | 35                     | 5,6  | 20   | 4   | 2   | 3   | 0,3 |
| 58       | 2        | 3,1                     | 0,1  | 15         | 13                     | 5    | 15   | 3,1 | 2,5 | 25  | 0,7 |
| 59       | 1        | 5,4                     | 0,2  | 30         | 12                     | 4,7  | 8  | 2,4 | 3   | -5  | 0,9 |
| 60       | 2        | 4                       | 0,1  | 20         | 20                     | 3,2  | 10   | 5,4 | 1,5 | 15  | 0,4 |



## Литература

1. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – Москва : Наука, 1983. – 320 с.
2. Суслов, Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов. – Москва–Ленинград : ГИТТЛ, 1946. – 655 с.
3. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К. С. Колесникова. – Москва : Наука, 1983. – 320 с.
4. Томилов, Е. Д. Теоретическая механика : в 2 т. / Е. Д. Томилов. – Томск : изд-во Томск. ун-та, 1966. – Т. 2. – 304 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : в 2 т. / А. А. Яблонский. – Москва : Высш. шк., 1977. – Т. 2. – 430 с.
6. Добронравов, Б. В. Курс теоретической механики / Б. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – Москва : Высш. шк., 1983. – 575 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А. А. Яблонский [и др.]. – Москва : Высш. шк., 2004. – 382 с.

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| Предисловие.....   | 3  |
| 1. Основные понятия и определения .....  | 3  |
| 2. Указания к решению задач о движении точки<br>по неподвижной поверхности .....   | 5  |
| 3. Указания к решению задач о движении точки<br>по неподвижной плоской линии ..... | 15 |
| 4. Задания для расчетно-графических работ.....                                     | 24 |
| Литература .....   | 41 |

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Шабловский Олег Никифорович**  
**Концевой Иван Александрович**

## **ДИНАМИКА**

### **Практикум**

**по курсу «Теоретическая механика» для студентов  
инженерно-технических специальностей  
дневной и заочной форм обучения**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор

*С. Н. Санько*

Компьютерная верстка

*Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 26.06.08.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,54.

Изд. № 175.

E-mail: [ic@gstu.gomel.by](mailto:ic@gstu.gomel.by)

<http://www.gstu.gomel.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:

Издательский центр учреждения образования

«Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.