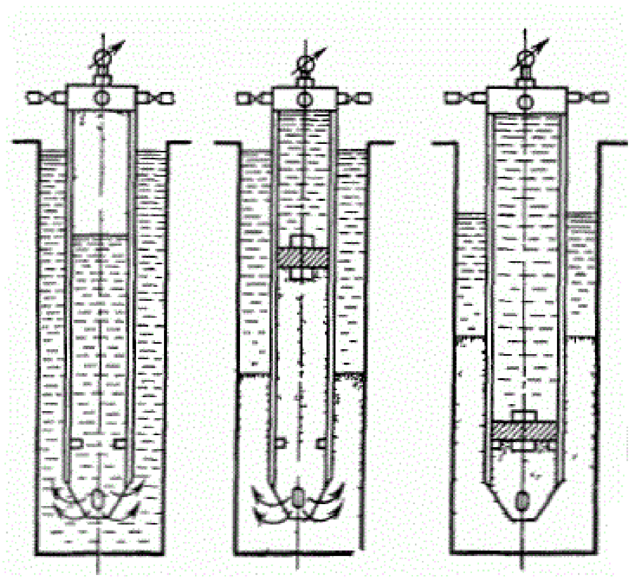
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕМЕНТИРОВАНИЯ СКВАЖИН

П. П. Аниховский

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Беларусь

Научный руководитель К. С. Курочка

Сооружение нефтяной и газовой скважин предстает собой два последовательных процесса: бурение скважины и ее крепление. Для предохранения стенок скважины от обвалов, газо- и водопроявлений, а также изолирования продуктивных пластов стенки скважины укрепляют обсадными трубами. Обсадные трубы крепятся в скважине цементным раствором [1]. Процесс вытеснения из скважины бурового раствора и закачки в пространство между стенками скважины и обсадными трубами цементного (тампонажного) раствора называется цементированием или креплением скважины. Простейшая схема цементирования приведена на рис. 1.



а) *б*) *в*)

Рис. 1. Простейшая схема цементирования скважины:
а – закачка цементного раствора; *б* – продавливание цементного раствора;
в – посадка цементировочной пробки на стоп-кольцо

Рассмотрим цементный раствор как вязкую несжимаемую жидкость. Ее течение по внутреннему каналу обсадной трубы подчиняется уравнениям Навье-Стокса, которые для двумерного случая без учета конвективных членов имеют вид [2] (первых два уравнения представляют собой уравнения движения, третье – уравнение неразрывности):

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}+X=0;$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+Y=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

где μ – динамическая вязкость цементного раствора, м^2/с; p – давление, возникающее при движении цементного раствора, Па; X и Y – силы, действующие на единицу объема раствора в направлениях x и y, Н/м^3; u и v – компоненты скорости движения раствора в направлениях x и y, м/с.

Представим неизвестные величины давления p и компонент скоростей u и v в виде [3]:

$$p=[N]\{p\},\ u=[N]\{u\},\ v=[N]\{v\}, \tag{2}$$

где $[N]$ – функции формы, обеспечивающие неразрывность переменных.

Используя метод Галеркина [3], [4], составим для произвольной точки i систему трех уравнений, первое из которых имеет вид:

$$\int_V N_i[X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})]dV=0. \tag{3}$$

Интегрируя это выражения по частям и выполняя соответствующие преобразования, получаем:

$$\int_V[N_i(X-\frac{\partial p}{\partial x})-\mu\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\mu\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}]dV+\int_S\mu N_i\frac{\partial u}{\partial n}dS=0. \tag{4}$$

После подстановки (2) в первое слагаемое получаем:

$$\int_V[N_iX-N_i\frac{\partial[N]}{\partial x}\{p\}-(\mu\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x}+\mu\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y})\{u\}]dV. \tag{5}$$

Выражение для скорости в направлении y имеет аналогичный вид. Последнее уравнение, получающееся из уравнения неразрывности в (1), имеет вид:

$$\int_V N_i(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})dV=\int_V N_i(\frac{\partial[N]}{\partial x}\{u\}+\frac{\partial[N]}{\partial y}\{v\})dV=0. \tag{6}$$

Сгруппировав все неизвестные, относящиеся к данной точке, в виде:

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_i \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

получаем уравнение глобальной конечноэлементной системы в стандартном виде:

$$[K]\{\Phi\} + \{F\} = 0. \tag{8}$$

Вклад каждого конечного элемента в общую систему определяется матрицей жесткости следующего вида:

$$[k_{ij}]^e = -\int\limits_{V^e} \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} dV. \tag{9}$$

Поверхностный интеграл в (4) исчезает в той части границы, где задано u. Если на части границы задано $\frac{\partial u}{\partial n}$, то в векторе $\{F\}$ в уравнении (8) появляется дополнительный член. Таким образом, вектор $\{F\}$ для рассматриваемой точки имеет вид [3]:

$$\{F_i\}^e = \int\limits_{V^e} N_i \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} dV + \int\limits_{S^e} N_i u \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial v}{\partial n} \\ 0 \end{Bmatrix} dS. \tag{10}$$

В указанных уравнениях поверхностный интеграл берется только по внешним границам, для которых заданы $\frac{\partial u}{\partial n}$ или $\frac{\partial v}{\partial n}$. Если на границе заданы величины скоростей u и v, то в граничных точках уравнения не составляются.

Описанная выше методика применима для случаев, когда рассматривается ламинарное течение цементного раствора. При рассмотрении турбулентного течения необходимо дополнительно вводить понятие турбулентной вязкости и учесть ее в результирующих выражениях. Для вычисления турбулентной вязкости существует несколько моделей, основные из которых приведены, например, в [5].

Литература

1. Логвиенко, С. В. Цементирование нефтяных и газовых скважин / С. В. Логвиенко. – М. : Недра, 1986. – 280 с.
2. Басниев, К. С. Нефтегазововая гидромеханика : учеб. пособие для вузов / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2005. – 544 с.
3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

4. Пейре, Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. – Л. : Гидрометеоиздат, 1986. – 352 с.
5. Филатов, Е. Ю. Математическое моделирование течений жидкостей и газов : учеб. пособие / Е. Ю. Филатов, Ф. Н. Ясинский. – Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования «Ивановск. гос. энергет. ун-т им. В. И. Ленина». – Иваново, 2007. – 84 с.