УДК 536.2.01

К ВОПРОСУ О ГЕНЕРАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ОБЪЕМНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Принцип действия разнообразных физико-энергетических устройств основан на выделении тепла и последующем теплосъеме. Теплофизической моделью таких процессов служит объемный источник энергии $q_\upsilon(T)$, зависящий от температуры. Наибольший интерес представляют случаи немонотонной и (или) знакопеременной зависимости $q_\upsilon(T)$. Ясно, что воздействие источника (стока) энергии на среду существенным образом зависит от свойств самой среды. Здесь мы рассматриваем три основных варианта:

– нелинейная среда с нулевым временем релаксации теплового потока; в этом случае справедлив классический закон теплопереноса Фурье; процесс описывается обычным нелинейным уравнением теплопроводности параболического типа;
– линейная локально-неравновесная среда с одним временем релаксации;
– линейная локально-неравновесная среда с двумя временами релаксации.

Цель работы: определить типичные для каждой среды зависимости $q_\upsilon(T)$, при которых в системе «среда – источник энергии» происходит генерация периодических температурных полей.

Основные уравнения и постановка задачи

Релаксационная модель переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии:

$$q+\gamma_1\frac{\partial q}{\partial t}=-\lambda\left[\frac{\partial T}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]; \tag{1}$$

$$c\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=q_\upsilon, \tag{2}$$

где x – декартова координата; t – время; T – температура; q – удельный тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; c – объемная теплоемкость; γ_1 – время релаксации теплового потока; γ_2 – время релаксации градиента температуры (время ретардации); q_υ – мощность внутренних источников тепла. При $\gamma_1\equiv 0$, $\gamma_2\equiv 0$ приходим к модели теплопроводности Фурье:

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_{\upsilon}.$$

При $\gamma_1=\gamma>0$, $\gamma_2\equiv 0$ формула (1) представляет релаксационную модель Максвелла. Модель (1) с двумя временами релаксации $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$ относится к высокоинтенсивным локально-неравновесным тепловым процессам. Современное состояние теории локально-неравновесного теплопереноса в нелинейных средах изложено в [1].

Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи:

$$\lambda\to\widetilde{\lambda}\lambda';\ c\to\widetilde{c}c';\ q_{\upsilon}\to\widetilde{q}_{\upsilon}q'_{\upsilon};$$

$$T\to T';\ q\to q';\ x\to x';\ t\to t',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы

$$\widetilde{\lambda}=\frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b};\ \widetilde{c}=\frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b};\ \widetilde{q}_{\upsilon}=\frac{(q_{\upsilon})_b x_b}{q_b}$$

составлены из масштабов величин (они отмечены нижним индексом b), применяемых для обезразмеривания: $T=T'T_b$, $\gamma=\gamma' t_b$ и т. д. В последующих расчетах приняли $\widetilde{\lambda}=1$, $\widetilde{c}=1$, $\widetilde{q}_{\upsilon}=1$.

Для всех трех типов сред рассматриваем эволюционные процессы в классе решений «бегущая волна», когда

$$T=T(z),\ q=q(z),\ z=x+bt,\ b\equiv\text{const};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{d}{dz};\ \frac{\partial}{\partial t}=b\frac{d}{dz}.$$

На основе систем уравнений (1), (2) решаем обратную задачу, а именно: постулируем физически содержательную зависимость $T(z)$ либо $q(z)$ и вычисляем $q_{\upsilon}(z)$. Это дает возможность определить температурную зависимость источника энергии $q_{\upsilon}(T)$ и замкнуть задачу.

Параболический процесс

Параметры среды: $\lambda=\lambda_0+\lambda_1 T$; $c\equiv\text{const}$; $\gamma_1\equiv 0$; $\gamma_2\equiv 0$.

Источник энергии подсчитывается по формуле:

$$q_{\upsilon}=bc\frac{dT}{dz}-\frac{d}{dz}\left(\lambda\frac{dT}{dz}\right).$$

Количественные свойства процесса в значительной степени зависят от безразмерной скорости волны

$$l=\frac{(\lambda/c)_{T=T_0}}{|b|x_b}.$$

Два основных варианта: 1) $l<1$, т. е. $|b|>1$; 2) $l>1$, т. е. $|b|<1$.

Типичные результаты расчетов показаны на рис. 1. Все графики получены при $\lambda_0 = 0{,}85$, $\lambda_1 = 0{,}15$. Отметим здесь гистерезисный характер зависимостей $q_\upsilon(T)$. Для дальнейшего важно, что в периодическом параболическом процессе не обнаружены ситуации, при которых петли гистерезиса на плоскости (T, q_υ) вырождались бы в однозначные линии $q_\upsilon(T)$.

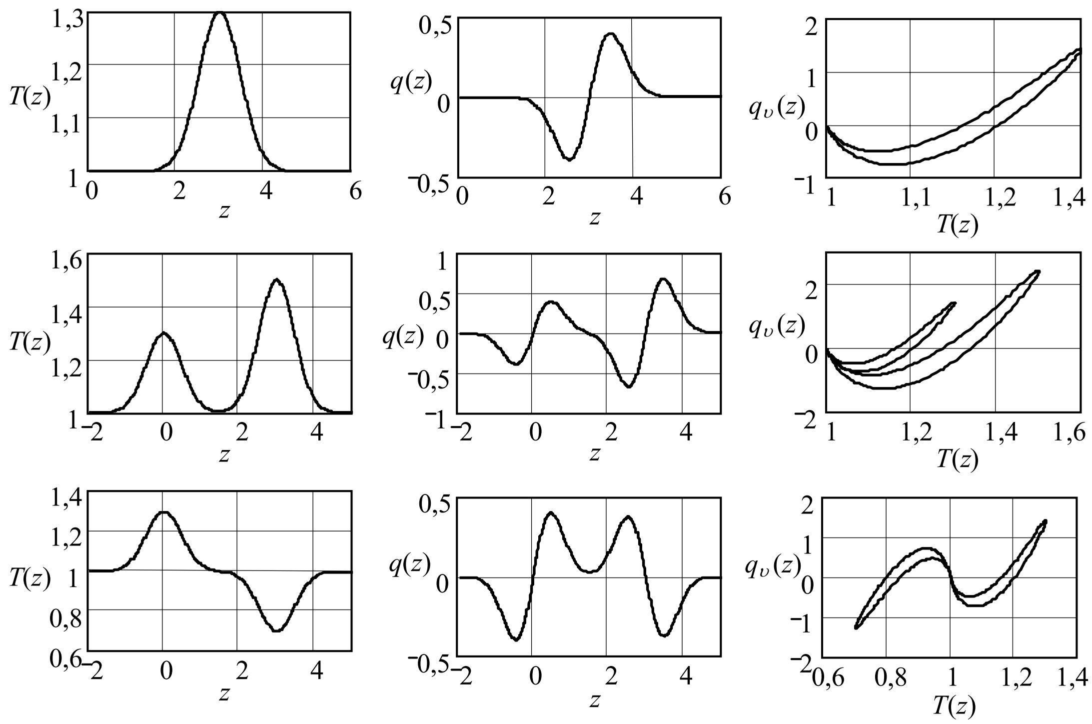

Рис. 1

Источник энергии в среде с одним временем релаксации

Параметры среды: $\lambda, c, \gamma_1 = \gamma - \text{const}$; $\gamma_2 \equiv 0$.

Процесс определяется следующими формулами:

$$q + \gamma b \frac{dq}{dz} = -\lambda \frac{dT}{dz}, \quad q_\upsilon = cb \frac{dT}{dz} + \frac{dq}{dz}.$$

Если $T = T(z)$ – известная функция, то

$$q(z) = q_0 E^{-1} - E^{-1} \int_0^z \frac{\lambda E}{\gamma b} \left(\frac{dT}{dz} \right) dz, \quad E = \exp(z/\gamma b).$$

Если $q = q(z)$ – известная функция, то

$$T(z) - T(z_0) = \frac{-1}{\lambda} \int_0^z q(z) dz - \frac{\gamma b}{\lambda} \left[q(z) - q(z_0) \right] \geq 0.$$

Все расчеты выполнены в безразмерных переменных; характерные масштабы теплофизических параметров взяты такими, что в безразмерных переменных имеем $\lambda = 1$, $c = 1$, $\gamma = 1$. Тогда $w^2 = \lambda / (c\gamma) = 1$. Параметр b представляет скорость бегущей волны, распространяющейся влево $(b > 0)$ либо вправо $(b < 0)$. Таким образом, имеем «дозвуковой» процесс, если $|b| < 1$; процесс «сверхзвуковой», если $|b| > 1$.

Пример 1

$$T = T_0 + A_1 \sin(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin(\alpha_2 z + \beta_2), \tag{3}$$

$$A_1,\, A_2,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \beta_1,\, \beta_2 - \text{const.}$$

Три дозвуковых варианта даны на рис. 2; три сверхзвуковых варианта – на рис. 3. На плоскости (T, q_υ) наблюдаем гистерезисные кривые, причем имеются случаи самопересечения гистерезисной кривой. Отметим существование температурных интервалов, где гистерезис выражен очень слабо и зависимость $q_\upsilon(T)$ можно считать однозначной.

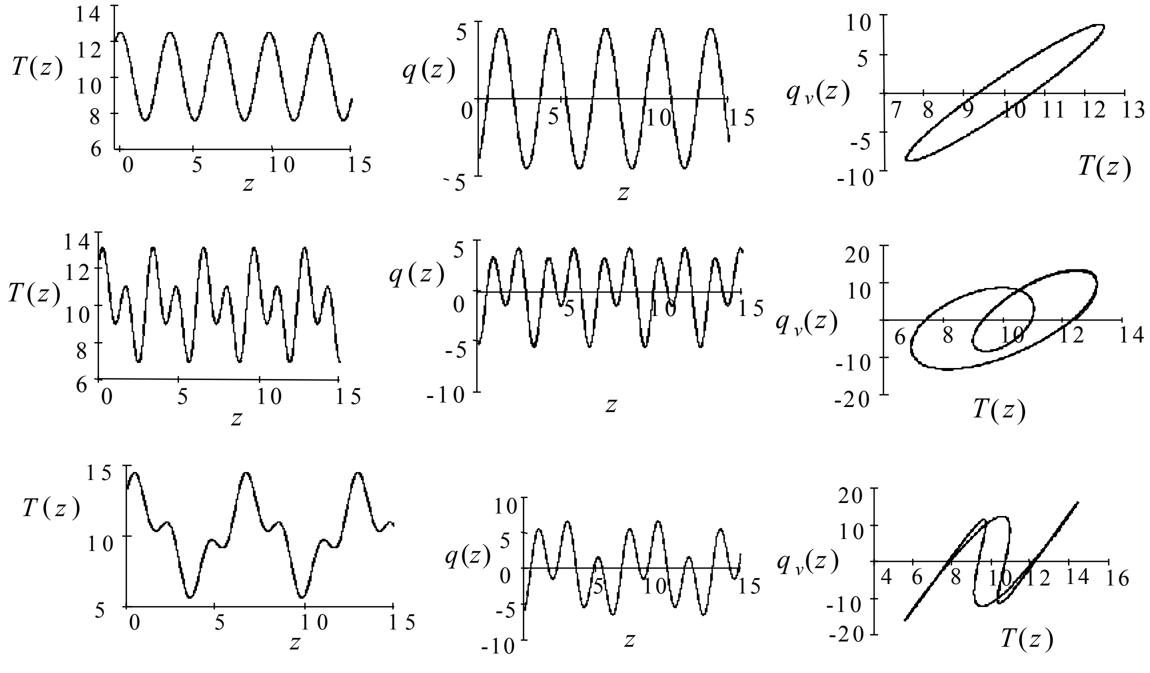

Рис. 2

Пример 2

$$T = T_0 + A_1 \sin^3(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin^3(\alpha_2 z + \beta_2), \tag{4}$$

$$A_1,\, A_2,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \beta_1,\, \beta_2 - \text{const.}$$

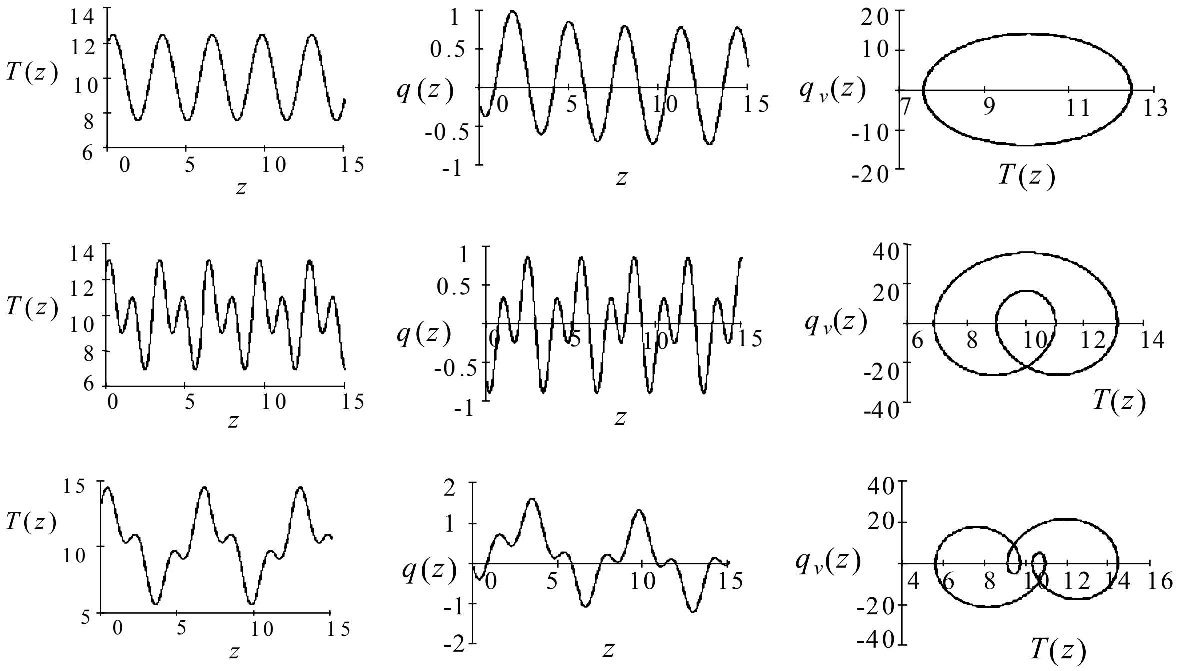

Рис. 3

Дозвуковые варианты показаны на рис. 4. Сравнение с примером 1 говорит о значительном влиянии характера аналитической зависимости $T(z)$ на конфигурацию петель гистерезиса на плоскости (T, q_υ). Обращает на себя внимание третья строка рис. 4, где гистерезис практически отсутствует и функция источника $q_\upsilon(T)$ – монотонная и знакопеременная. В сверхзвуковых вариантах форма петель слабо реагирует на изменение поведения зависимостей $T(z)$ и $q(z)$.

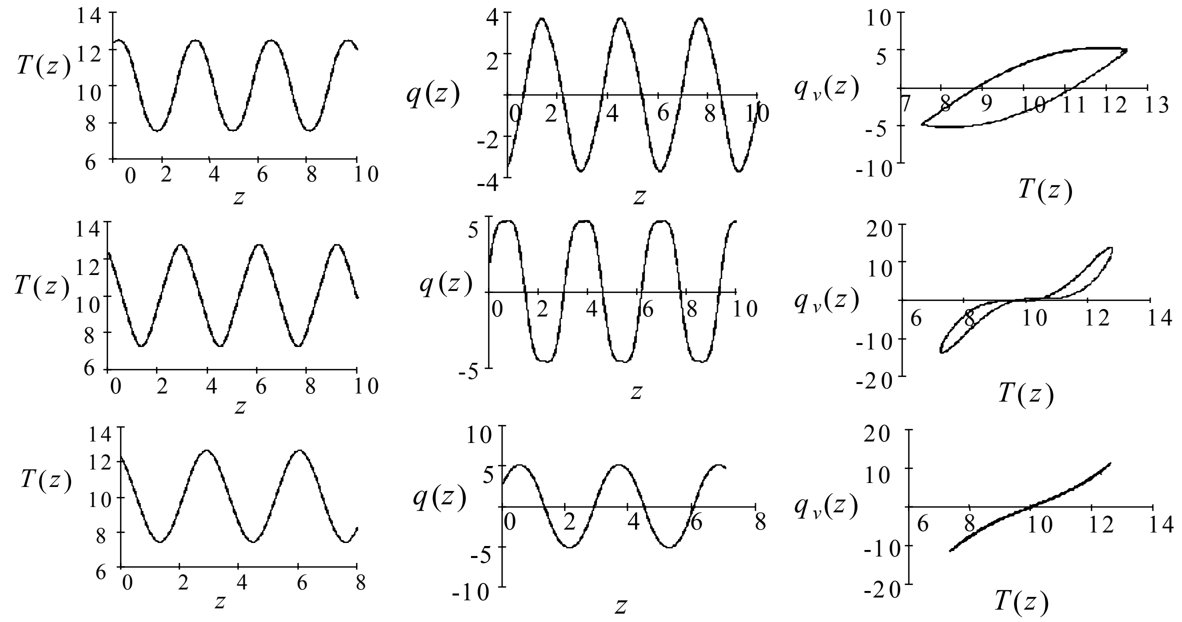

Рис. 4

Пример 3

$$q = \frac{A_1}{\alpha_1 + \beta_1 (z - z_1)^2} + \frac{A_2}{\alpha_2 + \beta_2 (z - z_2)^2} + \frac{A_3}{\alpha_3 + \beta_3 (z - z_3)^2},$$

$$A_1, A_2, A_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, - \text{const},$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0, \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0.$$

Здесь функция $q(z)$ обладает своеобразными «всплесками» и является либо положительной либо знакопеременной. Связь источника энергии с температурой в дозвуковом (первая строка рис. 5) и сверхзвуковом (вторая и третья строки рис. 5) процессах не всегда имеет гистерезисный тип: она может иметь вид обычной немонотонной функции. Гистерезисные кривые могут иметь самопересечения. Сравнение друг с другом дозвукового и сверхзвукового процессов при $q(z) > 0$ (см. вторую строку рис. 5) говорит о появлении в сверхзвуковом случае знакопеременности источника $q_\upsilon(T)$.

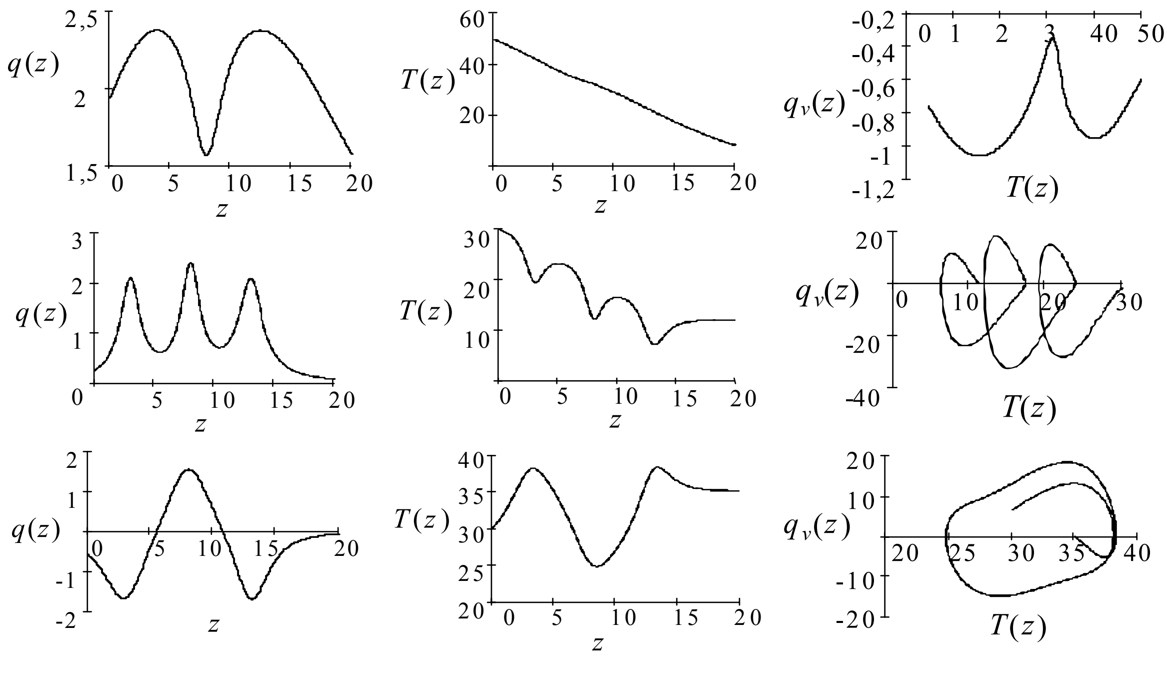

Рис. 5

Источник энергии в среде с двумя временами релаксации

Закон теплопереноса (1) дает в классе решений типа бегущей волны такие зависимости:

$$q + \gamma_1 b \frac{dq}{dz} = -\lambda \frac{dT}{dz} - \lambda \gamma_2 b \frac{d^2 T}{dz^2};$$

$$q_\upsilon = cb \frac{dT}{dz} + \frac{dq}{dz}.$$

Расчет теплового потока выполняем по формуле

$$q = q_0 E^{-1} - \frac{\lambda E^{-1}}{\gamma_1 b}\int\limits_0^z \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_2 b \frac{d^2 T}{dz^2}\right) E dz, \quad E = \exp\left(z/\gamma_1 b\right).$$

Далее берем $0 < \gamma_2 \le \gamma_1$, т. е. $w_1^2 = \lambda/(c\gamma_1) < w_2^2 = \lambda/(c\gamma_2) > 1$.

Пример 4

Температуру $T(z)$ берем в виде (3). Два дозвуковых варианта показаны в первой и второй строках на рисунке 6; весьма выразительным является их сопоставление со сверхзвуковыми процессами (третья и четвертая строки рис. 6). А именно: для первого процесса на рис. 6 гистерезиса нет, но он сразу же возникает, при прочих равных условиях, если $M_1^2 \equiv b^2/w_1^2 > 1$, а также $\gamma_1 >> \gamma_2$. Если же γ_1 и γ_2 различаются не слишком сильно, то в дозвуковом случае (вторая строка рис. 6) может наблюдаться слабо выраженный гистерезис на плоскости (T, q_υ).

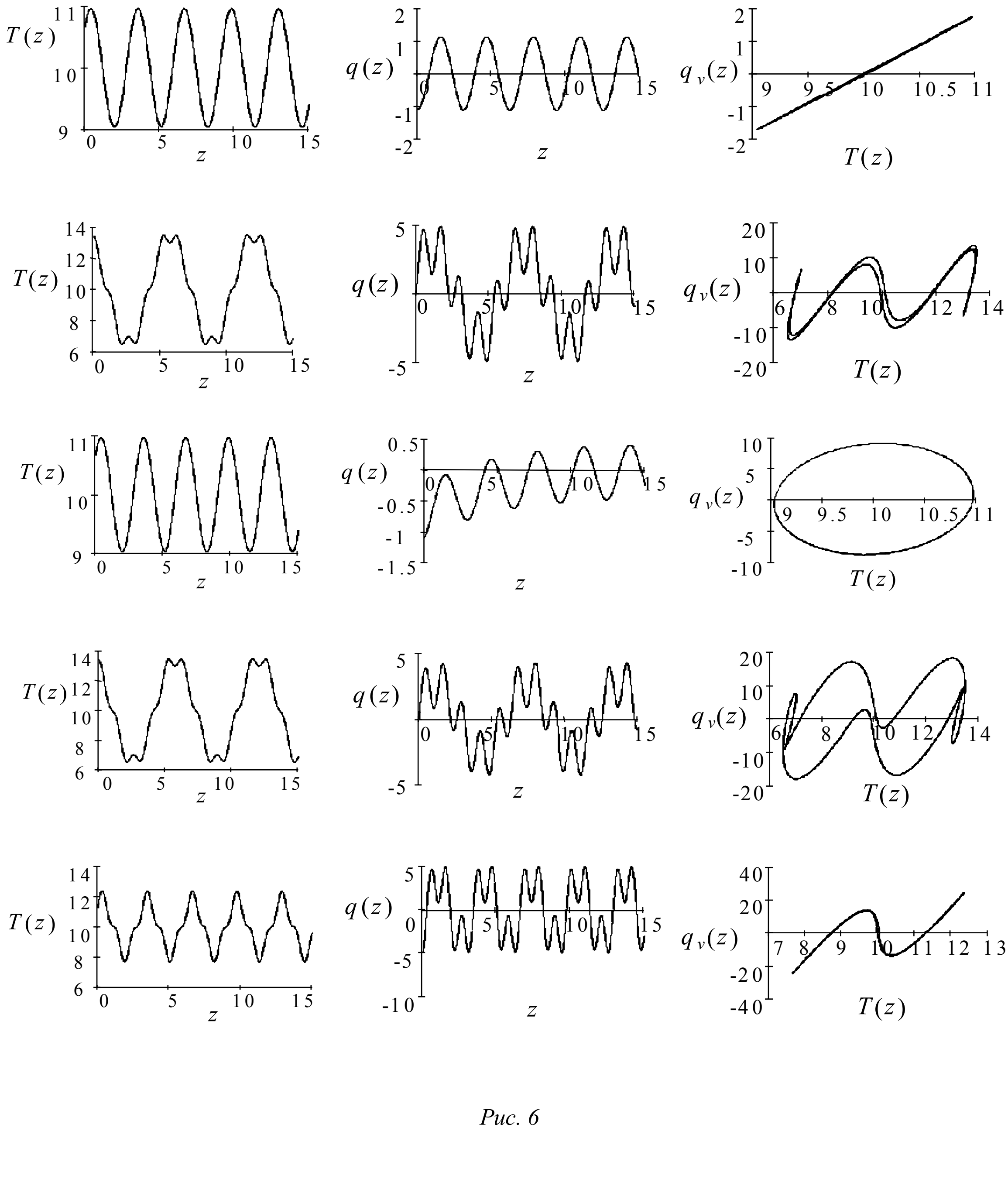

Рис. 6

Пример 5

Температуру $T(z)$ берем в виде (4). В дозвуковом случае (пятая строка рис. 6) гистерезис начинает проявляться сильнее при уменьшении γ_2. В сверхзвуковых процессах такой тенденции нет.

Пример 6

$$q = q_0 + A_1 \sin(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin(\alpha_2 z + \beta_2),$$

$$A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const}.$$

Для дозвуковых (первая строка рис. 7) и сверхзвуковых (вторая строка рис. 7) случаев здесь рассмотрены ситуации, когда тепловой поток знакопеременный, положительный, отрицательный. В двух последних случаях имеем: 1) функция $q_\upsilon(T)$ близка к монотонно убывающей и ее знак противоположен знаку $q = q(z)$; 2) эти закономерности наблюдаются и в дозвуковом, и в сверхзвуковом процессах. Если $q(z)$ – знакопеременная функция, то имеется гистерезис, который в сверхзвуковом случае выражен отчетливее, чем в дозвуковом. Именно наличие второго времени релаксации $\gamma_2 > 0$ приводит к монотонизации функции $q_\upsilon(T)$; при $\gamma_2 = 0$ эта закономерность отсутствует (см. рис. 5).

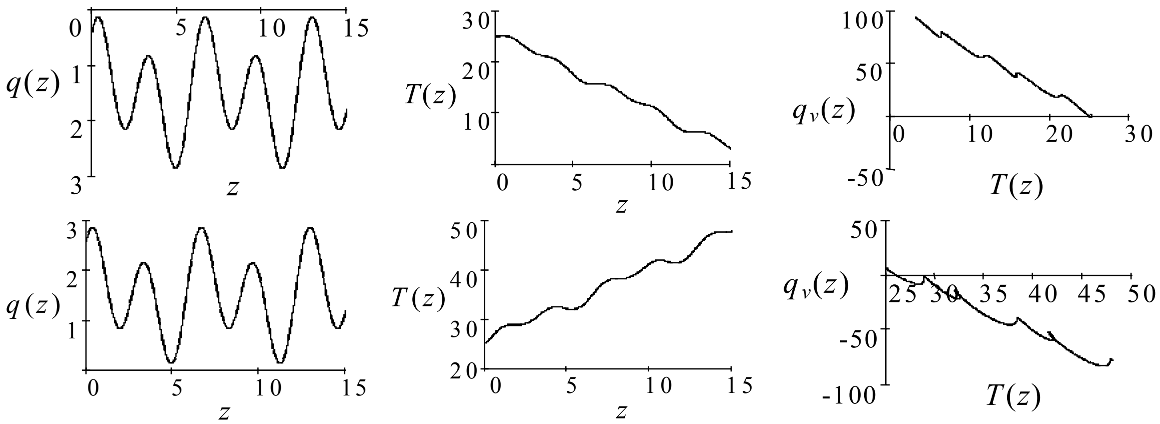

Рис. 7

Представленные примеры демонстрируют существование нетривиальных ситуаций при взаимодействии источника энергии со средой, а именно: монотонный источник (сток) $q_\upsilon(T)$ при определенных обстоятельствах инициирует формирование периодических по $z = x + bt$ тепловых полей. Теоретические аспекты этого явления и их приложения к задачам кристаллизации были обсуждены в работе [2].

Выводы

Нелинейный объемный источник энергии $q_\upsilon = q_\upsilon(T)$, возбуждающий одномерные автомодельные периодические по $z = x + bt$ тепловые поля, обладает следующими свойствами.

В параболическом процессе ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$) зависимость $q_\upsilon(T)$ имеет гистерезисный характер; не обнаружены процессы, в которых петли гистерезиса вырождались бы в однозначные линии.

В локально-неравновесной среде с одним или с двумя временами релаксации наблюдаются существенные различия между дозвуковыми и сверхзвуковыми тепловыми процессами. Возможны ситуации, когда происходит самопересечение гистерезисной кривой.

Основной результат, важный в практическом отношении, состоит в том, что генерация периодических структур может происходить под действием положительного, отрицательного или знакопеременного источника, не обладающего гистерезисной зависимостью $q_\upsilon(T)$: в этом случае на плоскости (T, q_υ) имеем монотонную либо немонотонную однозначную линию.

Литература

1. Шабловский, О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О. Н. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2003. – 382 с.
2. Shablovsky O. N. A Thermal Model of Periodic Crystallization // Crystallography Reports. 2005.Vol.50. Suppl.1., P. S62~S67.

Получено 24.03.2006 г.