СИСТЕМА ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА И УОЛША В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Ю. В. Прядко

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, Беларусь

Научный руководитель А. А. Бабич

Целью работы является рассмотрение функций Уолша, а также преобразования, связанные с этими функциями, основное применение преобразований и техническая реализация выполняющих их устройств.

Функции Уолша и Радемахера, известные с 1922 г., были надолго преданы забвению. Интерес к этим функциям и широкое их распространение связано с развитием вычислительной техники. С созданием новых средств вычислительной техники (от микропроцессоров до высокопроизводительных многопроцессорных ЭВМ, устройств оптической обработки информации) многократно увеличивается возможность эффективного использования в науке и технике математических преобразований (преобразование Уолша и др.). Важнейшей областью применения преобразования Уолша является область управления и связи.

Создание все более совершенных цифровых устройств позволяет коренным образом усовершенствовать управление многими процессами; техника управления вступила сейчас в новую стадию своего развития. Значительное место в цифровых системах нового типа занимают средства связи, а в системы связи все более широко внедряются устройства автоматики. Но с возникновением цифровой техники не исключается необходимость в исследованиях и дальнейшей разработке массово применяемых сейчас простейших непрерывно действующих устройств. Область рационального их использования в связи с общим техническим прогрессом не сокращается, несмотря на частичную замену их цифровыми устройствами. Находят применение и новые специализированные непрерывно работающие устройства, к числу которых относятся, например, сверхбыстродействующие фурье–процессоры на поверхностных акустических волнах.

Широкое использование спектрально-частотного представления процессов при исследовании сигналов и систем (преобразование Фурье) связано с тем, что при гармонических воздействиях колебания сохраняют свою форму при прохождении через линейные цепи (системы) и отличаются от входных только амплитудой и фазой. Это свойство используют ряд методов исследования систем (например, частотные методы).

Но при реализации алгоритмов, использующих преобразование Фурье на ЭВМ, необходимо выполнять большое количество операций умножения (миллионы и миллиарды), что занимает большое количество машинного времени.

В связи с развитием средств вычислительной техники и применения их для обработки сигналов широко используются преобразования, содержащие в качестве ортогонального базиса кусочно-постоянные, знакопеременные функции. Эти функции легко реализуются с помощью средств вычислительной техники (аппаратно или программно), и их использование позволяет свести к минимуму время машинной обработки (за счет исключения операции умножения).

К числу таких преобразований можно отнести преобразования Уолша и Хаара, которые широко используются в области управления и связи. В области компьютерной техники эти преобразования используются при анализе и синтезе устройств логического типа, комбинационных схем, особенно использующих большие и сверхбольшие интегральные схемы (БИС и СБИС), содержащие сотни тысяч элементов, выполняющих различные логические функции. Преобразования Уолша и Хаара используют кусочно-постоянные функции Уолша, Радемахера и другие, принимающие значения ±1, либо Хаара, принимающие значения ±1 и 0 на интервале определения [–0,5, 0,5] либо [0, 1].

Все эти системы взаимосвязаны и каждую из них можно получить как линейную комбинацию из другой (например: система Радемахера – составная часть системы Уолша).

Все эти системы функции представляют собой системы двоично-ортогональных базисных функций.

Функции Радемахера

Функции Радемахера можно определить по формуле

$$-\mathrm{rad}(m, Q) = \left[\sin\left(2^m \pi Q\right)\right], \tag{1}$$

где $0 \le Q < 1$ – интервал определения; m – номер функции; m = 0, 1, 2, ...

Для m = 0 функция Радемахера $\mathrm{rad}(0, Q) = 1$.

Знаковая функция $\mathrm{sign}(x)$ определяется соотношением

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x \ge 0; \\ -1 & \text{при } x \le 0. \end{cases} \tag{2}$$

Функции Радемахера – это периодические функции с периодом 1, т. е.

$$\mathrm{rad}(m, Q) = \mathrm{rad}(m, Q + 1).$$

Первые четыре функции Радемахера показаны на рис. 1.

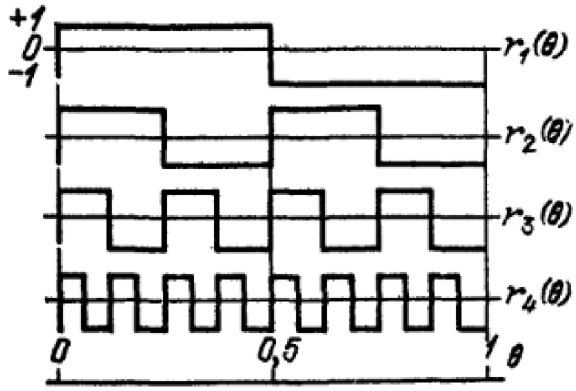

Рис. 1. Функции Радемахера

Функции Радемахера ортогональные, ортонормированные (3), но являются нечетными, а значит, не образуют полную систему функций, так как существуют и другие функции, ортогональные функциям Радемахера (например: $\mathrm{rad}(m, Q) = \mathrm{sign}\left[\cos\left(2^m \pi Q\right)\right]$, поэтому их применение ограничено.

$$\int_0^1 \mathrm{rad}(l, Q)\mathrm{rad}(k, Q)dQ = \begin{cases} 1 & l = k; \\ 0 & l \neq k. \end{cases} \quad (3)$$

Полными двоично-ортогональными системами базисных функций являются системы функций Уолша и Хаара.

Функции Уолша

Функции Уолша представляют собой полную систему ортогональных, ортонормированных функций. Обозначение: $\mathrm{wal}(n, Q)$, где n – номер функции, при этом:

$$n = 0, 1, \ldots N - 1;\ N = 2^i;\ i = 1, 2, \ldots$$

Первые 8 функций Уолша приведены на рис. 2.

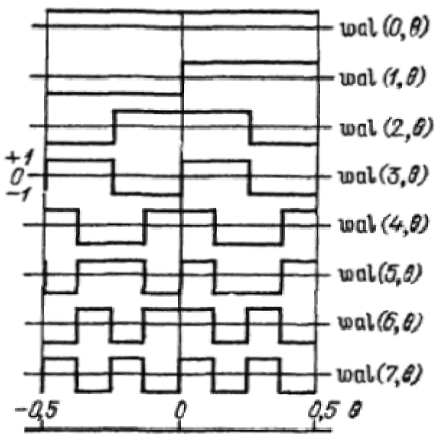

Рис. 2. Функции Уолша

Функции Уолша можно получить как произведение функций Радемахера, номер которых соответствует коду Грея номера функции Уолша. Соответствия для первых 8-ми функций Уолша приведены в таблице.

Номер	**Двоичный код *n***	**Код Грея**	**Соотношения**
0	000	000	$\mathrm{wal}(0, Q) = 1$
1	001	001	$\mathrm{wal}(1, Q) = \mathrm{rad}(1, Q)$
2	010	011	$\mathrm{wal}(2, Q) = \mathrm{rad}(1, Q) \cdot \mathrm{rad}(2, Q)$
3	011	010	$\mathrm{wal}(3, Q) = \mathrm{rad}(2, Q)$
4	100	110	$\mathrm{wal}(4, Q) = \mathrm{rad}(2, Q) \cdot \mathrm{rad}(3, Q)$
5	101	111	$\mathrm{wal}(5, Q) = \mathrm{rad}(1, Q) \cdot \mathrm{rad}(2, Q) \cdot \mathrm{rad}(3, Q)$
6	110	101	$\mathrm{wal}(6, Q) = \mathrm{rad}(1, Q) \cdot \mathrm{rad}(3, Q)$
7	111	100	$\mathrm{wal}(7, Q) = \mathrm{rad}(3, Q)$

Существуют различные способы упорядочения функций Уолша: по Уолшу (естественное), по Пэли, по Адамару. Нумерация функций Уолша при различных способах упорядочения (*n* – по Уолшу; *p* – по Пэли; *h* – по Адамару).

При упорядочении по Пэли номер функции определяется как номер двоичного кода Грея, прочитанный как обычный двоичный код. Такое упорядочение называется диадическим.

При упорядочении по Адамару номер функции определяется как двоичное представление номера функции Уолша системы Пели, прочитанное в обратном порядке, такое упорядочение называется естественным.

Применение преобразований Уолша. Преобразования Уолша находят широкое применение при:

– построении цифровых фильтров;

– исследовании систем автоматического управления (моделировании, оптимизации, идентификации и т. д.);

– формировании сигналов;

– анализе и синтезе логических устройств (в теории цифровых автоматов).