

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА ПЛАСТИН

А. А. Ильющенко, К. А. Кириленко

*Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого, Беларусь*

Научный руководитель С. Ф. Андреев

Создание оптимальных конструкций во многих областях современной техники связано с вопросами использования конструктивных элементов типа тонкостенных оболочек и пластин. Тонкостенные конструкции имеют важное практическое значение в машиностроении, авиастроении, ракетостроении, судостроении и во многих других областях. Повышенные требования к прочности и надежности при уменьшении материалоемкости создают сложные проблемы анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных тел. НДС тонкостенных конструкций сложной формы ступенчато переменной толщины с отверстиями и ребрами, находящихся под воздействием температуры, силовой нагрузки и допускающих большие прогибы, соизмеримые с толщиной, исследовано недостаточно и требует дальнейших исследований. К таким задачам относятся задачи расчета НДС различных конструктивных элементов в виде круговых дисков переменной толщины, которые широко используют в машиностроении: крышки и днища, диски колес, шайбы и т. п. Предполагается, что толщина $h(r, \varphi)$ тонкостенных элементов мала по сравнению с основными размерами исследуемого элемента, т. е. $\frac{\partial h(r, \varphi)}{\partial r} \ll 1$. Здесь r и φ – полярные координаты срединной поверхности диска.

Расчет деформаций и напряжений в тонкостенных дисках основан на технической теории изгиба пластин. Такие задачи приводят, как правило, к необходимости решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными. При этом дифференциальные уравнения могут иметь высокий порядок, переменные коэффициенты, а также содержать малые и большие параметры, что приводит в решении к быстро изменяющимся убывающим и возрастающим функциям. Такие системы уравнений называют жесткими. Традиционные алгоритмы численного интегрирования при этом оказываются малоприменимыми. Поэтому разработка численных методов и алгоритмов решения жестких краевых задач является важной и актуальной задачей.

Для определения прогиба $w = w(r, \varphi)$ срединной поверхности круглого диска переменной толщины воспользуемся дифференциальным уравнением упругого равновесия круглой пластины [2]:

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = q. \quad (1)$$

Здесь: $q = q(r, \varphi)$ – интенсивность распределенной нормальной к срединной поверхности нагрузки; $D = D(r, \varphi)$ – цилиндрическая жесткость. $D = \frac{E[h(r, \varphi)]^3}{12(1-\mu^2)}$, μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

Решение таких краевых задач опирается на методы, приводящие разрешающие уравнения в частных производных к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исследуем НДС круговых дисков под действием осесимметричных нагрузок $q_1(r)$, $q_2(r)$. Толщина дисков (профиль) $h_1(r)$ и $h_2(r)$ изменяется в радиальном направлении по заданному закону (рис. 1).

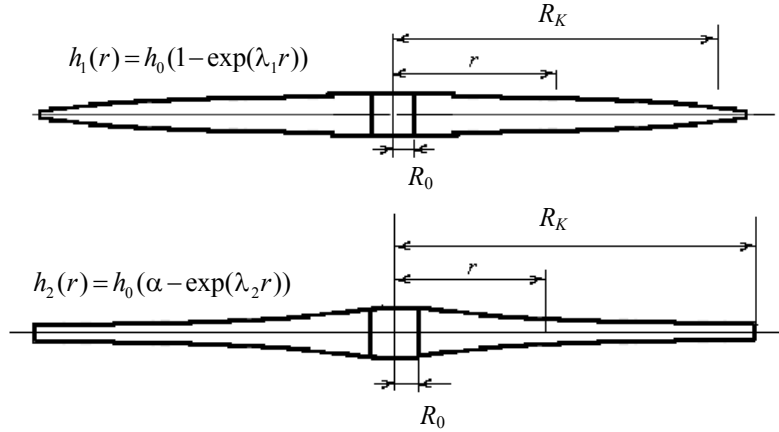


Рис. 1. Варианты переменной толщины пластинки

В этом случае дифференциальное уравнение (1) упрощается в обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}, \quad R_0 \leq r \leq R_K. \quad (2)$$

Уравнение (2) заменяем системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dr} = f(r, y). \quad (3)$$

Здесь

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(w, \frac{dw}{dr}, \frac{d^2 w}{dr^2}, \frac{d^3 w}{dr^3} \right); \quad f(r, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \frac{q(r)}{D(r)} - \frac{2}{r} y_4 + \frac{1}{r^2} y_3 - \frac{1}{r^3} y_1 \end{pmatrix}.$$

Полученная система уравнений приводится к безразмерному виду:

$$\bar{r} = r/R_K, \quad \bar{h} = h/R_K, \quad \bar{E} = (ER_K^2)/Q_0, \quad \bar{q} = (qR_K^2)/Q_0, \quad \text{где } Q_0 = E_0 \cdot H_0.$$

Здесь E_0 и H_0 – постоянные, имеющие порядок соответственно модуля упругости и толщины. При таком выборе постоянных система уравнений относительно безразмерных переменных не содержит очень сильно отличающихся по величине коэффициентов. Все функции определяются на отрезке $[0, 1]$. Безразмерные неизвестные величины, как правило, малы. Чтобы не потерять точность решения, учитывая линейность за-

дачи, все внешние нагрузки перед расчетом увеличиваем на 3–4 порядка. После решения системы уравнений полученные результаты уменьшаем во столько же раз.

Для решения системы уравнений (3) задаем четыре граничных условия:

– прогиб $(y_1)_{R_0} = w_{R_0}$;

– угол поворота нормали $(y_2)_{R_0} = \left(\frac{dw}{dr}\right)_{R_0} = -\vartheta_{R_0}$;

– изгибающий момент

$$(M_r)_{R_K} = -D \left(\left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)_{R_K} + \left(\frac{dw}{dr} \right)_{R_K} \frac{\mu}{R_K} \right) = -D \left((y_3)_{R_K} + (y_2)_{R_K} \frac{\mu}{R_K} \right); \quad (4)$$

– поперечную силу

$$(Q_r)_{R_K} = -D \left(\left(\frac{d^3 w}{dr^3} \right)_{R_K} + \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)_{R_K} \frac{1}{R_K} - \frac{1}{(R_K)^2} \left(\frac{dw}{dr} \right)_{R_K} \right) = -D \left((y_4)_{R_K} + (y_3)_{R_K} \frac{1}{R_K} - \frac{1}{(R_K)^2} (y_2)_{R_K} \right). \quad (5)$$

Положим в расчетах:

$(y_1)_{R_0} = 0$ и $(y_2)_{R_0} = 0$ – для случая жесткой заделки внутреннего контура;

$(Q_r)_{R_K} = 0$ и $(M_r)_{R_K} = 0$ – для случая свободного внешнего контура.

Краевая задача сводится к вспомогательной задаче, для которой должны быть определены четыре начальных условия на контуре R_0 . Алгоритмы численного решения задачи с начальными условиями могут быть построены по аналогии с известными методами решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для решения применяем пакет прикладных программ *MathCad*, который содержит широкий набор функций для решения дифференциальных уравнений. Некоторые из этих функций используют специфические свойства конкретного дифференциального уравнения для обеспечения достаточного быстродействия и точности при поиске решения. В пакете *MathCad* вспомогательные задачи Коши решаются методом Рунге-Кутты. Данный метод имеет погрешность на каждом шаге $\Delta r \ll 1$ порядка Δr^5 . Этот метод реализуется функциями *rkfixed* или *rkadapt* [1]. Для поиска вспомогательных (фиктивных) условий на контуре R_0 по заданным условиям на контуре R_K используется функция *sval*, реализующая метод стрельбы для краевых задач.

Проведен численный анализ НДС исследуемых дисков. На рис. 2 приведены графики $w(r)$ и $\vartheta(r)$ для профиля h_2 при разных видах распределенной нагрузки.

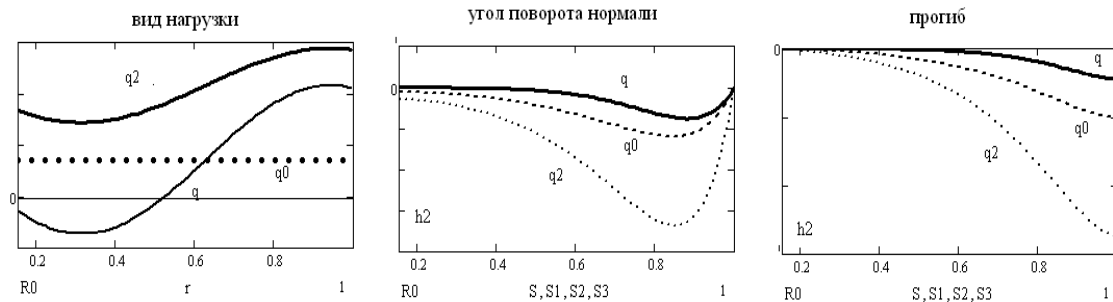


Рис. 2. Варианты нагрузки. Изменение прогиба и угла поворота нормали

Литература

1. Кирьянов, Д. Самоучитель MathCAD 2001 / Д. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001. – 544 с.
2. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М. : Высш. шк., 1982. – 264 с.