

УДК 621.315.2

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАЗЕМЛЕННОЙ ОБОЛОЧКЕ

**Д. В. КОМНАТНЫЙ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### **Введение**

В современных электроэнергетике, телемеханике и технике связи широко применяются кабели электроснабжения и передачи данных в экранирующих оболочках. От надежной работы кабельных линий зависит непрерывность подачи электроэнергии к крупным промышленным объектам и бесперебойность связи в регионе. Линии связи внутри систем управления ответственными технологическими процессами зачастую также экранируются круглыми цилиндрическими экранами для защиты от внешних электромагнитных помех.

Отмеченные обстоятельства придают большую актуальность задачам расчета электростатического поля в моделях конструкций кабелей различного назначения. Так, в [1] рассматривается расчет электрического поля в изоляции трехфазного кабеля энергоснабжения методом отражения в круге. В [2] исследован вопрос влияния цилиндрического экрана на первичные параметры (емкость) жил кабеля связи. Тот же вопрос рассмотрен в [3]–[6] с помощью различных численных методов: метод моментов, метод эквивалентных электродов, метод конечных элементов. Анализ этих работ показывает следующее. Метод отражений затруднительно применять при большом числе проводников в кабеле [1] и для расчета требуются численные методы. Наличие же большого числа предлагаемых численных методов свидетельствует, что проблема применения численных методов для расчета кабелей далека от окончательного решения.

### **Постановка задачи**

Предложенный в работах [3], [6] метод моментов и развитый в [5] метод конечных элементов имеют достаточно сложный математический аппарат, что затрудняет их реализацию на ЭВМ. Метод эквивалентных электродов [4] лишен этого недостатка. В этом методе проводящие границы модели разбиваются на граничные элементы в форме отрезков прямых или дуг окружностей. Действие каждого граничного элемента принимается равным действию круглого провода малого сечения, несущего тот же заряд, что и граничный элемент. Поскольку потенциал поля такого провода описывается простым математическим выражением, то математический аппарат метода существенно упрощается. Однако граничные элементы вводятся и на проводниках кабеля и на его экранирующей оболочке, что увеличивает размерность матриц уравнений метода. Поэтому в настоящей статье ставится задача: путем незначительного усложнения расчета поля эквивалентных электродов сократить размерность матриц уравнений метода.

**Метод решения задачи**

Согласно [1] и [2] экранирующая цилиндрическая оболочка кабеля заземляется. Поэтому учесть индуцированные на ней заряды можно методом отражений (инверсии) в круге по Кельвину [7], [8]. В указанных источниках приведена формула для потенциала поля электрической оси, находящейся в цилиндрической оболочке круглого сечения.

$$\varphi(N) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{1}{r_{MN}} - \ln \frac{R_0}{\rho} \frac{1}{r_{M^*N}} \right), \quad (1)$$

где  $\varphi(N)$  – потенциал в точке наблюдения, В;  $\tau$  – линейная плотность заряда электрической оси, Кл/м;  $\epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость изоляции, Ф/м;  $r_{MN}$  – расстояние между точкой наблюдения  $N$  и точкой расположения электрической оси  $M$ , м;  $R_0$  – радиус оболочки, м;  $\rho$  – расстояние от электрической оси до центра оболочки, м;  $r_{M^*N}$  – расстояние между точкой наблюдения  $N$  и точкой расположения отражения электрической оси в экранирующей оболочке  $M^*$ , м.

Эта формула позволяет записать уравнения метода эквивалентных электродов следующим образом.

Как описано в [4], система уравнений метода эквивалентных электродов связывает неизвестные заряды электродов с известными потенциалами их и имеет вид:

$$[\varphi] = [\alpha][\tau], \quad (2)$$

где  $[\varphi]$  – матрица-столбец потенциалов эквивалентных электродов;  $[\alpha]$  – квадратная матрица потенциальных коэффициентов;  $[\tau]$  – матрица-столбец линейной плотности зарядов эквивалентных электродов.

При этом считается, что заряды эквивалентных электродов сосредоточены на их геометрических осях, иными словами электрические и геометрические оси эквивалентных электродов совпадают.

Коэффициенты матрицы  $[\alpha]$ , принадлежащие левой главной диагонали, связывают потенциал данного эквивалентного электрода с его зарядом и с зарядом этого электрода, отраженным в оболочке кабеля. Согласно [7], [9] потенциал заряда электрода вычисляется на поверхности электрода. В свою очередь, потенциал отраженного заряда рассчитывается в центре эквивалентного электрода. Таким образом, для элемента левой главной диагонали матрицы коэффициентов системы (2) имеем из (1):

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{1}{r_{эл}} - \ln \frac{R_0}{\rho} \frac{1}{r_1} \right), \quad (3)$$

где  $r_{эл}$  – радиус эквивалентного электрода, м;  $r_1$  – расстояние от отраженного заряда до центра эквивалентного электрода, м.

Остальные коэффициенты матрицы  $[\alpha]$  связывают потенциал электрода  $i$  с зарядом электрода  $j$  и с отраженным в оболочке зарядом электрода  $j$  и согласно (1) имеют вид:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \left( \ln \frac{1}{r_{ij}} - \ln \frac{R_0}{\rho} \frac{1}{r_{ij}^*} \right), \quad (4)$$

где  $r_{ij}$  – расстояние между эквивалентными электродами, м;  $r_{ij}^*$  – расстояние между эквивалентным электродом  $i$  и отражением электрода  $j$ , м.

Таким образом, эквивалентные электроды размещаются только на поверхностях проводников кабеля, что сокращает размерность матрицы  $[\alpha]$ . Система уравнений (2) является частным случаем системы линейных алгебраических уравнений метода граничных элементов для численного решения интегральных уравнений электростатического поля [4]. Сокращение размерности матрицы коэффициентов уравнений указанного численного метода повышает устойчивость полученных этим методом решений и позволяет избежать вычислительных трудностей.

### Численный эксперимент

Для проверки предлагаемой модификации метода эквивалентных электродов было рассчитано распределение зарядов на внутреннем проводнике модели кабеля, показанной на рис. 1. Потенциал внутреннего проводника считается известным.

Для построения системы эквивалентных электродов окружность внутреннего проводника разделяется на несколько дуг в одинаковое количество радиан. В центрах этих дуг помещаются эквивалентные электроды. Радиус эквивалентных электродов вычисляется из условия равенства периметра электрода и длины граничного элемента – дуги [10]:

$$\frac{2\pi r_m}{N} = 2\pi r_{\text{эл}}.$$

Следовательно,

$$r_{\text{эл}} = \frac{r_m}{N}, \quad (5)$$

где  $r_m$  – радиус внутреннего проводника, м;  $N$  – счетная переменная.

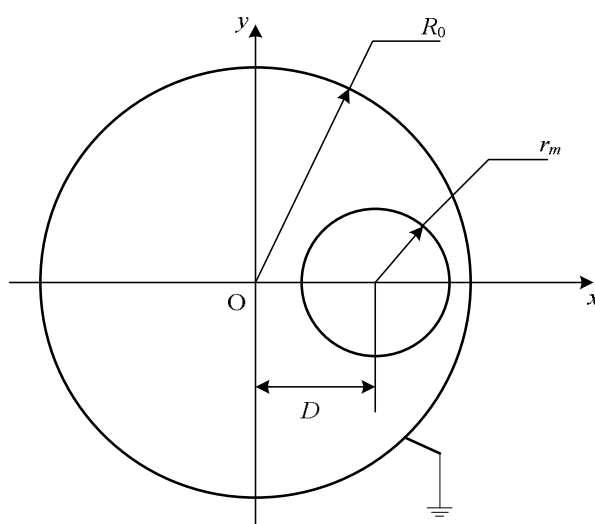


Рис. 1. Модель конструкции экранированного кабеля

Координаты центров эквивалентных электродов вычисляются из известных параметрических уравнений окружности, а координаты отраженных в круге зарядов электродов по формулам из [8]:

$$x^* = \frac{xR_0^2}{x^2 + y^2}, \quad y^* = \frac{yR_0^2}{x^2 + y^2}, \quad (6)$$

где  $x^*$ ,  $y^*$  – координаты отраженного заряда, м;  $x$ ,  $y$  – координаты заряда эквивалентного электрода, м.

Необходимо выбрать способ проверки полученных результатов расчета. В [1] электростатическое поле рассматриваемой модели рассчитывается методом отражений в круге. Этот метод дает решение в виде бесконечного ряда, в [1] при расчете учтены только два-три члена этого ряда. Поэтому использование метода отражений для проверочного расчета сопряжено с трудностями получения достаточного числа членов ряда.

Тогда для проверки был принят метод сравнения заданного потенциала в некоторой точке проводника с потенциалом, вычисленным в этой же точке по распределению зарядов эквивалентных электродов. Этот метод основан на теореме о единственности решения задачи расчета электростатического поля. Он также позволяет оценить изменение погрешности метода эквивалентных электродов с ростом густоты сетки электродов, что весьма существенно для численных методов.

### Заключение

Вычисление коэффициентов и решение системы (2) проводилось в системе MathCAD 7. При этом исследовался характер приближения рассчитанного потенциала к заданному в контрольной точке. По результатам расчета построен график, приведенный на рис. 2.

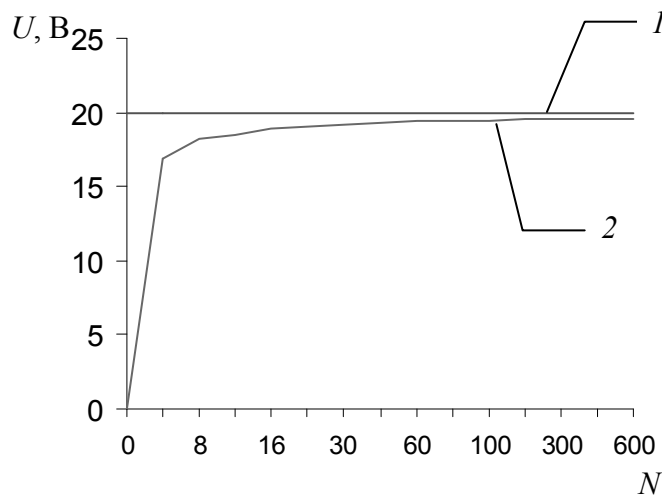


Рис. 2. Зависимость приближения вычисленного потенциала к заданному в контрольной точке от числа итераций: 1 – заданный потенциал; 2 – вычисленный потенциал

Анализ графика показывает, что с ростом числа эквивалентных электродов рассчитанный потенциал контрольной точки все менее отклоняется от заданного. Но для достижения приемлемой погрешности расчета требуется значительное число эквивалентных электродов. Следует отметить, что график является гладким: с ростом числа разбиений отклонение потенциалов монотонно уменьшается. Это свидетельствует об устойчивости решений, полученных предлагаемым численным методом расчета распределения зарядов эквивалентных электродов.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенный вариант метода эквивалентных электродов позволяет рассчитывать характеристики электростатического поля в заземленных бесконечных цилиндрических оболочках круглого

сечения. На практике такие оболочки имеют кабельные линии различного назначения, поэтому метод имеет существенное прикладное значение. Следовательно, поставленная в статье задача может быть признана решенной.

### Литература

1. Александров, Г. И. Изоляция электрических аппаратов высокого напряжения / Г. И. Александров, В. Л. Иванов. – Москва : Энергоатомиздат, 1994. – 207 с.
2. Гроднев, И. И. Экранирование аппаратуры и кабелей связи / И. И. Гроднев, К. Л. Сергейчук. – Москва : Связьиздат, 1960. – 316 с.
3. James, C. Use of the Method of Moments to Find the Charge Densities and Capacitances of a Shielded Twisted Pair Transmission Line / C. James // 1996 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility / IEEE – N.Y., 1996. – P. 277–282.
4. Velichkovich, D. M. Rectangular coax with axial slit and with rectangular or circular center conductor / D. M. Velichkovich, Z. J. Mancic, D. G. Zuklic // International Symposium on Electromagnetic Compatibility / University of Rome «La Sapienza». – Milan, 1998. – P. 384–389.
5. Feliziani, M. Capacitance Matrix Calculation of a Wire Conductor Line: A New FEM Approach / M. Feliziani, F. Maradei // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 1998. – Vol. 40, № 3. – P. 262–270.
6. James, C. The Charge Density Distributions and Mutual Capacitance of a Shielded Twisted Four-Wire Transmission Line / C. James, J. T. DiBene // 1998 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility / IEEE – N.Y., 1998. – P. 1156–1160.
7. Методы расчета электростатических полей / Н. Н. Миролубов [и др.]. – Москва : Высш. шк., 1963. – 415 с.
8. Шимони, К. Теоретическая электротехника / К. Шимони. – Москва : Мир, 1964. – 773 с.
9. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле : учеб. для студентов вузов / Л. А. Бессонов. – Москва : Высш. шк., 1978. – 231 с.
10. Александров, Г. И. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды / Г. И. Александров. – Ленинград : Энергоатомиздат, 1989. – 360 с.

*Получено 14.05.2009 г.*