

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ КОЛЕСА И РЕЛЬСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛОЩАДКИ КОНТАКТА

Г. П. ТАРИКОВ, Н. М. БОРОДАЧЕВ,
В. В. КОМРАКОВ, Е. М. АКУЛОВА

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Введение

Механическое взаимодействие колеса и рельса является физической основой движения поездов по железным дорогам. Именно это взаимодействие определяет скорость и безопасность движения поездов. Требования к характеристикам контактного взаимодействия колеса и рельса противоречивые. С одной стороны, сцепление колес с рельсами должно обеспечивать малое сопротивление движению состава. С другой стороны, для обеспечения требуемой силы тяги необходимо иметь высокий уровень сцепления колес локомотива с поверхностью рельса. Задаче о контакте колеса с рельсом посвящено значительное количество работ [1], [2]. Тем не менее она остается актуальной. В связи с этим аналитическое решение задачи представляет научный и практический интерес.

Решение краевой задачи для упругого полупространства

В соответствии с гипотезой Герца при определении напряженно-деформированного состояния контактирующие тела заменяются упругими полупространствами, прижатыми друг к другу по площадке контакта. Поэтому сначала построим решение статической краевой задачи теории упругости для полупространства.

Дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил имеет вид [3]:

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

где \vec{u} – вектор перемещений; ν – коэффициент Пуассона; Δ – оператор Лапласа; ∇ – набла-оператор.

Воспользуемся прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3 . В работе [4] показано, что уравнение (1) можно удовлетворить, если положить

$$\vec{u} = \vec{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \nabla \varphi, \quad \Delta \vec{B} = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{2 \cdot (1-2\nu)}{3-4\nu} \nabla \cdot \vec{B}. \quad (2)$$

Здесь \vec{B} – гармонический вектор, а φ – гармонический скаляр. В компонентах декартовой системы координат выражение (2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_1 &= B_1 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\
u_2 &= B_2 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\
u_3 &= B_3 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Гармонические функции B_1, B_2, B_3 и Φ находятся из решения краевой задачи.

Пусть на плоскости $x_3 = 0$ заданы нормальные напряжения:

$$\sigma_{33} = \begin{cases} -f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

а касательные напряжения σ_{31} и σ_{32} отсутствуют.

Здесь Ω – область нагружения в плоскости $x_3 = 0$.

Удовлетворяя этим граничным условиям и используя формулы (3), находим гармонические функции B_i ($i = 1, 2, 3$) и Φ :

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial N}{\partial x_1} + 2av \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \\
B_2 &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial N}{\partial x_2} + 2av \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \\
B_3 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial N}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \Phi; \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}; \quad a = \frac{1}{2(1-2\nu)}; \quad \Phi = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial N}{\partial x_3}; \\
N(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) dy_1 dy_2; \\
r &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь μ – модуль сдвига.

Подставляя выражение (4) в (3), получаем формулы для определения компонент вектора перемещений:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial N}{\partial x_1} + 4av\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \\
u_2 &= \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial N}{\partial x_2} + 4av\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} \right), \\
u_3 &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial N}{\partial x_3} + (1-2\nu) \frac{\partial N}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial N}{\partial x_3}.$$

Следовательно,

$$\Phi = \frac{1-2\nu}{\mu} N. \quad (6)$$

С учетом соотношения (6) формулы (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2\mu} \left[(1-2\nu) \frac{\partial N}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} \right], \\ u_2 &= -\frac{1}{2\mu} \left[(1-2\nu) \frac{\partial N}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} \right], \\ u_3 &= \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu) \frac{\partial N}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Зная компоненты вектора перемещений, можно найти компоненты тензора напряжений по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right); & \sigma_{22} &= 2\mu \left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right); \\ \sigma_{33} &= 2\mu \left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right); & \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \\ \sigma_{23} &= \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); & \sigma_{31} &= \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Интегральное уравнение контактной задачи и его решение

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \ln(x_3 + r) = \frac{1}{r},$$

запишем третью формулу (7) в виде:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1-\nu}{\pi} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \frac{1}{r} dy_1 dy_2 - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \frac{1}{r} dy_1 dy_2 \right].$$

Частный случай этой формулы при $x_3 = 0$:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \frac{1}{R} dy_1 dy_2, \quad (9)$$

где $R = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$.

Функция $f(y_1, y_2)$ представляет собой нормальное давление $p(x_1, x_2)$ в области Ω .

Формула (9) относится к одному упругому телу. Когда рассматривается контакт двух тел, то [3]:

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3^{(1)}(x_1, x_2, 0) + u_3^{(2)}(x_1, x_2, 0) = \delta - \varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2), \quad \text{где } (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Здесь δ – сближение упругих тел, $\varphi_i(x_1, x_2)$ – уравнения поверхностей соприкасающихся тел. Поэтому в случае контакта двух упругих тел уравнение (9) будет иметь вид:

$$\delta - \varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (10)$$

где $(x_1, x_2) \in \Omega$, $\vartheta_i = \frac{1-\nu_i}{\mu_i}$, ($i=1, 2$).

Уравнение (10) является двумерным интегральным уравнением первого рода. При выводе этого уравнения касательные напряжения в области контакта не учитывались. Решая уравнение (10), можно найти закон распределения нормального давления на площадке контакта Ω .

Ограничиваясь в уравнении (10) рассмотрением лишь локальных эффектов, получаем:

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (11)$$

где $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Вопросы, связанные с определением величин R_1 и R_2 , подробно рассматриваются в монографии [3]. В данном случае контактного взаимодействия колеса и рельса будет иметь место контакт поверхности вращения с осями, расположенными накрест при внешнем соприкосновении (рис. 1).

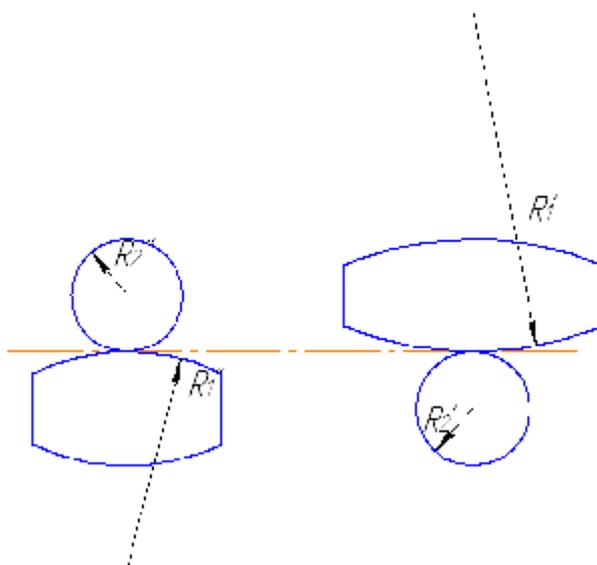


Рис. 1

В этом случае

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2''}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''}. \quad (12)$$

Здесь R_2'' – радиус бандажа, R_2' – радиус головки рельса.

Для неизношенных колеса и рельса полагают, что $R_1' = \infty$ и $R_1'' = \infty$.

Считая величины R_1 и R_2 известными, можно приступить к решению интегрального уравнения (11). Решение этого уравнения в замкнутом виде можно получить полагая, что область контакта Ω является эллиптическая площадка, ограниченная эллипсом E_0 :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b, \quad b^2 = a^2(1 - e^2),$$

где a, b – полуоси эллипса; e – эксцентриситет эллипса E_0 . Величины a, b первоначально неизвестны, они определяются в процессе решения задачи.

Решение уравнения (11) будем искать в таком виде:

$$p(x_1, x_2) = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Подставляя формулу (13) в уравнение (11), получаем:

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = p_0 \frac{\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2}{2\pi} (I_0 - I_1 x_1^2 - I_2 x_2^2), \quad (14)$$

где $I_0 = b\mathbf{K}(e)$, $I_1 = \frac{b}{e^2 a^2} [\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]$, $I_2 = \frac{b}{e^2 a^2} \left[\frac{a^2}{b^2} \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e) \right]$, $\mathbf{K}(e)$, $\mathbf{E}(e)$ – полные эллиптические интегралы.

Уравнение равновесия:

$$P = \iint_{\Omega} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где P – нормальная сила, прижимающая упругие тела.

Подставляя формулу (13) в уравнение равновесия, находим:

$$p_0 = \frac{3}{2} p_c, \quad p_c = \frac{P}{\pi a b}.$$

Формулу (13) можно записать в виде:

$$p(x_1, x_2) = \frac{3}{2} p_c \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Наибольшее давление на площадке контакта:

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b}.$$

Используя соотношение (14), находим:

– большую полуось эллипса E_0 :

$$a = \left[\frac{P(1-\nu)}{\mu} R_1 \right]^{1/3} \alpha_a; \quad \alpha_a = \left[\frac{3}{2\pi} \mathbf{D}(e) \right]^{1/3};$$

– сближение упругих тел (колеса и рельса):

$$\delta = \left[\frac{P(1-\nu)}{\mu R_1^{1/2}} \right]^{2/3} \alpha_{\delta}; \quad \alpha_{\delta} = \left[\frac{9}{32\pi^2 \mathbf{D}(e)} \right]^{1/3} \mathbf{K}(e);$$

$$\mathbf{D}(e) = \frac{1}{e^2} [\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)].$$

Эксцентриситет e эллипса E_0 можно найти из соотношения:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2)[\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]}{\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)}.$$

Малую полуось b эллипса E_0 находим по формуле

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Ось x_1 направлена параллельно продольной оси рельса.

Полученные выше формулы для определения p_{\max}, δ, a, e справедливы для неизношенных колеса и рельса.

На рис. 2 представлены графики изменения величин $R_2/R_1, \alpha_a$ и α_δ в зависимости от e^2 .

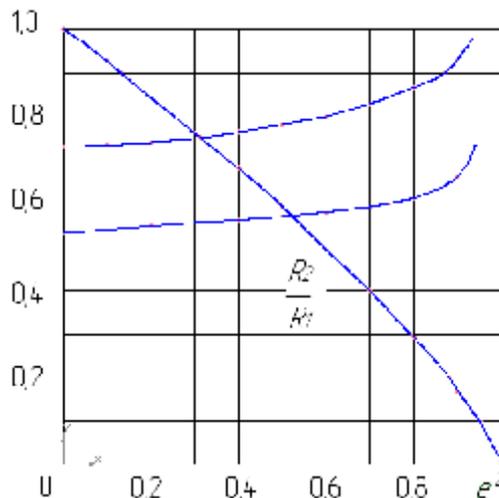


Рис. 2

Рассмотрим числовой пример.

При определении контактных напряжений, сближения и размеров площадки контакта колеса с рельсом, использовались следующие данные:

- рельс Р65 изготовлен из стали, имеющей предел прочности $\sigma_b = 1175$ МПа;
- бандаж вагонного колеса изготовлен из стали, имеющей предел прочности $\sigma_b = 880 - 1100$ МПа;
- упругие характеристики сталей: модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$, модуль сдвига $G = \mu = 8,1 \cdot 10^4$ МПа;
- принимаем радиус головки рельса Р65 равным 300 мм;
- радиус бандажа колеса равным 475 мм.

Следовательно,

$$R_1' = 300 \text{ мм}, R_1'' = \infty.$$

$$R_2'' = 475 \text{ мм}, R_2' = \infty.$$

По формулам (12) находим:

$$R_1 = 475 \text{ мм}; R_2 = 300 \text{ мм}; R_2/R_1 = 0,632.$$

По рис. 2 находим:

$$e^2 = 0,46; \alpha_a = 0,775; \alpha_\delta = 0,565.$$

Пусть $P = 80$ кН. Тогда

$$a = \left[\frac{80 \cdot 10^3 (1 - 0,28)}{8,1 \cdot 10^{10}} \cdot 0,475 \right]^{1/3} \cdot 0,775 = 5,40 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5,4 \text{ мм};$$

$$\delta = \left[\frac{80 \cdot 10^3 (1 - 0,28)}{8,1 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{0,475}} \right]^{2/3} \cdot 0,565 = 5,77 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 5,77 \cdot 10^{-2} \text{ мм};$$

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = 5,40 \cdot \sqrt{1 - 0,46^2} = 3,97 \text{ мм};$$

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a b} = \frac{3}{2 \pi} \frac{80 \cdot 10^3}{5,4 \cdot 3,97 \cdot 10^{-6}} = 1,782 \cdot 10^9 \text{ Па} = 1782 \text{ МПа};$$

$$\beta = \frac{a}{b} = \frac{5,40}{3,97} = 1,36.$$

Таким образом, получено решение задачи о контакте колеса и рельса.

Заключение

Дано аналитическое решение пространственной контактной задачи применительно к контакту колеса с рельсом. Получены формулы для определения контактных напряжений и размеров площадки контакта, которые в дальнейшем могут быть использованы для определения наибольших расчетных напряжений (по третьей или четвертой теории прочности), возникающих на некоторой глубине под площадкой контакта, а также при решении контактной задачи с учетом износа контактирующих поверхностей колеса и рельса.

Литература

1. Моделирование процессов контактирования, изнашивания и накопления повреждений в сопряжении колесо-рельс / В. М. Богдамов [и др.] // Трение и износ. – 1996. – Т. 17, № 1. – С. 12–26.
2. Вериго, М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава / М. Ф. Вериго, А. Я. Коган ; под ред. М. Ф. Вериго. – М. : Транспорт, 1986. – 559 с.
3. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
4. Бородачев, Н. М. Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях / Н. М. Бородачев, В. В. Астанин // Проблемы прочности. – 2003. – № 3. – С. 62–69.

Получено 17.11.2011 г.