Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПРАКТИКУМ
по выполнению домашних заданий по курсам «Математика», «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
Т34

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 1 от 13.03.2006 г.*)

Авторы-составители: *Е. З. Авакян*, *Л. Д. Корсун*, *В. В. Кондратюк*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *П. А. Хило*

Т34 **Теория** вероятностей и математическая статистика : практикум по выполнению домашних заданий по курсам «Математика», «Высшая математика» для студентов днев. формы обучения / авт.-сост.: Е. З. Авакян, Л. Д. Корсун, В. В. Кондратюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 56 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-583-0.

Содержит кратко изложенный теоретический материал с разобранными типовыми примерами и достаточное количество задач для решения.

Для студентов дневной формы обучения.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

ISBN 978-985-420-583-0

§ 1. Определение вероятности

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A обозначается $p(A)$.

Достоверным называется событие U, которое в результате опыта непременно должно произойти.

$$p(U) = 1.$$

Невозможным называется событие V, которое в результате опыта не может произойти.

$$p(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \le p(A) \le 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий называются *несовместными* в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Равновозможными называют события, вероятности которых равны.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются *случаями*.

Если результаты опыта сводятся к схеме случаев, то вероятность события A вычисляется по формуле:

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где n – общее число случаев; m – число случаев, благоприятных событию A.

Основные формулы комбинаторики

1. Число всех различных *перестановок* P_n из n элементов равно:

$$P_n = n \tag{1.2}$$

2. Число всех различных *размещений* A_n^m m элементов из n $(m \leq n)$ равно:

$$A_n^m = n \cdot (n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n}{(n-m)\,!}. \tag{1.3}$$

При этом различные комбинации из m элементов, взятых из n элементов, различаются не только составом, но и порядком следования.

Число всех различных *сочетаний* C_n^m m элементов из n $(m \leq n)$ равно:

$$C_n^m = \frac{n}{m\,!(n-m)\,!}. \tag{1.4}$$

При этом различные комбинации из m элементов, взятых из n элементов, различаются только составом.

Пример 1. Из полной колоды игральных карт извлекается наудачу одна карта. Найти вероятность того, что эта карта окажется: 1) тузом; 2) пиковой масти; 3) пиковым тузом.

Решение:

1) так как число карт полной колоды равно $n = 52$, и каждая из них имеет одинаковую вероятность быть извлеченной из колоды, а число тузов в колоде $m = 4$, поэтому вероятность извлечения туза равна $p = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

2) общее число карт пиковой масти равно 13. Поэтому вероятность извлечения карты этой масти равна $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;

3) вероятность извлечения туза пик равна $\frac{1}{52}$.

Пример 2. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т. е. C_N^m – числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные $(m-k)$ деталей должны быть нестандартными и взять их из $N-n$ нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$.

Искомая вероятность:

$$p = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Задания

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что а) сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится четверка; б) сумма очков на выпавших гранях равна семи.

2. В коробке 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

3. В коробке 8 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия.

4. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

5. Буквы слова «РЕМОНТ» выписаны на карточках. Карточки перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «МОРЕ»?

6. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «КНИГА». Буквы перемешали и собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово «КНИГА».

7. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово «АНАНАС». Буквы перемешали и собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово «АНАНАС».

8. Восемь человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

9. Восемь человек случайным образом рассаживаются вдоль стены. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

10. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

11. В круг радиуса R вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, брошенная в круг наудачу, окажется внутри квадрата?

12. На плоскость с нанесенной квадратной сеткой со стороной 4 см бросают монету радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет линии.

13. В равносторонний треугольник со стороной a вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная в треугольник наудачу, окажется внутри круга?

14. Двое условились встретиться в определенном месте. Договорились, что каждый из них будет на месте встречи между 13 и 14 часами и пришедший, не застав другого, подождет его в течение 1/4 часа. Вычислить вероятность того, что встреча произойдет.

§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A+B) = p(A) + p(B). \qquad (2.1)$$

Для большого числа несовместных событий:

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n). \qquad (2.1')$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB), \tag{2.2}$$

где AB – произведение событий A и B.

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий:

$$p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-$$

$$-p(BC)+p(ABC). \tag{2.2$'$}$$

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно состоит в непоявлении события A. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \tag{2.3}$$

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $p(A/B)$ или $p_B(A)$.

События A и B называют *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий

$$p(A/B)=p(A); \quad p(B/A)=p(B). \tag{2.4}$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B). \tag{2.5}$$

Для большего числа событий, независимых в совокупности:

$$p(A_1A_2\ldots A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n). \tag{2.5$'$}$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B / A)$$

или (2.6)

$$p(AB) = p(B) \cdot p(A / B).$$

Для нескольких зависимых событий:

$$p(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 A_2) \ldots p(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$

где $p(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ наступили.

Пример 1. Зависимы или независимы:

1) несовместные события;
2) события, образующие полную группу;
3) равновозможные события?

Решение:

1) зависимы, т. к. появление любого из них обращает в нуль вероятности всех остальных;

2) зависимы, т. к. непоявление всех, кроме одного, обращает в единицу вероятность последнего;

3) могут быть как зависимы, так и независимы.

Пример 2. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A – появление туза;
B – появление карты красной масти;
C – появление бубнового туза;
D – появление десятки.

Зависимы или независимы следующие пары событий: 1) A и B; 2) A и C; 3) B и C; 4) B и D; 5) C и D?

Решение:

1) независимы, т. к. $p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; $p(A/B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$;

2) зависимы, т. к. $p(A) = \frac{1}{13}$; $p(A/C) = 1$;

3) зависимы, т. к. $p(B) = \frac{1}{2}$; $p(B/C) = 1$;

4) независимы, т. к. $p(B)=\frac{1}{2}$; $p(B/D)=\frac{1}{2}$;

5) зависимы, т. к. несовместны.

Пример 3. На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

Решение

Первый способ. Событие A будет осуществлено, если произойдет любое из трех несовместных событий:

B – один учебник в переплете, два без переплета;

C – два учебника в переплете, один без переплета;

D – три учебника в переплете.

$$A=B+C+D.$$

По теореме сложения

$$p(A)=p(B)+p(C)+p(D),$$

$$p(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91},\quad p(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},\quad p(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Окончательно получим:

$$p(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}.$$

Второй способ. События A (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и $\overline{A}$ (ни один из взятых трех учебников не имеет переплета) – противоположные, поэтому

$$p(A)+p(\overline{A})=1.$$

Вероятность:

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}.$$

Пример 4. В урне a (*б*) белых и b (*ч*) черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Событие может появиться в двух несовместных вариантах: *бч* или *чб*; по теоремам сложения и умножения

$$p(бч + чб) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Задания

15. По мишени производятся три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i-ом выстреле ($i = 1, 2, 3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A}_i$ следующие события:

A – все три попадания;

B – все три промаха;

C – хотя бы одно попадание;

D – хотя бы один промах;

E – не меньше двух попаданий;

F – не больше одного попадания;

G – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

16. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A – обнаружен ровно один из четырех объектов;

B – обнаружен хотя бы один объект;

C – обнаружено не менее двух объектов;

D – обнаружено ровно два объекта;

E – обнаружено ровно три объекта;

F – обнаружены все четыре объекта.

Указать, в чем состоят события:

1) $A+B$; 2) AB; 3) $B+C$; 4) BC; 5) $D+E+F$; 6) BF.

Совпадают ли события BF и CF?

Совпадают ли события BC и D?

17. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

18. Брошены три игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится 5 очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков; в) на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани – дру-

гое число очков; г) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

19. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: A – выпадение герба на первой монете; B – выпадение герба на второй монете.

Найти вероятность события $C = A + B$.

20. В двух ящиках находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 6 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 18, 8 и 6. Из каждого ящика наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

21. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков соответственно равны: 0,9; 0,85; 0,75. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) не менее двух попаданий; в) ни одного попадания.

22. Ведется стрельба по самолету, уязвимыми агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того, чтобы поразить (вывести из строя) самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. Вероятность поражения первого двигателя $p_1 = 0{,}05$, второго двигателя $p_2 = 0{,}04$, кабины пилота $p_3 = 0{,}1$. Агрегаты самолета поражаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

23. В цехе работают 10 мужчин и 6 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

24. В ящике 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

25. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором вопросы.

26. В урне a белых и b черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

27. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

§ 3. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, причем $p(A_1) = p_1$, $p(A_1) = p_1, \ldots,$ $p(A_n) = p_n$; пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_n$:

$$p(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n .$$

Задания

28. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиабомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятность попадания которых соответственно равны: 0,6; 0,4; 0,7; 0,8.

29. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

30. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

Устройство состоит из элементов, собранных по указанной в каждом варианте схеме (рис. 3.1–3.4). Предполагается, что отказы элементов являются независимыми событиями. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого элемента p_i. Вычислить надежность всего устройства.

31. $p_1 = 0{,}75$; $p_2 = 0{,}85$.

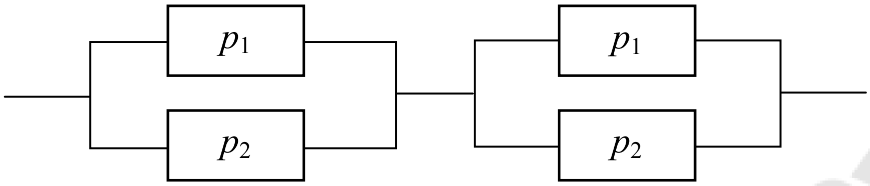

Рис. 3.1

32. $p_2 = 0{,}85$; $p_2 = 0{,}85$.

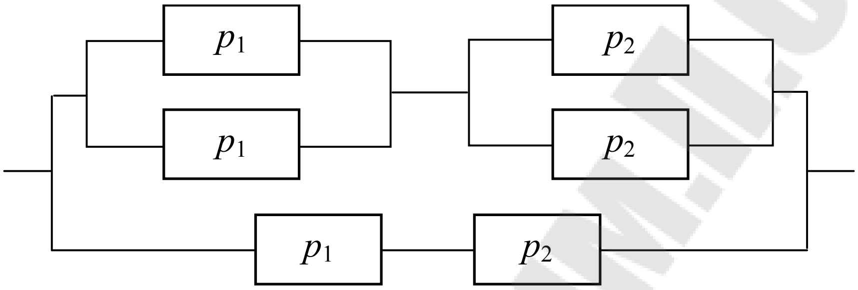

Рис. 3.2

33. $p_1 = 0{,}90$; $p_1 = 0{,}90$; $p_3 = 0{,}80$.

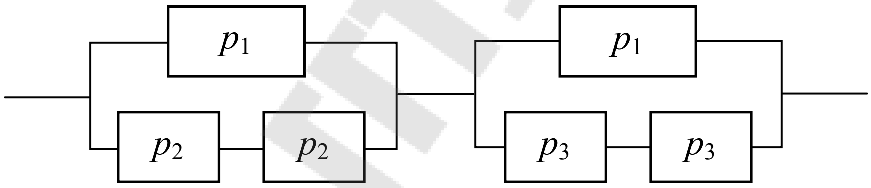

Рис. 3.3

34. $p_1 = 0{,}75$; $p_2 = 0{,}80$; $p_3 = 0{,}70$.

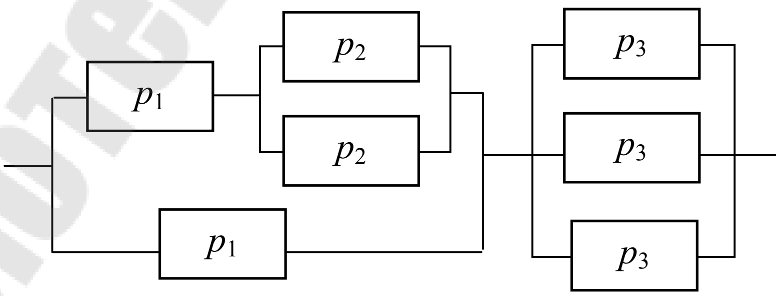

Рис. 3.4

35. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

§ 4. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A / H_k). \tag{4.1}$$

Это равенство называют ***формулой полной вероятности***.

Пример 1. В урну, содержащую белый шар, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение. Обозначим через A событие – извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: H_1 – два черных шара, H_2 – один белый и один черный шар, H_3 – два белых шара.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице (т. к. они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии гипотезы H_1, что первоначально в урне не было белых шаров, $P(A / H_1) = 1/3$ (т. к. в урне всего 3 шара, из них один белый). Аналогично находим условные вероятности для двух оставшихся гипотез: $P(A / H_2) = 2/3$, $P(A / H_3) = 1$.

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) +$$
$$+ P(H_3) \cdot P(A / H_3) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.$$

Задания

36. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для вин-

товки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

37. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

38. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

39. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60 % изготовлено первым заводом и 40 % – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 90 соответствуют стандарту, а из 100 штук, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту 80. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет соответствовать стандарту.

40. В тире имеется шесть ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

41. На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,86, второго – 0,90, третьего – 0,92, четвертого – 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

42. С первого автомата на сборку поступает 40 %, со второго – 35 %, с третьего – 25 % деталей. Среди деталей первого автомата 0,2% бракованных, второго – 0,3 %, третьего – 0,5 %. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

43. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 25 % сообщений «точка» и 20 % сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 3 : 2. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал «точка»; б) принят сигнал «тире».

44. Имеются две партии одинаковых изделий по 15 и 20 штук, причем в первой партии два, а во второй – три бракованных изделия.

Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего выбирается наудачу одно изделие из второй партии. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным.

45. Приборы одного наименования изготовляются тремя заводами, первый завод поставляет 45 % всех изделий, поступающих на производство, второй – 30 % и третий 25 %. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна 0,8, вторым – 0,85 и третьим – 0,9. Определить полную (среднюю) надежность прибора, поступившего на производство.

§ 5. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \qquad (5.1)$$

где $P(A)$ – полная вероятность.

Пример 1. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через A событие – деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): H_1 – деталь произведена первым автоматом, причем $P(H_1) = 2/3$ (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй, т. е. из трех произведенных деталей две произведены первым автоматом, а одна вторым); H_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(H_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, равна $P(A/H_1) = 0{,}6$. Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, равна $P(A/H_2) = 0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) = 2/3 \cdot 0{,}6 + 1/3 \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17} = 0{,}59.$$

Задания

46. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

47. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

48. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

49. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2 : 3 : 5. Вероятность того, что деталь с первого автомата высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

50. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором – 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изде-

лие стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке.

51. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, первого типа.

52. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. Задание: а) найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института; б) студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?

53. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй 10, из них 3 неисправных. Задание: а) найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию; б) наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

54. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. Задание: а) найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат; б) к какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

55. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. Задание: а) найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов; б) взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

§ 6. Формула Бернулли

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A.

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\left(0 < p < 1\right)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ или } P_n(k) = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} p^k q^{n-k}, \tag{6.1}$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, – находят соответственно по формулам:

а) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n\left(k-1\right)$;

б) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n\left(n\right)$;

в) $P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n\left(n\right)$;

г) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n\left(k\right)$.

Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в n опытах, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p (и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$), определяется из двойного неравенства:

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{6.2}$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p, то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле:

$$n \ge \frac{\lg\left(1-P\right)}{\lg\left(1-p\right)}. \tag{6.3}$$

Если производится n независимых опытов в различных условиях, причем вероятность появления события A в i-м опыте равна $p\left(i = 1,2,...,n\right)$, то вероятность P_m того, что событие A в n опытах появится m раз, равна коэффициенту при z^m в разложении по степеням z *производящей функции*:

$$\varphi_n\left(z\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(q_i + p_i z\right), \tag{6.4}$$

где $q_i = 1 - p_i$.

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу – формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{6.5}$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

Пример 1. Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Какова вероятность того, что среди десяти изделий одно нестандартное?

Решение. По условию задачи $n = 10$, $q = 0{,}95$, $p = 1 - q = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Тогда по формуле Бернулли получаем:

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^9 = 0{,}315.$$

Пример 2. При установившемся технологическом процессе 80 % всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 250 изделий.

Решение. При $n = 250$, $p = 0{,}8$ и $q = 0{,}2$ неравенство дает $199{,}8 \le m_0 \le 200{,}8$. Поскольку m_0 может быть только целым, то $m_0 = 200$.

Пример 3. За один час автомат изготовляет 20 деталей. За сколько часов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,952, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

Решение. Найдем вначале количество изготовляемых деталей, чтобы с вероятностью $P = 0{,}952$ можно было утверждать о наличии по крайней мере одной бракованной детали, если вероятность брака $p = 0{,}01$:

$$n \ge \frac{\lg(1 - 0{,}952)}{\lg(1 - 0{,}01)} = \frac{\lg 0{,}048}{\lg 0{,}99} \approx 302.$$

Следовательно, за $t = 302/20 = 15{,}1$ ч автомат с вероятностью 0,952 изготавливает по крайней мере одну бракованную деталь.

Пример 4. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.

Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение. По условию $n = 100\ 000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность P мала, поэтому воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Найдем λ:

$$\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10.$$

Искомая вероятность:

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} = \frac{10^5 \cdot 0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

Задания

56. Вероятность выигрыша по одной лотерее 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных лотерей выигрышными окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух.

57. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.

58. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз.

59. Всхожесть семян лимона составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) более семи.

60. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта.

61. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений.

62. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Указание: принять $e^{-2} = 0{,}13534$.

63. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

64. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

65. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

66. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

67. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

68. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появления события в этих испытаниях было равно 25?

69. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

70. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в десятку была больше 0,9?

§ 7. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\left(0 < p < 1\right)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (7.1)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \;\; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведены в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\,(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'). \qquad (7.2)$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-(z^2/2)} dz \text{ – функция Лапласа,}$$

$$x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \quad x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}.$$

Таблица значений функции Лапласа для положительных значений $x(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная $[\Phi(-x) = -\Phi(x)]$.

Пример 1. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение. По условию $n = 243;\ k = 70;\ p = 0{,}25;\ q = 0{,}75.$ Так как $n = 243$ – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = (k - np)/\sqrt{npq}$.

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

Из приложения 1 найдем $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$. Искомая вероятность $P_{243}(70) = 1/6{,}75 \cdot 0{,}1561 = 00231$.

Пример 2. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянная и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа; $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$; $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

1. По условию $n = 100$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$. Вычислим x' и x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим:

$$P_{100}(75;\ 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Используя данные приложения 2, найдем:

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\ \ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность:

$$P_{100}(75; 90) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

2. Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76,…, либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $k_1 = 75$, $k_2 = 100$. Тогда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

Из приложения 2 найдем $\Phi(5) = 0{,}5;\ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$

Искомая вероятность:

$$P_{100}(75;90) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$$

3**.** События – «A появилось не менее 75 раз» и «A появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность:

$$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

Задания

71. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

72. Вероятность появления события а каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) но более 74 раз.

73. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаниях равна 0,7.Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не более 1470 раз; в) не более 1469 раз.

74. Вероятность появления события в каждом независимом испытании постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что в 145 испытаниях событие наступит ровно 120 раз.

75. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных.

76. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2.

77. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550.

78. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

§ 8. Случайные величины. Дискретные случайные величины

Случайной называют величину (СВ), которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, которое наперед неизвестно и зависит от причин, которые заранее не могут быть учтены.

Например:

1. Случайная величина – число очков, выпавших на игральной кости. СВ может принимать любое из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Расстояние, которое может пролетать снаряд при выстреле. СВ может принимать любое значение из промежутка $[l_{\min}, l_{\max}]$.

Дискретной называют СВ, которая может принимать отдельные (дискретные) значения, причем число их может быть как конечно, так и бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы, графически и аналитически в виде формулы.

Пример 1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 \$ и 10 выигрышей в 1 \$. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение. СВ X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; $x_3 = 50$. Найдем вероятности появления x_1, x_2, x_3.

Среди 100 билетов невыигрышных $m = 100 - 1 - 10 = 89$.

$$P(x_1) = \frac{89}{100} = 0{,}89;\ P(x_2) = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ P(x_3) = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Контроль: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 1$; $0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1$.

Составляем таблицу-закон распределения:

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

Графически закон распределения строят, нанося в прямоугольной системе координат точки $(x_i; p_i)$ и соединяя их отрезками прямой. Полученная ломаная называется многоугольником распределения (рис. 8.1).

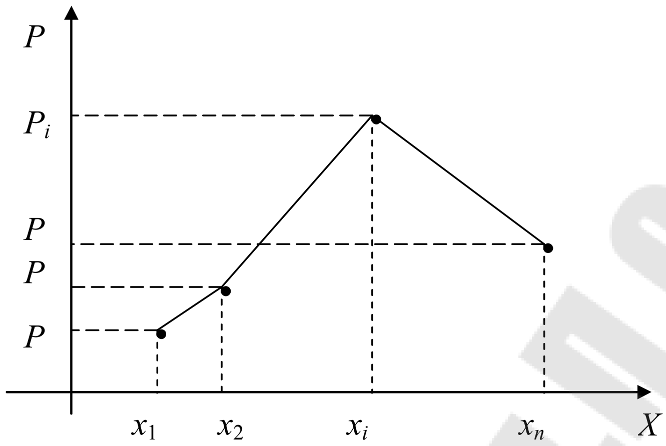

Рис. 8.1

Пример 2. Дискретная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения (рис. 8.2).

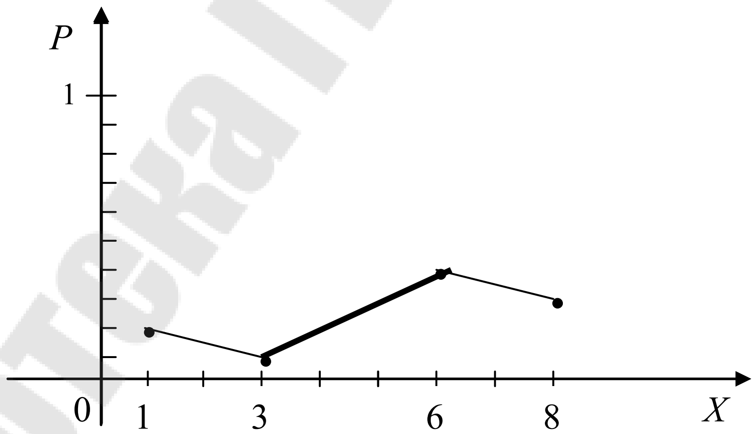

Рис. 8.2

Закон распределения может быть задан формулой, связывающей вероятность появления с численным значением СВ X.

Например: Пусть случайная величина X – число появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения – число k появлений события вычисляют по формуле Бернулли:

$$C_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (8.1)$$

Такой закон распределения называется биномиальным.

Если число испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала, то используют приближенную формулу:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda = np. \qquad (8.2)$$

В этом случае говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, задающая вероятность того, что СВ X примет значение меньшее, чем x.

Функция распределения дискретной СВ X вычисляется по формуле:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x_i). \qquad (8.3)$$

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1, \quad -\infty < x < \infty.$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
3. $F(x)$ – неубывающая функция на всей числовой оси.
4. $F(x)$ непрерывна слева, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Вероятность попадания СВ X на произвольный полуинтервал $[x_1; x_2)$ определяется формулой:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (8.4)$$

Пример 3. Дискретная СВ x распределена по закону:

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти $F(x)$ и построить ее график. Вычислить $P(3 < x < 8)$.

Решение

При $x \le 3 \qquad F(x) = 0;$

при $3 < x \le 4 \quad F(x) = 0{,}2;$

при $4 < x \le 7 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3;$

при $7 < x \le 10 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7;$

при $x > 10 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1.$

Строим график (рис. 8.3):

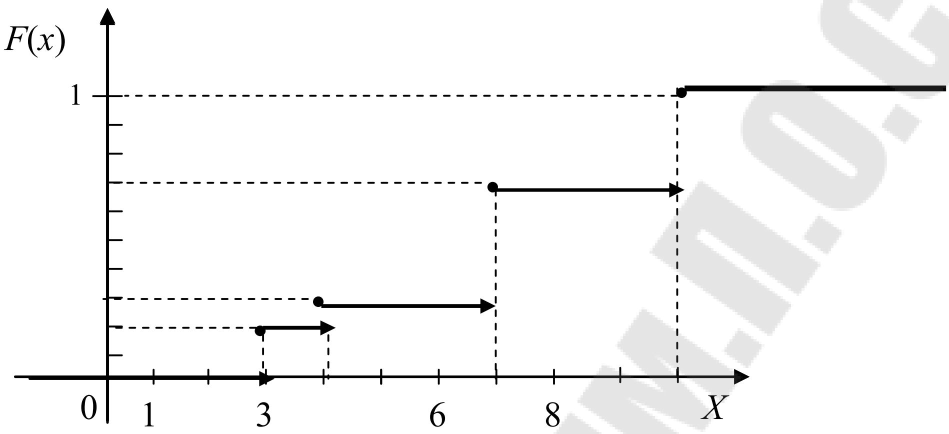

Рис. 8.3

Вероятность попадания СВ X в интервал $3 < x < 8$ найдем как $P(3 < x < 8) = F(8) - F(3) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$.

Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений значений случайной величины на их вероятности.

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ . \tag{8.5}$$

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M(C) = C$.

2. Произведением СВ X на постоянную C будем называть СВ Y, принимающую значения $Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n$ с вероятностями $P_1,\ P_2,\ ...,\ P_n$.

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[CX] = C \cdot M[X].$$

3. Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина.

Произведением СВ X и Y называется СВ XY, которая принимает все возможные значения $x_i y_i$. Вероятности полученных значений равны произведению вероятностей сомножителей. Если некоторые из произведений оказались равными, то их вероянности складываются.

Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y].$$

Суммой СВ X и Y называется СВ $(X+Y)$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y. Вероятности полученных значений $(x_i + y_i)$ для независимых СВ X и Y равны произведению вероятностей слагаемых; для зависимых СВ X и Y – произведению вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y].$$

Пример 4. Найти математическое ожидание СВ X, распределенной по закону:

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Решение

$$M[X] = 0{,}21 \cdot 0{,}1 + 0{,}54 \cdot 0{,}5 + 0{,}61 \cdot 0{,}4 = 0{,}535\,.$$

Пример 5. Найти математическое ожидание суммы чисел очков, которая может выпасть при бросании двух костей.

Решение. Пусть СВ X – число очков, выпавшее на первой кости; СВ Y – число очков, выпавшее на второй кости.

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y] = 2M[X].$$

Появление любого из возможного числа очков равновероятно, поэтому все значения СВ имеют вероятности $P = \frac{1}{6}$.

Тогда $M[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Таким образом, $M[X+Y] = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$.

Дисперсия дискретной случайной величины

Отклонением называют разность между значением СВ и ее математическим ожиданием.

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D[X] = M\left((X - M[X])^2\right). \qquad (8.6)$$

Дисперсия дискретной случайной величины может быть найдена по формуле:

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2. \qquad (8.7)$$

Пример 6. Найти дисперсию СВ *X*, которая задана законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Решение

Найдем математическое ожидание $M[X]$:

$$M[X] = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Найдем $M\left[X^2\right]$: $M\left[X^2\right] = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}6 + 5^2 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$.

Тогда $D[X] = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю: $D[C] = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат: $D[CX] = C^2 D[X]$.

3. Дисперсия суммы двух независимых СВ равна сумме дисперсий слагаемых: $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$.

4. Дисперсия разности двух независимых СВ равна разности их дисперсий: $D[X - Y] = D[X] - D[Y]$.

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \qquad (8.8)$$

Пример 7. Найти среднее квадратическое отклонение СВ X заданной законом распределения:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Решение

Найдем $M[X] = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

Найдем $M[X^2] = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}5 = 54$.

Найдем $D[X] = 54 - (6{,}4)^2 = 13{,}04$.

Тогда искомое среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61.$$

Задания

79. Дискретная случайная величина задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

а)

X	2	4	5
P	0,3	0,1	0,2

б)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

80. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной СВ X – числа стандартных деталей среди отобранных.

81. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется составить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

82. Дискретная СВ X распределена по закону:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

83. В десятиламповом радиоприемнике перегорела одна лампа. Для устранения неисправности выбранную наугад лампу заменяют исправной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу приемника. Постройте закон распределения, функцию распределения и найдите математическое ожидание и дисперсию числа проверенных ламп.

84. В энергосистеме имеется группа из четырех однотипных агрегатов, находящихся в одинаковых условиях. Вероятности исправного состояния агрегата в течении времени T равны 0,6 и независимы. Случайная величина X – число агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить закон распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

85. Техническое устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа первого элемента равна 0,1; второго и третьего – 0,2; четвертого и пятого – 0,3. Построить закон распределения и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – числа отказавших элементов.

86. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа партий, в каждой из которых содержится ровно четыре стандартных изделия, если проверке подлежит 50 партий.

Указание: математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону: $m = np$.

87. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$, а также известны математические ожидания $M[X] = 0{,}1$; $M[X^2] = 0{,}9$. Найти закон распределения СВ X.

88. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X

примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M[X] = 2{,}6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = 0{,}8$.

§ 9. Непрерывные случайные величины

Плотностью распределения вероятности (дифференциальным распределением) случайной величины X называют предел отношения вероятности попадания ее на элементарный участок от x до $x + \Delta x$ к длине участка Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \tag{9.1}$$

учитывая, что $P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F$.

Таким образом, плотность распределения вероятности случайной величины X равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \tag{9.2}$$

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси, а плотность распределения вероятности $f(x)$ существует везде, за исключением, быть может, конечного числа точек.

График функции $f(x)$ называется кривой распределения.

Свойства $f(x)$:

1. Плотность распределения неотрицательна, т. е. $f(x) \ge 0$.

2. Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) 2x = 1$.

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Пример 1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ \sin x, \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение. Плотность распределения $f(x)$ равна первой производной от $F(x)$. Поэтому получаем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0;\\ \cos x, \text{ при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\\ 0, \text{ при } x > \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Пример 2. Плотность распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x, \text{ при } |x| \le \frac{\pi}{2};\\ 0, \text{ при } |x| > \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Определить коэффициент a.

Решение. Все значения $f(x)$ сосредоточены в $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, поэтому условие нормировки имеет вид:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 1;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2a\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2a = 1.$$

Таким образом, $a=\frac{1}{2}$.

Функция $F(x)$ может быть найдена по известной $f(x)$ следующим образом:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (9.3)$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha;\beta]$ может быть найдена по формуле:

$$P(\alpha \le x < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (9.4)$$

Пример 3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1;\\ x-\dfrac{1}{2}, \text{ при } 1<x\le 2;\\ 0, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания СВ X в интервал $[1{,}1;\ 1{,}9]$.

Решение. Используем формулу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ при $x\le 1$ $f(x)=0$, поэтому $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dx=0$.

Если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left.\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right|_1^x=\frac{(2x-1)^2}{8}-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2}=$$

$$=\frac{4x^2-4x+1-1}{8}=\frac{4x^2-4x}{8}=\frac{x^2-x}{2}.$$

Если $x>2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int\limits_{2}^{x}0dx=0+\left.\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right|_1^2+0=\frac{(2x-1)^2}{8}=$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1;\\ \dfrac{x^2-x}{2}, \text{ при } 1<x\le 2;\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $(1{,}1;1{,}9)$ найдем как

$$P(1{,}1 \le x < 1{,}9) = \int_{1,1}^{1,9}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \left.\frac{(x-0{,}5)^2}{2}\right|_{1,1}^{1,9} = \frac{(1{,}9-0{,}5)^2}{2} - \frac{(1{,}1-0{,}5)^2}{2} =$$

$$= \frac{1{,}4^2 - 0{,}6^2}{2} = \frac{1{,}96 - 0{,}36}{2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \qquad (9.5)$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если все возможные значения $f(x)$ принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M[X] = \int_{a}^{b} xf(x)\,dx. \qquad (9.6)$$

Все свойства математического ожидания, приведенные для дискретных случайных величин, сохраняются для непрерывных случайных величин.

Пример 4. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{x}{2}$ в интервале $(0;\,2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание.

Решение

$$M[X] = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{1}{6}x^3\right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} [X - M[X]]^2 f(x)dx \qquad (9.7)$$

или равносильным равенством

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x)dx - (M[X])^2. \qquad (9.8)$$

В частности, если все значения $f(x)$ принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D[X]=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M[X])^2 . \qquad (9.9)$$

Все свойства дисперсии, приведенные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, как и в случае дискретной случайной величины, определяется как

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}. \qquad (9.10)$$

Пример 5. Случайная величина X в интервале $(0;5)$ задана плотностью распределения $f(x)=\frac{2}{25}x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию *X*.

Решение. Будем вычислять дисперсию по формуле:

$$D[X]=\int_0^5 x^2 f(x)dx-(M[X])^2 ,$$

$$M[X]=\int_0^5 xf(x)dx=\int_0^5 x\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^2dx=\frac{2}{75}x^3\Big|_0^5=\frac{2\cdot 125}{75}=\frac{10}{3},$$

$$\int_0^5 x^2 f(x)dx=\int_0^5 x^2\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^3dx=\frac{x^4}{50}\Big|_0^5=\frac{625}{50}=\frac{25}{2}.$$

Таким образом,

$$D[X]=\frac{25}{2}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{25}{2}-\frac{100}{9}=\frac{125}{18}.$$

Задания

В задачах 89–91 по заданной функции распределения $F(x)$ найти плотность распределения $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

89. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ \sin 2x, \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, \text{ при } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

90. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), \text{ при } 0 \le x \le \pi; \\ 1, \text{ при } x > \pi. \end{cases}$

91. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x < 1; \\ \dfrac{1}{2}\left(x^2 - x\right), \text{ при } 1 \le x \le 2; \\ 1, \text{ при } x > 2. \end{cases}$

Задана плотность распределения $f(x)$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания значений случайной величины X в указанный промежуток $(\alpha;\beta)$.

92. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 3\sin 3x, \text{ при } \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \ \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right); \\ 0, \text{ при } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

93. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0; \\ \dfrac{x}{8}, \text{ при } 0 < x \le 4, \ (1;\, 3); \\ 0, \text{ при } x > 4. \end{cases}$

94. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей числовой оси OX равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр C.

95. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x)=C\sin 2x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

96. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0;1)$ равна $f(x)=C\,\mathrm{arctg}\,x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

97. Случайная величина X в интервале $(-3;3)$ задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Что вероятнее: в результате испытания окажется $x<1$ или $x>1$?

98. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, \text{ при } -2<x\le 2;\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

99. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0;\\ a(1-\cos x), \text{ при } 0\le x\le \pi;\\ 1, \text{ при } x>\pi.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности $f(x)$; б) найти коэффициент a; в) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины; г) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

§ 10. Основные законы распределения случайных величин

Среди законов распределения для дискретных случайных величин наиболее распространенным является *биноминальное распределение*. Оно имеет место, когда случайная величина X выражает число появлений события A в n независимых опытах, при условии, что вероятность появления события A в каждом опыте постоянна и равна p.

Возможными значениями случайной величины X являются: $x_0=0, x_1=1,\ldots,x_n=n$. Вероятности этих возможных значений определяются по формуле Бернулли:

$$P(x=m)=C_n p^m(1-p)^{n-m}. \qquad (10.1)$$

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальное распределение:

$$m_x = np. \tag{10.2}$$

Дисперсия:

$$D_x = npg. \tag{10.3}$$

Пример 1. Для работы десяти станков время от времени используется электрическая энергия. Снабжение рассчитано на шесть единиц энергии. Каждому станку с одной и той же вероятностью P может потребоваться энергия. Определить вероятность перегрузки электросети, если известно, что станки работают независимо друг от друга и каждый из них потребляет энергию в среднем 12 мин в течение часа. Найти математическое ожидание числа станков, потребляющих энергию одновременно.

Решение. Пусть случайная величина X – число станков, потребляющих электроэнергию в течение часа. Тогда ее возможные значения: 0, 1, 2,…, 10. Так как станок потребляет энергию в среднем 12 мин в течение часа, то вероятность использования электроэнергии в данный момент одним станком $P = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$; причем каждый станок потребляет электроэнергию независимо друг от друга, поэтому СВ X распределена по биномиальному закону. Перегруз в сети наступит, если X примет одно из значений: 7, 8, 9, 10. Поэтому искомая вероятность равна:

$$P = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) =$$

$$= C_{10}^{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{3} + C_{10}^{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\left(1-\frac{1}{5}\right) + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}.$$

Используя свойства числа сочетаний $C_n^k = C_n^{n-k}$, находим:

$$P = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4^3}{5^{10}} + \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{4^2}{5^{10}} + 10\frac{4}{5^{10}} + \frac{1}{5^{10}} =$$

$$= \frac{120\cdot 64 + 45\cdot 16 + 40 + 1}{5^{10}} = 0{,}00086.$$

Математическое ожидание:

$$M = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2.$$

Случайная величина X называется распределенной по *закону Пуассона*, если ее возможные значения равны 0, 1, 2,…, а соответствующие вероятности определяются формулой:

$$P(x = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \tag{10.4}$$

Характерной особенностью распределения Пуассона является совпадение математического ожидания и дисперсии, причем

$$m_x = D_x = a. \tag{10.5}$$

Распределение Пуассона связано с понятием потока событий.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени (число вызовов скорой помощи, число вызовов на АТС и т. д.).

Плотностью (интенсивностью) потока называется среднее число событий в единицу времени.

Поток событий называется пуассоновским, если он обладает свойствами: стационарностью, «отсутствием последствий» и ординарностью.

Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени зависит только от числа k и длительности промежутка t и не зависит от начала его отсчета.

Свойство «отсутствия последствий» состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Свойство ординарности состоит в том, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно.

Если постоянная интенсивность потока X известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{10.6}$$

Пример 2. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение:

а) по условию $\lambda = 3, t = 2$. Воспользуемся формулой Пуассона. Вероятность того, что за 2 мин поступит четыре вызова, найдем:

$$P_2(4) = \frac{(3 \cdot 2)^4}{4!} e^{-3 \cdot 2} = \frac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0{,}135;$$

б) событие «поступило менее четырех вызовов» есть сумма следующих несовместных событий: поступило 3 вызова; поступило 2 вызова; поступил 1 вызов; вызовов не поступало.

$$P_2(k < 4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) = \frac{(3 \cdot 2)^3}{3!} e^{-3 \cdot 2} +$$
$$+ \frac{(3 \cdot 2)^2}{2!} e^{-3 \cdot 2} + \frac{(3 \cdot 2)^1}{1!} e^{-3 \cdot 2} + \frac{(3 \cdot 2)^0}{0!} e^{-3 \cdot 2} = e^{-6}\left(\frac{6^3}{3!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^1}{1!} + 1\right) =$$
$$= e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) \approx 0{,}1525;$$

в) событие поступило «не менее четырех вызовов» противоположно событию поступило «менее четырех вызовов». Поэтому

$$P_2(k \geq 4) = 1 - P_2(k < 4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475.$$

Случайная величина X называется *равномерно распределенной* на $[a;b]$, если она с постоянной плотностью распределения вероятностей принимает все значения $x \in [a;b]$.

Равномерный закон распределения (плотность распределения равномерно распределенной СВ X) имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ если } a \leq x \leq b; \\ 0, \text{ если } x < a \text{ и } x > b. \end{cases} \quad (10.7)$$

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины:

$$m_x = \frac{a+b}{2}. \quad (10.8)$$

Дисперсия равномерно распределенной случайной величины:

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (10.9)$$

Пример 3. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02А.

Решение. В качестве случайной величины X рассмотрим ошибку округления отсчета. Данная СВ является равномерно распределенной на промежутке между двумя делениями. По условию задачи длина интервала равна 0,1. Поэтому $f(x) = \frac{1}{0{,}1} = 10$. Ошибка отсчета превысит 0,02А, если она будет заключена в интервале (0,02; 0,08).

Тогда искомая вероятность:

$$P(0{,}02; 0{,}08) = \int_{0{,}02}^{0{,}08} f(x)dx = 10\int_{0{,}02}^{0{,}08} dx = 10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08} = 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}6.$$

Непрерывная случайная величина X распределена по *показательному закону*, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \ge 0; \\ 0, \text{ при } x < 0. \end{cases} \qquad (10.10)$$

Для показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны между собой и равны $\frac{1}{\lambda}$:

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}. \qquad (10.11)$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ при } x \ge 0; \\ 0, \text{ при } x < 0. \end{cases} \qquad (10.12)$$

Графики плотности распределения и функции распределения случайной величины, распределенной по показательному закону изображены на рис. 10.1 и 10.2.

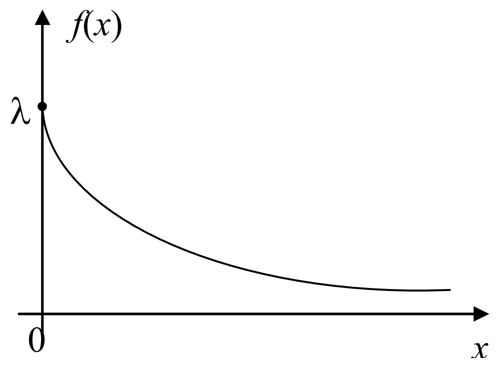

Рис. 10.1

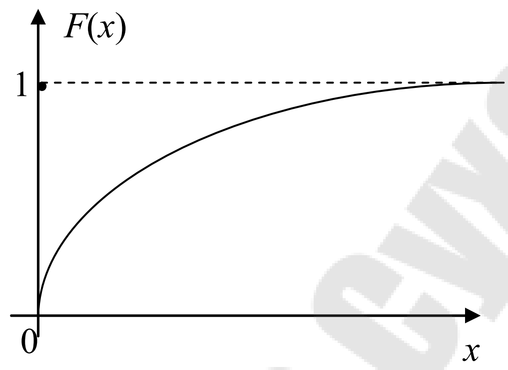

Рис. 10.2

Замечательным свойством показательного распределения является то, что при наступлении события $y \geq x$ случайная величина $z = y - x$ имеет такой же закон распределения, что и случайная величина X.

Показательному распределению подчиняются такие случайные величины как, время безотказной работы элементов технического устройства, распада радиоактивного атома, обслуживания технической системы и т. д.

Пусть T – время безотказной работы устройства. Тогда $F(t) = P(T < t)$ – вероятность выхода из строя устройства за время t. Тогда $R(t) = 1 - F(t)$ – вероятность безотказной работы устройства за время t.

Функция $R(t)$ называется функцией надежности.

При показательном законе распределения вероятностей $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность отказов.

Пример 4. Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо друг от друга. Среднее время безотказной работы каждого элемента 600 ч. Устройство работает при условии работы всех четырех элементов. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение не менее 1000 ч.

Решение. Пусть событие A_k состоит в том, что элемент k $(k = \overline{1,4})$ работает безотказно в течение 1000 ч. Тогда вероятность безотказной работы всего устройства

$$P = P(A_1, A_2, A_3, A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).$$

По условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A)$, и тогда $P = (P(A))^4$.

Найдем $P(A)$. По условию задачи математическое ожидание времени безотказной работы $T = 600$, поэтому $\lambda = \frac{1}{T} = \frac{1}{600}$. Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{600}}, \text{ при } t \geq 0; \\ 0, \text{ при } \ t < 0. \end{cases}$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{600}}\Bigg|_{t=1000} = e^{-\frac{1000}{60}} = e^{-\frac{5}{3}} \approx 0{,}189.$$

Тогда вероятность безотказной работы всего устройства в течение 1000 ч $P = (0{,}189)^4 \approx 0{,}0016$.

Если плотность распределения вероятности случайной величины X определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

то распределение случайной величины X называется нормальным или Гауссовым.

Величины m и σ, входящие в формулу закона нормального распределения, являются математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением СВ X.

График нормального распределения изображен на рис. 10.3.

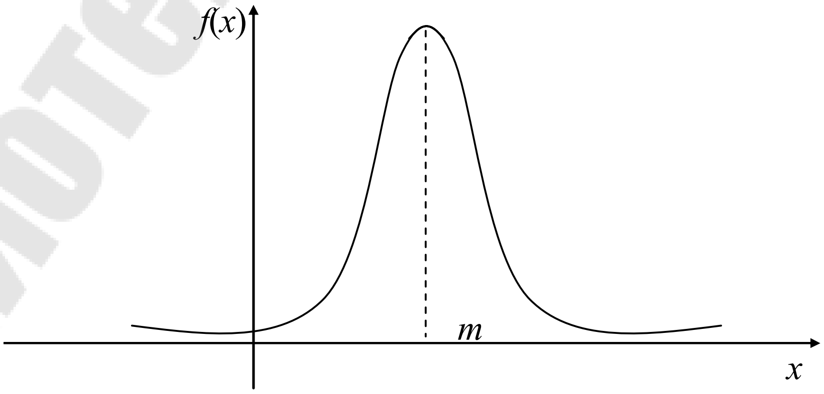

Рис. 10.3

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, значения которой приведены в приложении 2.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического отклонения менее чем на величину δ может быть найдена по формуле:

$$P(|x - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример 5. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. По условию математическое ожидание случайных ошибок равно нулю. Искомую вероятность найдем по формуле:

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При $\delta = 15, \sigma = 10$: $P(|x| < 15) = 2\Phi(1{,}5)$.

Значение $\Phi(1{,}5)$ находим из приложения 2:

$$\Phi(1{,}5) = 0{,}4332.$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(|x| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Пример 6. Определить среднеквадратичную ошибку измерительного прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки измерения имеют нормальное распределение и с вероятностью 0,9 не выходят за пределы ± 5 мм.

Решение. Пусть случайная величина X – ошибка измерений. Тогда из условия задачи следует, что $P(|x| < 5) = 0{,}9$.

Так как СВ X распределена нормально, то справедлива формула:

$$P\left(|x| < 5\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right).$$

Таким образом, находим:

$$2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}9, \quad \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}45.$$

Находим значение аргумента, соответствующего значению функции Лапласа (приложение 2) $\Phi(x) = 0{,}45$, $x = 1{,}65$.

Таким образом, $\frac{5}{\sigma} = 1{,}65$; $\sigma = \frac{5}{1{,}65} \approx 3$ мм.

Задания

100. Прибор состоит из восьми узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Какова вероятность того, что за время t откажет: а) ровно один узел; б) хотя бы один узел; в) не менее двух узлов.

101. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $P = 0{,}4$. Случайная величина X – число появлений события A в четырех испытаниях. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

102. Техническое устройство содержит 2000 одинаково надежных элементов. Вероятность отказа для каждого элемента за время T равна 0,001. Какова вероятность того, что за это время откажет не менее двух и не более четырех элементов?

103. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно 120. Найдите вероятность того, что: а) за 2 с на АТС не поступит ни одного вызова; б) за 2 с поступит менее двух вызовов; в) за 3 с поступит не менее 6 вызовов.

104. При работе технического устройства в случайные моменты времени возникают неисправности. Поток неисправностей можно считать простейшим. Среднее число неисправностей за 100 ч непрерывной работы равно двум. Определить вероятность того, что: а) в течение 50 ч работы возникнет хотя бы одна неисправность; б) за 200 ч работы устройства не будет ни одной неисправности; в) за 1000 ч работы устройства возникнет не более трех неисправностей.

105. Закон равномерного распределения задан плотностью вероятности $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ в интервале $(a;b)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$. Получить математическое ожидание и дисперсию.

106. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 мин.

107. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

108. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0{,}13; 0{,}7)$.

109. Время безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием – 1000 ч. Определите вероятность безотказной работы двигателя в течение 800 ч.

110. Среднее время работы каждого из двух элементов, входящих в техническое устройство, равно 1000 ч. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа каждого его элемента. Определите вероятность того, что устройство будет безотказно работать от 550 до 800 ч, если время T работы элементов независимо и распределено по показательному закону.

111. Испытывают три элемента, которые работают независимо друг от друга. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t)=1-e^{-0{,}1t}$; для второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}2t}$; для третьего элемента $F_{31}(t)=1-e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;5)$ ч откажет: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

112. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(15; 25)$.

113. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10; 20)$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0;10)$.

114. Случайная величина X – ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 4 мВ. Систематическая ошибка отсутствует. Найдите вероятность того, что в четырех независимых измерениях ошибка X: а) превзойдет по модулю 5 мВ не более двух раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале 0,5–3,5 мВ.

115. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

116. Три независимых измерения производят прибором, имеющим систематическую ошибку 2 мм и дисперсию 16 мм^2. Какова вероятность того, что хотя бы одно измеренное значение будет отклоняться от истинного не более чем на 6 мм.

Ответы к заданиям

1. а) $\frac{5}{36}$; б) $\frac{1}{6!}$. **2**. $\frac{1}{6}$. **3**. а) $\frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2}$; б) $\frac{C_3^2}{C_8^2}$. **4**. $\frac{1}{6^4}$. **5**. $\frac{1}{360}$. **6**. $\frac{1}{120}$. **7**. $\frac{1}{60}$.

8. $\frac{2}{7}$. **9**. $\frac{1}{4}$. **10**. $\frac{3}{16}$. **11**. $\frac{2}{p}$. **12**. $\frac{1}{4}$. **13**. $\frac{p}{3\sqrt{3}}$. **14**. $\frac{7}{16}$. **17**. 0,38.

18. а) $\frac{1}{6^3}$; б) $\frac{1}{3^6}$; в) $\frac{5}{7^2}$; г) $\frac{5}{9}$. **19**. $\frac{3}{4}$. **20**. $\frac{61}{200}$. **22**. $p = p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3$.

25. $\frac{57}{115}$. **26**. $\frac{a}{a+b}$. 27. $\frac{5}{1764}$. **28**. 0,9856. **29**. $1-(1-p)^n$.

30. $1-[1-(1-p)^m]^k$. **35**. 0,8. **36**. 0,85. **37**. 0,5. **38**. 0,085. **39**. 0,86.
40. 0,583. **41**. 0,9075. **42**. 0,0031. **43**. а) 0,85; б) 0,68. **44**. 0,15. **45**. 0,84.
46. Вероятнее, что винтовка была без оптического прицела, $p = \frac{24}{43}$.

С оптическим прицелом $p = \frac{19}{43}$. **47**. $\frac{3}{7}$. **48**. 0,3125.
49. а) 0,69; б) 0,2319. **50**. а) 0,974; б) 0,402. **51**. а) 0,78; б) 0,4615.
52. а) 0,7555; б) в первой. **53**. а) 0,8333; б) из первой. **54**. а) 0,66;
б) ко второму. **55**. а) 0,7429; б) к типу B. **56**. а) 0,2076; б) 0,3115;
в) 0,6329. **57**. а) 0,3087; б) 0,1323; в) 0,9692. **58**. а) 0,3932; б) 0,6554;
в) 0,7379. **59**. а) 0,302; б) 0,5638; в) 0,4362. **60**. а) 0,7373; б) 0,4096;
в) 0,6723. **61**. а) 0,3487; б) 0,0574; в) 0,9872. **62**. 0,18. **63**. 0,09.
64. а) 0,0613; б) 0,9197; в) 0,019; г) 0,632. **65**. а) 0,224; б) 0,1992;
в) 0,5678; г) 0,95. **66**. 14. **67**. 8. **68**. $62 \le n \le 64$. **69**. $0{,}6 \le n \le 0{,}62$.
71. 0,0782. **72**. а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056. **73**. а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5.
75. 0,0993. **76**. 0,00135. **77**. 0,8157. **78**. 0,0041.

89. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2\cos 2x, & 0 < x \le \pi/4; \\ 0, & x \ge \pi. \end{cases}$ **90**. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi; \\ 0, & x \ge \pi/4. \end{cases}$

91. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$ **92**. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi/6;\\ -\cos 3x, & \pi/6<x\le \pi/3;\\ 1, & x>\pi/3.\end{cases}$

$P\left(\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **93**. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/16, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $P(1<x<3)=\dfrac{1}{2}$.

94. $C=\dfrac{1}{2}$. **95**. $C=1$. **96**. $C=\dfrac{4}{\pi-\ln 4}$.

97. $M=0,\ D=\dfrac{9}{2},\ P(x>1)<P(x<1)$.

98. $V=0,\ D=\dfrac{4}{3},\ \sigma=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **99**. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi \left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right);\\ 0, & x\ge \pi.\end{cases}$

$M=\dfrac{\pi}{2},\ D=\dfrac{\pi^2-8}{4},\ \sigma=\dfrac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}$. **100**. а) 0,336; б) 0,832; в) 0,5.

102. 0,544. **103**. а) $P_4(3)=0{,}0256$; б) $P_4(x<3)=0{,}0123$;

в) $P_4(x\ge 3)=0{,}9877$. **104**. а) 0,63; б) 0,019; в) 0,000003.

106. $P(2<x<5)=0{,}6$. **107**. $P(0<x<1/3)+P(2/3<x<1)=2/3$.

108. $P(0{,}13<x<0{,}7)=0{,}555$. **109**. 0,45. 110. 0,016.

111. а) 0,292; б) 0,466; в) 0,19. **112**. $P(15<x<25)=0{,}6826$.

113. $P(0<x<10)=0{,}3$. **114**. а) 0,9738; б) 0,7. **115**. 92. 116. 0,97.

Литература

1. Гмурман, В. В. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. В. Гмурман. – Москва : Высш. шк., 1970.

2. Гмурман, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика / В. В. Гмурман. – Москва : Высш. шк., 1977.

3. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / под ред. А. П. Рябушка. – Минск : Выш. шк., 1992.

4. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1976.

5. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Наука, 1978.

6. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова. – Москва : Наука, 1986. – Ч. 3.

7. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – Москва : Наука, 1988.

8. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1982.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0148	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Приложение 2

Значения функций $\Phi(x) = \mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ *и* $\overline{\Phi}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,0000	0,60	0,6039	0,2257	1,20	0,9103	0,3849	1,80	0,9891	0,4641
02	0226	0080	62	6194	2324	22	9155	3888	82	9899	4656
04	0451	0160	64	6346	2389	24	9205	3925	84	9907	4671
06	0676	0239	66	6494	2454	26	9252	3962	86	9915	4686
08	0901	0319	68	6638	2517	28	9297	3997	88	9922	4699
0,10	1125	0398	0,70	6778	2580	1,30	9340	4032	1,90	9928	4713
12	1348	0478	72	6914	2642	32	9381	4066	92	9934	4726
14	1569	0557	74	7047	2703	34	9419	4099	94	9939	4738
16	1790	0636	76	7175	2764	36	9456	4131	96	9944	4750
18	2009	0714	78	7300	2823	38	9490	4162	98	9949	4761
0,20	2227	0793	0,80	7421	2881	1,40	9523	4192	2,00	9953	4772
22	2443	0871	82	7538	2939	42	9554	4222	05	9963	4798
24	2657	0948	84	7651	2995	44	9583	4251	10	9970	4821
26	2869	1026	86	7761	3051	46	9610	4279	15	9976	4842
28	3079	1103	88	7867	3106	48	9636	4306	20	9981	4860
0,30	3286	1179	0,90	7969	3159	1,50	9661	4332	2,25	9985	4877
32	3491	1255	92	8068	3212	52	9684	4357	30	9988	4892
34	3694	1331	94	8163	3264	54	9706	4382	35	9991	4906
36	3893	1406	96	8254	3315	56	9726	4406	40	9993	4918
38	4090	1480	98	8342	3365	58	9745	4429	45	9995	4928
0,40	4284	1554	1,00	8427	3413	1,60	9763	4452	2,50	9996	4938
42	4475	1628	02	8508	3461	62	9780	4474	60	9998	4953
44	4662	1700	04	8586	3508	64	9796	4495	70	9999	4965
46	4847	1772	06	8661	3554	66	9811	4515	80	9999	4974
48	5027	1844	08	8733	3599	68	9825	4535	2,90	0,9999	4981
0,50	5205	1915	1,10	8802	3643	1,70	9838	4554	3,00	1,0000	4986
52	5379	1985	12	8868	3686	72	9850	4573	20	1,0000	4993
54	5549	2054	14	8931	3729	74	9861	4591	40	1,0000	4996
56	5716	2123	16	8991	3770	76	9872	4608	60	1,0000	4998
0,58	0,5879	0,2190	1,18	0,9048	0,3810	1,78	0,9882	0,4625	3,80	1,0000	0,4999

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Практикум по выполнению домашних заданий по курсам «Математика», «Высшая математика» для студентов дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Авторы-составители: **Авакян** Елена Зиновьевна
Корсун Лидия Дмитриевна
Кондратюк Валерия Вячеславовна

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 14.08.07.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,3.
Изд. № 57.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.