

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЛИЯНИЯ НА АСИММЕТРИЮ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ДВУХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ

**Д.Г. КРОЛЬ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П.О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

В работе представлены результаты исследования основных параметров влияния на асимметрию теплопереноса в двухслойной металлической пластине. Асимметрия появляется при перестановке слоев металлов. Представлены результаты исследования систем Fe – Mo и Fe – V.

### Введение

Исследование явления асимметрии теплового потока проводилось экспериментально в стационарных условиях на двухслойных пластинах [1]. Теоретическое изучение асимметрии в нестационарных условиях проведено в работах [2 - 5]. Основные закономерности гистерезисных процессов изучены в [6 - 8]. Данная работа является продолжением этих исследований и развивает полученные прежде результаты по следующим направлениям: 1) влияние условий импульсного нагрева; 2) влияние начальной температуры образца; 3) влияние теплового состояния правой границы (изотермичность либо теплоизоляция).

### Постановка и решение задачи

Уравнение энергии и закон Фурье для теплового потока имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad t \geq 0; \quad (1)$$

$$u(T) = \int_0^T c(T) dT, \quad \Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T) dT,$$

где  $x$  - декартова координата;  $t$  - время;  $T$  - температура;  $q$  - удельный тепловой поток;  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности;  $c$  - объемная теплоемкость. Искомыми функциями являются температура и тепловой поток в двух контактирующих областях. Первый слой:  $T = T^{(1)}(x, t)$ ,  $q = q^{(1)}(x, t)$ ,  $x \in [0, h_1]$ . Второй слой:  $T = T^{(2)}(x, t)$ ,  $q = q^{(2)}(x, t)$ ,  $x \in [h_1, h]$ . Толщина образца равна  $h = h_1 + h_2$ . Условия идеального теплового контакта:

$$x = h_1, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \quad q^{(1)} = q^{(2)}. \quad (2)$$

Правая граница области теплоизолирована:

$$x = h, \quad q^{(2)}(h, t) = 0. \quad (3)$$

Именно это граничное условие отличает данную работу от предшествующих публикаций [2 - 6]. Помимо теоретического значения, условие теплоизоляции важно еще и потому, что его нетрудно осуществить на практике.

Тепловой поток  $q_0(t)$  характеризует поверхностный источник энергии на левой границе:

$$x = 0, \quad q^{(1)}(0, t) = q_0(t). \quad (4)$$

Начальная температура образца однородная по координате:

$$t = 0, \quad T(x, 0) = T^0 \equiv const, \quad (5)$$

причем  $T_w = T^0$ .

Теплофизические свойства металлов аппроксимируются полиномами третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$c = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3; \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3, \quad T \in [T', T'']. \quad (6)$$

Процесс нагрева рассматривается в интервалах температур, для которых фазовые превращения не происходят. Построение аппроксимирующих полиномов выполняется на основе справочных данных [9]. Производство энтропии подсчитываем по формуле [10]:

$$y = q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \right).$$

Изучаем важный на практике случай, когда нагрев осуществляется импульсом треугольной временной формы:

$$q_0(t) = B t^n \exp(mt);$$

$$B > 0, \quad n > 0, \quad m < 0; \quad B, n, m - const.$$

Характеристики этого импульса такие:

максимальное значение поверхностного теплового потока,

$$t = t_0, \quad q_{\max} = q_0(t_0);$$

длительность импульса,

$$t = t_1, \quad q_0(t_1) = 0.001 q_{\max}.$$

Численные расчеты проводятся в безразмерных величинах. При обезразмеривании применяются масштабы величин (они отмечены нижним индексом  $b$ ), обеспечивающие инвариантность размерной и безразмерной форм записи:  $\lambda_b = x_b^2 c_b / t_b$ ,  $q_b = \lambda_b T_b / x_b$  и т.д.

Решение краевой задачи (1) – (6) выполняется численным методом интегральных соотношений А.А. Дородницына. Алгоритм построения расчетной схемы подробно изложен в [11].

### Результаты и обсуждение

При обработке результатов расчетов применяем следующие критерии [2-5]: безразмерный градиент температуры

$$g = \frac{h}{T^0} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right);$$

безразмерный тепловой поток

$$Q = \frac{q(x, t) h}{T^0 \lambda(T^0)};$$

безразмерное производство энтропии

$$S = \frac{y(x, t)}{y^0}, \quad y^0 = \lambda(T^0) / h^2.$$

Параметры асимметрии (ПА), характеризующие тепловые свойства двухслойной пластины, такие:

ПА температуры на левой границе

$$A_T^{(0)} = \frac{(T_0)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_0)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

ПА температуры в зоне контакта

$$A_T^{(z)} = \frac{(T_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_z)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

ПА теплового потока в зоне контакта

$$A_q^{(z)} = \frac{(q_z)_{M_1-M_2}^{\max}}{(q_z)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

ПА температуры на правой изотермической границе  $x_w = h$

$$A_T^{(w)} = \frac{(T_w)_{M_1-M_2}^{\max}}{(T_w)_{M_2-M_1}^{\max}};$$

ПА производства энтропии в зоне контакта

$$A_\sigma^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,S)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,S)}};$$

ПА динамического теплового гистерезиса (ДТГ) в зоне контакта

$$A_G^{(z)} = \frac{F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}}{F_{M_2-M_1}^{(g,Q)}}.$$

Индексом  $z$  отмечены значения функций при  $x = h_1$ . В качестве  $M_1, M_2$  применяем химические символы металлов; расположение индексов  $M_1 - M_2$  и  $M_2 - M_1$  указывает на расположение металлических слоев до и после перестановки. Полагаем, что поверхностный источник энергии всегда действует на левую границу образца. Буквами  $F_{M_1-M_2}^{(g,S)}$ ,  $F_{M_1-M_2}^{(g,Q)}$  и т.д. обозначаем площади петель ДТГ в плоскостях «градиент температуры – производство энтропии» и «градиент температуры – тепловой поток». При вычислении  $A_T^{(0)}$ ,  $A_T^{(z)}$ ,  $A_q^{(z)}$ ,  $A_T^{(w)}$  применяем максимальные достигаемые в данном процессе значения функций  $T_0 = T(0, t)$ ,  $T_z = T(h_1, t)$ ,  $q_z = q(h_1, t)$ ,  $T_w = T(h, t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ .

Асимметричные свойства теплопереноса выражены тем сильнее, чем больше ПА отличается от единицы.

Опыт изучения явления тепловой асимметрии [2-6] показал важную роль нелинейных свойств коэффициента теплопроводности  $\lambda(T)$ . Здесь мы рассматриваем два класса нелинейных процессов: 1) в каждом слое  $d\lambda/dT < 0$ ; в качестве примера берем железо и молибден; 2) в одном слое  $d\lambda/dT < 0$ , а в другом  $d\lambda/dT > 0$ ; в качестве примера берем железо и ванадий. Построение аппроксимирующих полиномов вида (8) было выполнено в следующих температурных интервалах: Fe – [300, 1040]; Mo – [300, 2600]; V – [300, 2000]; значения температуры указаны в кельвинах. При вычислении  $Q, S$  берем  $\lambda(T^0) = \lambda_{Fe}(T^0)$ .

Для всех рассмотренных вариантов  $h = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $T_b = 100 \text{ К}$ ,  $l_b = 100 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $q_b = 1 \cdot 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2$ .

### Параметры поверхностного источника

В качестве параметра интенсивности было выбрано время достижения  $t_0$  максимального теплового потока  $q_{\max}$  при  $h_1 = h_2$ , таблица 1. Здесь  $T_w = 300 \text{ К}$ , расчеты показывают, что  $(T_0)_{\text{Fe-Mo}}^{\max} \cong 1000 \text{ К}$ . Асимметрия температуры для обоих классов процессов полностью отсутствует на правой границе:  $A_T^{(w)} = 1$ . С увеличением  $t_0$  наблюдаем следующие явления: 1) для системы Fe-Mo – асимметрия температуры на границе слоев меняется слабо  $A_T^{(z)} \cong 1.14$ , на левой границе  $A_T^{(0)}$  монотонно растет; 2) для системы Fe-V –  $A_T^{(z)} \cong 0.93$ ,  $A_T^{(0)} \cong 1.165$ . В количественном отношении асимметрия наиболее выразительно проявляется в гистерезисном процессе: параметры  $A_Y^{(z)}$ ,  $A_G^{(z)}$  значительно меньше 1.

Таблица 1

### Влияние свойств поверхностного импульса энергии на ПА

1)	2), , 3)	4) Система Fe - Mo						5) Система Fe - V					
		6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)	16)	17)
1	0,10	0,786	1,019	0,872	1,000	0,737	0,886	1,160	0,9336	0,457	1,000	0,091	0,152
2	0,15	0,803	1,018	0,817	1,000	0,574	0,806	1,170	0,9297	0,476	0,999	0,097	0,155
3	0,20	0,812	1,016	0,779	0,999	0,491	0,691	1,173	0,9292	0,491	0,999	0,110	0,149
4	0,25	0,816	1,015	0,752	0,999	0,443	0,646	1,173	0,9310	0,500	0,999	0,117	0,176
5	0,30	0,818	1,013	0,732	0,999	0,400	0,587	1,173	0,9337	0,507	0,999	0,125	0,196
6	0,35	0,819	1,012	0,716	0,999	0,371	0,563	1,172	0,9369	0,513	0,999	0,134	0,194
7	0,40	0,820	1,010	0,704	0,999	0,355	0,541	1,171	0,9403	0,518	0,999	0,138	0,214
8	0,45	0,821	1,008	0,694	0,999	0,335	0,524	1,170	0,9438	0,523	0,999	0,147	0,214
9	0,50	0,822	1,007	0,686	0,998	0,326	0,512	1,168	0,9473	0,527	0,999	0,152	0,229

### Начальная температура образца

Важным физическим свойством процесса является начальная температура образца. Таблица 2 составлена при  $t_0 = 0.3 \text{ с}$ ,  $t_1 = 1.245 \text{ с}$ ,  $h_1 = h_2$ . Асимметрия слабо проявляется при  $x = 0$ ,  $x = h$ . По мере роста  $T^0$  наблюдаем: 1) ослабление асимметричных свойств температуры на левой границе (см.  $A_T^{(0)}$ ) и на границе слоев (см.  $A_T^{(z)}$ ); 2) усиление асимметрии гистерезисных свойств:  $A_Y^{(z)}$  и  $A_G^{(z)}$  убывают примерно такими же темпами, какими нарастает  $T^0$ . 1) для системы Fe-Mo – асимметрия температуры на границе слоев меняется слабо  $A_T^{(z)} \cong 1.14$ , на левой границе  $A_T^{(0)}$  монотонно растет; 2) для системы Fe-V –  $A_T^{(z)} \cong 0.93$ ,  $A_T^{(0)} \cong 1.165$ .

Таблица 2

### Влияние начальной температуры образца на ПА

18)	19)	20) Система Fe - Mo						21) Система Fe - V					
		22)	23)	24)	25)	26)	27)	28)	29)	30)	31)	32)	33)
1	300	1,175	0,933	0,507	0,999	0,1269	0,1949	0,815	1,010	0,725	0,996	0,3880	5,740
2	325	1,168	0,935	0,501	0,999	0,1182	0,1904	0,822	1,008	0,717	0,997	0,3754	5,628

3	350	1,160	0,936	0,495	1,000	0,1105	0,1814	0,829	1,007	0,709	0,997	0,3632	5,543
4	375	1,154	0,938	0,490	1,000	0,1034	0,1754	0,836	1,005	0,703	0,997	0,3521	5,275
5	400	1,147	0,940	0,485	1,000	0,0997	0,1669	0,843	1,004	0,696	0,997	0,3492	5,153
6	425	1,141	0,942	0,480	1,000	0,0936	0,1579	0,850	1,003	0,690	0,997	0,3424	5,103
7	450	1,134	0,944	0,474	1,000	0,0876	0,1527	0,857	1,002	0,684	0,998	0,3300	4,910
8	475	1,128	0,946	0,469	1,000	0,0850	0,1405	0,865	1,001	0,677	0,998	0,3247	4,741
9	500	1,121	0,949	0,463	1,000	0,0793	0,1382	0,872	1,001	0,670	0,998	0,3105	4,416

### Перестановка металлов при фиксированных толщинах слоев

Содержащиеся здесь результаты относятся к варьированию металлов заполняющих слою; в каждом варианте расчета толщины  $h_1, h_2$  фиксированные, таблица 3. Здесь  $q_{\max} = 1.926 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$ ,  $t_0 = 0.3 \text{ с}$ ,  $t_1 = 1.245 \text{ с}$ . В зоне контакта отчетливо выражена асимметрия теплового потока. Асимметрия температуры на правой границе выражена незначительно (см.  $A_T^{(w)}$ ); Зависимость  $A_T^{(z)}$  от  $h_2/h_1$  немонотонная, имеет максимум. По мере роста толщины второго слоя наблюдаем следующие явления: для системы Fe-Mo – асимметрия производства энтропии (см.  $A_y^{(z)}$ ) и асимметрия ДТГ (см.  $A_G^{(z)}$ ) увеличиваются; для системы Fe-V – асимметрия гистерезисных процессов ослабевает (см.  $A_y^{(z)}$  и  $A_G^{(z)}$ ), приближается к 1 со стороны меньших значений.

Таблица 3

### Влияние перестановки металлов на ПА при фиксированных в каждом варианте толщинах слоев

34)	35)	36) Система Fe - Mo						37) Система Fe - V					
		38)	39)	40)	41)	42)	43)	44)	45)	46)	47)	48)	49)
1	9,000	1,044	0,814	0,832	1,153	0,584	0,565	0,956	1,109	0,658	1,042	0,309	0,489
2	4,000	1,121	0,824	0,714	1,099	0,369	0,358	0,842	1,081	0,685	1,030	0,332	0,531
3	2,333	1,155	0,840	0,645	1,064	0,252	0,293	0,802	1,076	0,706	1,023	0,369	0,614
4	1,500	1,167	0,886	0,573	1,030	0,181	0,235	0,795	1,062	0,746	1,011	0,440	0,661
5	1,000	1,175	0,933	0,506	1,000	0,126	0,195	0,790	1,017	0,796	1,000	0,527	0,707
6	0,667	1,173	0,958	0,437	0,969	0,079	0,151	0,786	0,987	0,863	0,988	0,652	0,802
7	0,429	1,168	0,939	0,370	0,939	0,048	0,105	0,782	0,974	0,944	0,976	0,802	0,931
8	0,250	1,166	0,909	0,310	0,909	0,026	0,071	0,780	0,962	0,999	0,963	0,946	0,983
9	0,111	1,165	0,879	0,258	0,879	0,014	0,045	0,779	0,948	1,006	0,948	0,969	0,993

### Перестановка металлических слоев

Обсудим результаты расчета при перестановке толщин слоев вместе с наполняющими их металлами, таблица 4. Параметры  $q_{\max}$ ,  $t_0$ ,  $t_1$  такие же, как в таблице 3. Видим, что при перестановке слоев металлов появляются своеобразные черты процесса: существует значение  $(h_2/h_1)_*$  для которого  $A_T^{(z)}$  и  $A_q^{(z)}$  близки к 1, при отклонении отношения толщин слоев в обе стороны от  $(h_2/h_1)_*$  появляется хорошо выраженная асимметрия температуры и теплового потока в зоне контакта; на правой границе  $x = h$  асимметрия температуры практически отсутствует; параметры асимметрии гистерезисных процессов меняются в очень широком числовом диапазоне (см.  $A_y^{(z)}$ ,  $A_G^{(z)}$ ). В системе Fe-Mo параметр асимметрии температуры на левой границе  $A_T^{(0)}$  как функция  $h_2/h_1$  имеет максимум, а в системе Fe-V – минимум.

## Влияние перестановки металлических слоев разной толщины на ПА

50)	51)	52) Система Fe - Mo						53) Система Fe - V					
		54)	55)	56)	57)	58)	59)	60)	61)	62)	63)	64)	65)
1	9,000	1.146	1.246	7.628	1.101	507.20	127,9	0,878	1,570	18,77	1,057	8900	1112,6
2	4,000	1,176	1,112	2,802	1,041	24,710	12,02	0,814	1,327	6,578	1,024	356,8	105,39
3	2,333	1,180	1,017	1,470	1,002	3,3500	2,457	0,789	1,173	2,901	1,001	29,15	15,785
4	1,500	1,180	0,990	0,850	1,002	0,6130	0,679	0,786	1,076	1,474	1,000	3,646	3,1593
5	1,000	1,175	0,933	0,505	1,000	0,1260	0,195	0,790	1,017	0,796	0,999	0,5268	0,7065
6	0,667	1,161	0,857	0,295	0,997	0,0230	0,052	0,795	0,974	0,437	0,998	0,0788	0,1678
7	0,429	1,143	0,776	0,162	0,997	0,0034	0,017	0,795	0,894	0,229	0,998	0,0102	0,0362
8	0,250	1,112	0,674	0,079	0,960	0,0004	0,0021	0,807	0,784	0,104	0,968	0,0009	0,0050
9	0,111	1,061	0,575	0,028	0,921	0,0001	0,0002	0,847	0,670	0,035	0,935	0,0001	0,0004

**Выводы**

Основные параметры влияния на асимметрию теплопереноса: температурная зависимость коэффициента теплопроводности  $\lambda(T)$ ; знаки производных  $(d\lambda/dT)_{M_1}$ ,  $(d\lambda/dT)_{M_2}$ ; начальная температура образца  $T^0$ ; отношение толщин слоев  $h_1/h_2$ ; время достижения  $t_0$  максимального теплового потока  $q_{\max}$ .

Сопоставление с результатами расчетов [3-5], выполненных для изотермической правой границы образца, позволяет оценить количественные различия, наблюдаемые в этих двух классах явлений. Общие качественные закономерности теплопереноса для обоих видов граничных условий одинаковые.

Работа выполнена под научным руководством проф. Шабловского О.Н.

**Литература**

1. Gogol W. Experimental investigations of effect of asymmetry of heat conduction in two-component systems Eksperymentaln badania efektu asymetrii przewodzenia w ukladach dwuskładnikowych // Archiwum termodynamiki. 1984. Vol. 5. № 3-4. P. 289 - 311.
2. O.N. Shablovsky, D.G. Kroll. Asymmetry of thermal processes: entropy and hysteresis propertieess // VI International Congress on mathematical modelling. Book of abstracts. – Nizhny Novgorod. – 2004. P. 216
3. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г. Динамические свойства контактного теплообмена в двухслойной металлической пластине // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. 2004. – №4. – С. 56 – 62.
4. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г. Нелинейные тепловые процессы при импульсном нагреве двухслойной металлической пластины // Материалы, технологии, инструменты. 2004. Т. 9. №4. С. 9 –14.
5. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г. Асимметричные свойства тепловых процессов при поверхностном нагреве двухслойной металлической пластины // Прикладная физика. 2005. №1. С. 31 – 38.
6. Шабловский О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. –Гомель: ГГТУ имени П.О. Сухого, 2003.
7. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г., Концевой И.А. Импульсный нагрев металла в широком интервале температур // Машиностроение. Минск. 2002. Вып. 18. С. 516-520.

8. Шабловский О.Н., Концевой И.А. Динамический тепловой гистерезис в металлах // Материалы, технологии, инструменты. 2004. Т. 9. №1. С. 9–14.
9. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. – М.: Металлургия, 1989.
10. Беккер Р. Теория теплоты. – М.: Энергия, 1974.
11. Шабловский О. Н., Кроль Д. Г. Численное решение задач нестационарного нагрева металлов //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения / Сб. науч. тр. Ин-т математики НАН Украины. Киев. 1998. С. 234-237.

*Получено 23.06.2005 г.*