УДК 620.92;532.533

АВТОНОМНАЯ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ УСТАНОВКА (АВЭУ) С МАКСИМАЛЬНЫМ УРОВНЕМ КОНВЕРСИИ ЭНЕРГИИ ВЕТРА. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОТУРБИНЫ

Ю.А. КАШИН
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Республика Беларусь

Р.Е. КАШИНА
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь

Учитываемыми факторами ограничения мощности проектируемой АВЭУ принимаются прогнозируемый характер плотности вероятности

$$\Phi = \Phi(U) \tag{1}$$

скорости ветра $V \in [0, V^*]$ в местности расположения установки, реальное аэродинамическое качество элементов ее конструкции, определенная предельно допустимая сила $[P]$ давления ветра на установку, прежде всего, предельно допустимая сила $[P_{\text{Т}}]$ давления ветра на ее турбину и существование определенного момента холостого хода M_0 этой турбины.

В аэродинамике и в ветроэнергетике мерами мощности энергии, переносимой ветром через единицу площади своего поперечного сечения, и давления ветра на непроницаемое препятствие приняты величины соответственно

$$\nu_0 = \rho U^3/2, \quad p_0 = \rho U^2/2, \tag{2}$$

где ρ – плотность воздуха [1, 2].

Если некоторая ветротурбина с площадью ветровой тени S_0 при скорости ветра U развивает мощность N при силе давления ветра P, то ее технический уровень принято оценивать относительными величинами

$$C_N = N/\nu_0 S_0, \quad C_P = P/p_0 S_0, \tag{3}$$

именуемыми, соответственно, коэффициентом мощности и коэффициентом давления этой турбины [2].

Допустим, что лопасти проектируемой турбины заметают кольцо $r \in [\beta R, R]$ площадью $S_0 = \pi R^2(1-\beta^2)$ и пусть

$$dS_0 = 2\pi r dr \tag{4}$$

некоторый кольцевой элемент этой площади, ν – локальная плотность мощности энергии ветра, конвертируемой на этом элементе, p – соответствующее локальное давление ветра,

$$C_\nu = \nu / \nu_0, \quad C_P = p / p_0 \tag{5}$$

локальные значения названных коэффициентов, которые, в общем случае, являются функциями параметров динамического взаимодействия воздушного потока и решетки лопастей турбины в точке r ее радиуса вращения. Если эти функции определены, то интегралами

$$N = \frac{\rho U^3}{2} \int_{S_0} C_\nu dS_0, \quad P = \frac{\rho U^2}{2} \int_{S_0} C_p dS_0 \tag{6}$$

будут определяться мощность турбины и соответствующая сила ветрового давления, а проблема создания обсуждаемой турбины сводится к поиску и к практической реализации решения следующей задачи динамического программирования:

$$\tilde{\mathrm{N}} = \int_{U_0}^{U^*} \Phi(U) N(U) dU \to \max, \tag{7}$$

при условии, что при $U \le U^*$

$$P(U) \le [P_{\mathrm{T}}] \tag{8}$$

и что для работы турбины стартовой является такая скорость ветра U_0, при которой развиваемый турбиной крутящий момент

$$M(U) \ge M(U_0) = M_0. \tag{9}$$

Лопастью турбины выберем наиболее совершенный известный тонкий крыловой профиль с известными геометрическими характеристиками его поперечного сечения, аэродинамические свойства которого определены экспериментально установленной зависимостью вида

$$\vec{F} = \vec{f} \frac{\rho W^2}{2} S, \tag{10}$$

где $\vec{F}$ – сила, с которой на этот профиль действует нормально набегающий на его переднюю кромку с относительной скоростью $\vec{W}$ воздушный поток; $S = h \times L$ – площадь крыла; h – его хорда; L – его длина $(L >> h)$; $\vec{f}$ – нормированная аэродинамическая сила, определяемая в лабораторном базисе профиля $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в функции угла атаки α, образуемого хордой с вектором $\vec{W}$. При этом считается, что

$$\vec{e}_1 = \vec{W} / W, \tag{11}$$

$$\vec{f}(\alpha) = \vec{e}_1 f_1(\alpha) + \vec{e}_2 f_2(\alpha), \tag{12}$$

что начало базиса O совмещено с фокусом профиля и что ортом $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ задается фокальная ось профиля [3].

Функции

$$\begin{cases} f_1 = f_1(\alpha) \\ f_2 = f_2(\alpha) \end{cases}$$

называют соответственно коэффициентом лобового сопротивления и коэффициентом подъемной силы данного профиля при угле атаки α , а отношение

$$K(\alpha) = f_2(\alpha) / f_1(\alpha) \tag{13}$$

соответствующим коэффициентом аэродинамического качества профиля.

Угол

$$\theta(\alpha) = arc\ ctgK(\alpha), \tag{14}$$

характеризующий отклонение силы $\vec{F}$ от нормали к скорости $\vec{W}$, называют углом аэродинамического качества [3].

Подлежащими установлению геометрическими характеристиками формы лопасти принимаем контурную функцию

$$h = h(r), \tag{15}$$

задающую радиальное распределение длины хорды h , и функцию крутки лопасти

$$\varphi = \varphi(r, U), \tag{16}$$

определяющую радиальное распределение установочного угла φ, образуемого хордой профиля со срединной плоскостью турбины при данной скорости ветра U.

Пусть $dS_1 = h(r)dr$ – площадь опорной поверхности элемента отдельной лопасти в кольцевом элементе dS_0 ветровой тени турбины, n – количество ее лопастей,

$$dS = nh(r)dr \tag{17}$$

– их суммарная площадь;

$$\lambda = dS/dS_0 = nh(r) / 2\pi r, \tag{18}$$

– относительная величина, называемая локальной геометрической плотностью турбины в точке r ее радиуса вращения.

Для получения искомых соотношений распространим зависимость (10) на выделенный элемент лопасти, определив действующую на него аэродинамическую силу величиной

$$d\vec{F}_1 = \vec{f}\,\frac{\rho W^2}{2} dS_1 . \tag{19}$$

При этом предполагаем, что взаимодействие с воздушным потоком выделенного кольцевого элемента турбины и расположенных здесь элементов лопастей удовлетворяют положениям общих теорем динамики систем и положениям теоремы Жуковского о подъемной силе аэродинамического профиля в решетке [1]. Этой теоремой, в частности, утверждается, что формула (10) провомерна для отдельного профиля решетки, если принять, что

$$\vec{W} = \vec{U}' - \vec{V}; \tag{20}$$

$$\vec{U}' = \frac{1}{2}\left(\vec{U} + \vec{U}''\right); \tag{21}$$

$$\vec{U}'' = \vec{U} - c\vec{f}, \tag{22}$$

где $\vec{U}$ – скорость набегающего невозмущенного воздушного потока; $\vec{U}'$ – скорость прохождения потока через срединную плоскость решетки; $\vec{U}''$ – скорость отработанного потока; $\vec{V}$ – скорость профиля; c – некоторый скалярный множитель.

Кроме того, считаем, что:

– фокальные оси всех лопастей расположены в срединной плоскости турбины, радиально ориентированы и пересекаются в центре вращения C, а радиусом-вектором вращения фокуса O данного элемента лопасти является вектор

$$\vec{r} = \overrightarrow{CO} = -r\vec{e}_3; \tag{23}$$

– нормаль срединной плоскости турбины и вектор ее угловой скорости $\vec{\omega}$ однонаправлены с вектором $\vec{U}$, а скорость элемента лопасти

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{24}$$

перпендикулярна векторам $\vec{U}$ и $\vec{r}$.

Тогда, вводя единичные векторы

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}' = -\vec{V}/V = \vec{e}_1 \cos\gamma - \vec{e}_2 \sin\gamma \\ \vec{e}_2{}' = \vec{U}/U = \vec{e}_1 \sin\gamma + \vec{e}_2 \cos\gamma \\ \vec{e}_3{}' = \vec{e}_3 = -\vec{r}/\vec{r} \end{cases} \tag{25}$$

в фокусе O профиля введем рабочий базис-элемент лопасти $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$, ориентация которого относительно лабораторного базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ однозначно определяется углом поворота γ.

Дополнительно введем следующие понятия и обозначения:

$$Y = \frac{\omega R}{U}, \quad y = \frac{\omega r}{U} = \frac{V}{U} \in [\beta Y, Y] \tag{26}$$

– соответственно коэффициенты быстроходности турбины и выделенного элемента лопасти;

$$U_2' = \vec{U}'\, \vec{e}_2', \quad U_2'' = \vec{U}''\, \vec{e}_2' \tag{27}$$

– проекции скоростей $\vec{U}'$ и $\vec{U}''$ на ось турбины, которые будем называть соответствующими скоростями поступательного движения воздушного потока;

$$\sigma = U''/U \tag{28}$$

– коэффициент, характеризующий относительно скорость поступательного движения отработанного воздушного потока.

Используя эти величины и проектируя векторные равенства (20)-(22) на оси лабораторного базиса, можно найти, что

$$cf = \frac{1+\sigma}{2}U; \tag{29}$$

$$2W \sin\gamma = (1+\sigma)U; \tag{30}$$

$$tg(\gamma-\theta)=\frac{1+\sigma-2\dfrac{y}{K}}{y+\dfrac{1}{K}+\sqrt{y^2+1-\sigma^2+2\sigma y+\dfrac{1}{K^2}}}, \tag{31}$$

где K и θ определены зависимостями (13) и (14). При этом можно установить, что

$$\varphi=\gamma-\alpha. \tag{32}$$

Суммированием проекций элементарных сил (19) на ось турбины находим силу давления ветра на выделенный кольцевой элемент турбины

$$dP=nd\vec{F}_1\;\vec{e}_2'=\lambda f\,\frac{\rho W^2}{2}\cos(\gamma-\theta)dS_0. \tag{33}$$

Эту же элементарную силу находим применением теоремы об изменении количества поступательного движения воздушного потока на выделенном кольцевом элементе турбины. Для этого учтем, что скорость поступательного движения через плоскость турбины равна U_2', что после прохождения через эту плоскость поток изменяет свою скорость на конечную величину

$$u_2''=\left(\vec{U}-\vec{U}''\right)\vec{e}_2'=(1-\sigma)U$$

и что за время dt через площадь dS_0 проходит элементарная масса воздуха

$$d^2m=\rho U_2'\;dt\;dS_0. \tag{34}$$

Поэтому можно записать, что

$$dP=d\left(u_2''\,\frac{dm}{dt}\right)=\frac{\rho U^2}{2}\left(1-\sigma^2\right)dS_0. \tag{35}$$

Из соотношений (2), (5), (30), (31), (33) и (35) можно найти, что

$$\lambda f=\frac{4\sin^2\gamma}{\cos(\gamma-\theta)}\frac{1-\sigma}{1+\sigma}; \tag{36}$$

$$C_P=1-\sigma^2. \tag{37}$$

Элементарную мощность, развиваемую элементами лопастей, определим значением

$$dN=nd\vec{F}\vec{V}=\frac{\rho W^2}{2}\lambda\vec{f}\,\vec{V}\;dS_0, \tag{38}$$

откуда найдем значение локальной плотности мощности конвертируемой данным элементом турбины

$$\nu=\frac{dN}{dS_0}=\frac{\rho U^3}{2}C_\nu, \tag{39}$$

где

$$C_v = \frac{\left(1-\sigma^2\right)\left(1+\sigma-2\frac{y}{\mathrm{K}}\right)}{1+\frac{1}{yK}+\sqrt{1+\frac{1-\sigma^2}{y^2}+2\frac{\sigma}{yK}+\frac{1}{y^2K^2}}} \tag{40}$$

– значение локального коэффициента мощности.

Теперь для вычисления интегралов (6) необходимо произвести соответствующую замену переменных. Используя зависимости (26), находим, что

$$\omega = \frac{Y}{R}U, \quad r = \frac{R}{Y}y, \quad dr = \frac{R}{Y}dy, \quad y \in [\beta Y, Y];$$

$$dS_0 = 2\pi r dr = 2\pi\left(\frac{R}{Y}\right)^2 y\, dy$$

и что

$$N = \pi\rho U^3\left(\frac{R}{Y}\right)^2 \int_{\beta Y}^{Y} C_v y\, dy, \quad P = \pi\rho\left(\frac{UR}{Y}\right)^2 \int_{\beta Y}^{Y} C_P y\, dy. \tag{41}$$

При этом соотношению (9) можно придать вид

$$M(U) \geq M(U_0) = \frac{N(U_0)}{\omega_0} = \pi\rho U_0^2\left(\frac{R}{Y}\right)^3 \int_{\beta Y}^{Y} C_v y\, dy = M_0. \tag{42}$$

Таким образом, определены все зависимости, необходимые для общей формулировки задачи динамического программирования (7)–(9). Для ее конкретной постановки остается задать функции (1), (12) и значения $M_0, [P_{\mathrm{T}}]$. Искомым решением будут определяться значения β, R и функции $h(r), \omega(U)$ и $\varphi(r,U)$, обеспечивающие максимальный уровень конверсии энергии в данной местности данной турбиной при данных наложенных ограничениях.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.
2. Твайделл Дж., Уэйр А. Возобновляемые источники энергии. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. Нашукевич А.В. Аэродинамика самолета /А.В. Нашукевич, Ф.А. Неволин, Б.А. Немировский. – М.: Воениздат, 1966.

Получено 07.07.2004 г.