

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЕРЕДНЕЙ ГРАНИ РЕЗЦА

О.Н. Шабловский

*Гомельский политехнический институт им. П.О. Сухого, Беларусь*

**1. Уравнения релаксационного теплопереноса. Новое точное решение.** Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения энергии [1]:

$$\mathbf{q} + \gamma \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = q_v. \quad (1)$$

В одномерном случае эта система записывается в форме

$$q + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_v, \quad (2)$$

где  $x$  - декартова координата;  $t$  - время;  $T$  - температура;  $\mathbf{q}$  - вектор удельного теплового потока;  $c$  - удельная объемная теплоемкость;  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности;  $\gamma$  - время релаксации теплового потока;  $q_v$  - мощность внутренних источников тепла.

Возьмем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 (T - T_\infty)^n, \quad c \equiv \text{const}, \quad \gamma \equiv \text{const}, \quad q_v = Q_0 (T - T_\infty), \\ T - T_\infty &= \tau^H \theta(x, \tau), \quad q = k \tau^n v(x, \tau), \quad \tau = \exp(-kt), \\ \gamma k n &= 1, \quad Q_0 = -H k c_0, \quad H + 1 = n, \quad U = c \theta, \quad a_0 = \lambda_0 / c^{1+n} \end{aligned}$$

В этом случае, действуя аналогично [2-4], можно преобразовать (2) к нелинейному волновому уравнению, трансформировать его в уравнение Монжа-Ампера и получить новое точное решение уравнений теплопереноса:

$$x = \zeta'(\omega) + \tau^{-1} f(\omega), \quad \omega = U / \tau, \quad (3)$$

$$v = \omega \zeta'(\omega) - \zeta(\omega) + \tau^{-1} \omega f(\omega), \quad (4)$$

$$q = k v \exp(-t / \gamma), \quad n = -2 / n_1, \quad f_1^2 = a_0 / (k^2 \gamma),$$

$$f(\omega) = f_1 \omega^{-1/n}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Здесь  $\zeta = \zeta(\omega)$  - произвольная функция одного аргумента. Линия  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  есть непрерывная тепловая волна, распространяющаяся по релаксирующему фону:

$$cT_0 = \omega_0 \tau^n, \quad q_0 = k \tau^n [\omega_0 x - \zeta(\omega_0)], \quad x \in [x_0^0, x_1].$$

Найденные зависимости (3), (4) дополняют класс решений [3, 4] уравнений теплопереноса без источников энергии. Решения этого типа позволили изучить задачи теплопереноса с бегущими и ударными тепловыми волнами [3, 5] в нелинейных средах; была решена релаксационная задача Стефана [4], а также были проанализированы гистерезисные нелинейности в непрерывном и разрывном тепловых полях [6]. Некоторые новые результаты по проблеме теплопереноса в локально-неравновесных условиях представлены в [7, 8].

**2. Модель теплового поля реза.** Обсудим возможность применения модели (2) и, в частности, решения (3), (4) к проблеме теплового поля режущего инструмента при обработке металлов. В книге [9] содержатся результаты опытов с резцом для двух вариантов: 1) сравнение методов естественной и искусственной термопар; 2) тепловое поле передней грани реза. Теоретическое истолкование первого варианта выполнено в [10] применительно к явлению локализации тепла; анализ основывался на одном частном решении уравнения теплопроводности параболического и гиперболического типов. Здесь мы рассматриваем вторую - основную - серию опытов из [9], полученных для передней грани реза из быстрорежущей стали P18. На рис.1 (см. [9], с.112) показано расположение отверстий для термопар. Обработывалась сталь 3140. Режим резания: глубина 2 мм, подача 0,54 мм, скорость резания 38 м/мин. Все опыты велись с затуплением инструмента. Наибольший интерес представляет распределение температуры вдоль линии IV (точки 1, 5, 9), поскольку из всех изучавшихся точек самую высокую температуру имеет точка 1, находящаяся под центром лунки. Результаты опытов представляют значения температуры в отмеченных точках в зависимости от продолжительности резания от одной до 20 минут. Для линии IV эти данные приведены в таблице.

#### Экспериментальные значения температуры на линии IV

Время, мин	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T_1, C$	190	200	202	207	211	220	220	225	230	230	230	235
$T_5, C$	93	106	115	121	126	130	132	135	135	137	139	141
$T_9, C$	63	70	78	82	88	91	93	95	95	99	100	104

Точность экспериментов А.М. Даниеляна [9], с современной точки зрения, невысокая. Предлагаемая здесь теплофизическая интерпретация этих опытов демонстрирует принципиальную возможность обработки экспериментальных данных по тепловому полю режущего инструмента на основе решения (3), (4).

Прежде всего нужно отметить, что температурное поле резца является трехмерным:  $T = T(t; x, y, z)$ . Для изучения температуры вдоль линии IV в рамках квазиодномерного приближения поступим следующим образом. Ось абсцисс декартовой системы координат  $OXYZ$  совместим с линией IV и направим ее от режущей кромки вглубь резца: изучаемые точки имеют координаты  $x^{(1)} = 2$  мм,  $x^{(5)} = 9$  мм,  $x^{(9)} = 16$  мм. В уравнениях теплопереноса (2) положим  $c = c(T)$ ,  $\lambda = \lambda(T)$ . Параметр  $\gamma = \gamma(x, y, z)$  считаем функцией координат; его физический смысл в обсуждаемой здесь квазиодномерной модели будет ясен из дальнейших построений. Записав эти уравнения при  $y = 0$ ,  $z = 0$ , получим

$$\begin{aligned} c \frac{\partial T(t; x, 0, 0)}{\partial t} + \frac{\partial q_1(t; x, 0, 0)}{\partial x} &= q_v, \quad q_1(t; x, 0, 0) \equiv q(x, t) \quad (5) \\ q_v &= -\left[ (\partial q_2 / \partial y) + (\partial q_3 / \partial z) \right]_{y=0, z=0}, \\ q_1 &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \gamma(x, 0, 0) \frac{\partial q_1(t, x, 0, 0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Таким образом, вдоль линии IV влияние пространственности поля моделируем объемным источником. Другими словами,  $q_v, \gamma$  выступают параметрами согласования квазиодномерной теории и результатов эксперимента. Далее примем в (5)  $\gamma, c = const$ ,  $q_v = q_v(T)$ ,  $\lambda = \lambda(T)$  и воспользуемся точным решением в форме (3), (4), взяв  $T - T_\infty = T'$ ,  $C$  и применяя при обработке экспериментов температурную шкалу Цельсия; окончательные результаты расчетов даны по шкале Кельвина. Коэффициент теплопроводности стали P18, закаленной с 1513 К [11] представим в виде  $\lambda = \lambda_0 (T - 273)^{n_1}$  Вт / м · град,  $\lambda_0 = 11,8583$ ,  $n_1 = 0,12663$ ; удельная объемная теплоемкость равна  $c = 34,4 \cdot 10^5$  Дж/м<sup>3</sup>град. Момент времени  $t = 60$  с возьмем за исходный,  $t' = t - 60$ . Применяя результаты измерений [9], построим функцию  $x = x_0(u) \equiv x_0(\omega)$ , приближенно характеризующую распределение температуры вдоль линии IV спустя 60 с после начала резания (для  $t \in [0, 60]$  опытные данные отсутствуют). Это дает возможность найти произвольную функцию  $\zeta(\omega)$ , входящую в решение (3), (4):

$$\begin{aligned} \zeta'(\omega) &= x_0(\omega) - f_1 \omega^{n_1/2}, \quad \omega = u \cdot \exp(t' / \gamma), \quad u = c(T - 273), \\ x_0(\omega) &= 1449,92(\bar{\omega}^{3,3} + 35,89\bar{\omega})^{-1} + \\ &+ 10\omega^{-3}(\omega - \omega_0^{(1)})(\omega - \omega_0^{(5)})(\omega - \omega_0^{(9)}) \exp\left[-0,6(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0^{(1)})\right], \quad \omega = \bar{\omega} \cdot 10^5 \end{aligned}$$

причем координата отсчитывается в мм. Итак, распределение температуры в теле вдоль выбранной линии определяется зависимостью

$$x = x_0(\omega) + f_1 u^{n_1/2} \left[ 1 - \exp\left(\frac{n_1 t'}{2\gamma}\right) \right], \quad f_1 n_1 = -2(a_0 \gamma)^{\frac{1}{2}}, \quad a_0 = \lambda_0 / c^{1+n_1}. \quad (6)$$

В случае  $n_1 > 0$  формулу (6) нужно применять на конечном промежутке времени  $[0, t_1]$ . Из таблицы видно, что после 5-6 минут резания тепловой процесс близок к квазистационарному. Действительно, это отражено в структуре решения: при достаточно большом  $\gamma \gg t_1$  слагаемое  $x_0(\omega)$  в (6) характеризует квазистационарное распределение температуры, а второе слагаемое можно записать в виде

$$\Delta x \equiv x - x_0 = \frac{2}{n_1} \left[ \lambda_0 T^{n_1} \gamma / c \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \exp(n_1 t' / 2\gamma) - 1 \right], \quad t' \in [0, t_1], \quad n_1 > 0. \quad (7)$$

Приближенный вариант последней формулы дает наглядное физическое истолкование параметра  $\gamma$ :

$$\Delta x \cong w(T)t', \quad t_1 \ll \gamma, \quad w^2(T) = \lambda_0 T^{n_1} / (c\gamma). \quad (8)$$

Значит, здесь  $w(T)$  - скорость перемещения изотермы  $T = T_i = const$ . Если в (7) взять  $\gamma = 4,866 \cdot 10^6$  с, то (6), (7) описывает экспериментальные данные по температурному полю вблизи точки 1 в течение 7 мин резания; к исходу седьмой минуты относительная погрешность расчета координаты  $x^{(1)}$  по формуле (6) не превосходит 4%, а для первых четырех минут она меньше 2%. Расчеты изотерм ТК = 473; 573; 673; 843 по этим формулам показаны на рис.2. Отсюда, в частности, видно, что первоначальная температура режущей кромки в точке на линии IV равна 843 К.

**Выводы:** 1) скорости перемещения изотерм вдоль линии IV различны и приближенно постоянны; 2) формула (6) говорит о том, что если в изучаемой пространственной и температурной области функция  $x_0(\omega)$  ограничена,  $|x_0(\omega)| \leq M < \infty$ , а коэффициент теплопроводности - убывающая функция температуры, т.е.  $n_1 < 0$ , то с течением времени  $t \geq 0$  реализуется эффект локализации тепловых возмущений. В частности, это справедливо для одной из модификаций стали P18 при температуре свыше 700°K, где  $d\lambda / dT < 0$ , [11]. Всестороннее исследование явления локализации тепла на основе нелинейной параболической модели дано в [12]. 3) Если некоторая изотерма  $T = T_i$  определена экспериментально,  $x_i = A + w(T_i)t$ , то, зная наклон этой прямой к оси  $t$ , легко вычислим параметр  $\gamma$ ; после этого по формулам (8) найдем скорость перемещения других изотерм.

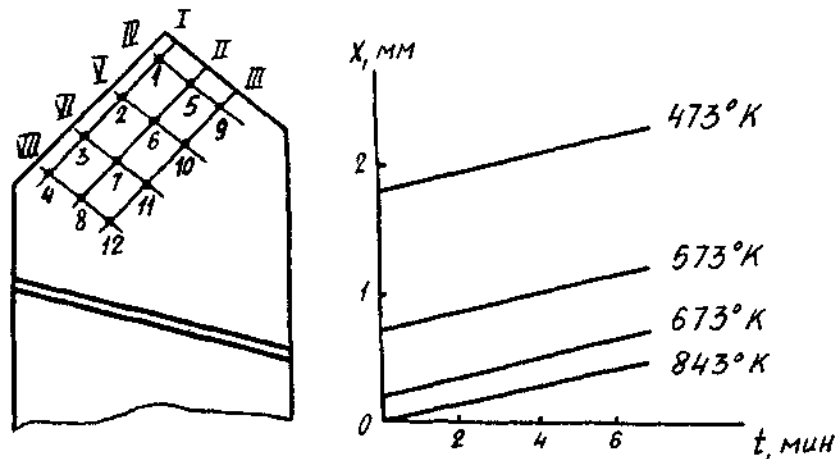


Рис. 1

#### Литература

- Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. - 600с.
- Шабловский О.Н. К исследованию нелинейных задач высокоинтенсивного нестационарного теплопереноса //ИФЖ. 1987.- Т.52. -№2.- С. 309-316.
- Шабловский О.Н. Исследование сильных разрывов релаксирующих тепловых полей в нелинейных средах //Тепломассообмен - Минск. Междунар. Форум, 1988. - Т.8. - С. 72-74.
- Шабловский О.Н. О нелинейных задачах плавления и испарения материалов под действием интенсивных потоков энергии с учетом тепловой релаксации //ИФЖ. 1988. - Т.55. - № 3. - С. 464-471.
- Шабловский О.Н. Нелинейные волновые задачи релаксационного теплопереноса //Газовая динамика. Томск,1991. - С. 91-98.
- Шабловский О.Н. О тепловом гистерезисе в нелинейных средах //ИФЖ. 1990.- Т.59.- № 1.- С.149-155.
- Шабловский О.Н. Колебания и бифуркации релаксирующих тепловых потоков в нелинейных средах //ИФЖ. 1997. - Т.70. - № 1. - С. 123-129.
- Шабловский О.Н. Законы сохранения и ударные волны в теории релаксационного теплопереноса //ИФЖ. 1997. - Т.70. -№ 2. - С. 318-325.
- Даниелян А.М. Износ инструмента и тепловые явления при резании металлов. М.: Машгиз,1946. - 232 с.
- Бубнов В.А. Эффект локализации тепла и его экспериментальное обоснование //Теплофизика высоких температур. - 1990. - Т.28. - № 5. - С.934-939.
- Теплопроводность твердых тел. : Справочник /Под ред. А.С. Охотина. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 320 с.
- Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. - М.: Наука, 1987. - 480 с.