



Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П.О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

# **НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

**ПРАКТИКУМ**

**по курсу «Теоретические основы электротехники»  
для студентов специальности 1-36 04 02  
«Промышленная электроника»  
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2006

УДК 621.3.011.72(075.8)  
ББК 31.2я73  
Н49

*Рекомендовано научно-методическим советом  
факультета автоматизированных и информационных систем  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 3 от 14.02.2005 г.)*

Автор-составитель: *Л. Г. Бычкова*

Рецензент: ст. преп. каф. «Промышленная электроника»  
ГГТУ им. П. О. Сухого *Ю. А. Козусев*

**Нелинейные** цепи переменного тока : практикум по курсу «Теоретические основы электротехники» для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения / авт.-сост. Л. Г. Бычкова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2006. – 42 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://gstu.local/lib>. – Загол. с титул. экрана.

В форме конкретных примеров излагаются методы и приемы расчета нелинейных цепей переменного тока в установившемся режиме. Рассмотрены способы аппроксимации нелинейных характеристик, аналитические, графо-аналитические и численные методы расчета нелинейных цепей для мгновенных и действующих значений переменных.

Для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.3.011.72(075.8)  
ББК 31.2я73

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого», 2006

# 1. Аналитическая аппроксимация характеристик нелинейных элементов электрических цепей

При аналитическом или численном методах расчета нелинейных электрических цепей как в установившемся, так и в переходном режимах, используется аналитическая аппроксимация характеристик нелинейных элементов этих цепей.

Аппроксимация заключается в определении тем или иным способом аналитической зависимости (формулы) между электрическими переменными, описывающими данный элемент, приближенно, но с заданной степенью точности, изображающей реальную (экспериментальную) характеристику элемента, заданную графически или таблично.

В мгновенных значениях переменных аппроксимируются: вольт-амперная характеристика (ВАХ) активного нелинейного сопротивления  $u(i)$ , вебер-амперная характеристика (ВБАХ) нелинейной индуктивности  $\psi(i)$  и кулон-вольтная характеристика (КВХ) нелинейной емкости  $q(u)$ .

В действующих или амплитудных значениях переменных аппроксимируется вольт-амперная характеристика  $U(I)$  или  $U_m(I_m)$  для всех нелинейных элементов.

Следует иметь в виду, что далеко не всегда при помощи одной аналитической функции с достаточной точностью удается описать всю заданную характеристику. В этом случае применяют кусочно-аналитическое описание нелинейной характеристики. Наиболее грубо аппроксимация нелинейной характеристики выполняется кусочно-линейными функциями, более точно – совокупностью отрезков квадратичных или кубических парабол [1, стр. 402].

В качестве аппроксимирующих аналитических зависимостей используют обычно элементарные математические функции: полином, тригонометрическая или гиперболическая функция и т.п.

Основными методами определения коэффициентов аппроксимирующих аналитических выражений являются методы выбранных точек и наименьших квадратов.

## 1.1. Метод выбранных точек

По этому методу коэффициенты функции аппроксимации вычисляются из условия точного совпадения аппроксимирующей (приближенной) и аппроксимируемой (точной) характеристик в заранее заданных (выбранных) точках.

Выбор соответствующих точек производится таким образом, чтобы все точки лежали в рабочей области и охватывали основные особенности аппроксимирующей кривой. Если, например, нужно выбрать две точки

(функция имеет два коэффициента), то целесообразно, чтобы одна находилась в области максимально ожидаемого аргумента, а другая – в области наибольшего изгиба кривой.

### Пример 1.1

Аппроксимировать кубическим полиномом вольт-амперную характеристику (ВАХ) нелинейного резистора, симметричную относительно начала координат (рис. 1.1, сплошная кривая в первом квадранте) так, чтобы совпадение зависимостей имело место в точках **A** и **B**. Движение рабочей точки по характеристике происходит симметрично относительно начала координат.

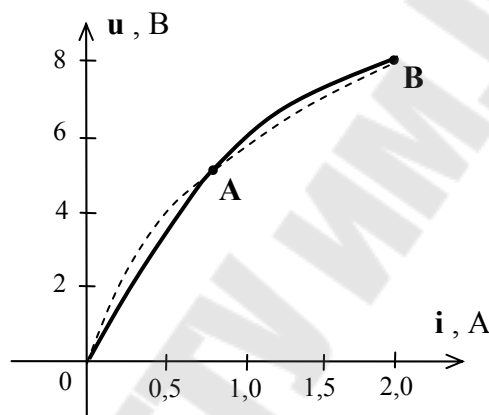


Рис. 1.1

### Решение

При заданных условиях аппроксимирующий полином не содержит четных степеней  $i = a_1 u + a_3 u^3$ .

Найдем на реальной ВАХ координаты заданных точек **A** ( $i_1 = 0,75$  А,  $u_1 = 5$  В) и **B** ( $i_2 = 2$  А,  $u_2 = 8$  В). По условию совпадения кривых составим систему уравнений для определения коэффициентов **a** и **b** аппроксимирующей функции

$$\begin{cases} i_1 = a_1 u_1 + a_3 u_1^3 \\ i_2 = a_1 u_2 + a_3 u_2^3 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, найдем

$$a_1 = \frac{u_1^3 i_2 - u_2^3 i_1}{u_1^3 u_2 - u_1 u_2^3} = \frac{5^3 \cdot 2 - 8^3 \cdot 0,75}{5^3 \cdot 8 - 5 \cdot 8^3} = 0,0859, \text{ A/V},$$

$$a_3 = \frac{u_2 i_1 - u_1 i_2}{u_1^3 u_2 - u_1 u_2^3} = \frac{8 \cdot 0,75 - 5 \cdot 2}{5^3 \cdot 8 - 5 \cdot 8^3} = 0,00256, \text{ A/B}^3.$$

Получили требуемый аппроксимирующий полином в виде

$$i = 0,0859 u + 0,00256 u^3.$$

Построив его график (штриховая кривая на рис. 1.1), убедимся, что условие совпадения в т. **A** и **B** выполнено.

Отметим, что полученную зависимость точнее будет называть ампер-вольтной (АВХ), а не вольт-амперной (ВАХ) характеристикой.

### Пример 1.2

Аппроксимировать полиномом вебер-амперную характеристику нелинейной индуктивности для мгновенных значений переменных (сплошная кривая на рис. 1.2).

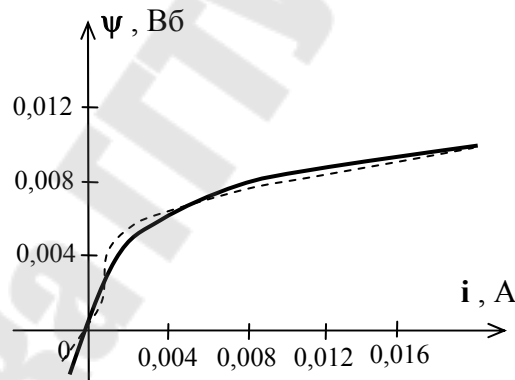


Рис. 1.2

### Решение

Вебер-амперная характеристика (ВбАХ), подобно кривой намагничивания, располагается в первом и третьем квадрантах и симметрична относительно начала координат, то есть она является нечетной функцией, и поэтому будем аппроксимировать ее полиномом с нечетными показателями степеней. Поскольку ВбАХ имеет выпуклость вдоль оси ординат, то в качестве независимой переменной в аппроксимирующем полиноме выберем переменную  $\psi$ .

Если ограничиваться тремя членами, то функция аппроксимации примет вид

$$i = a_1 \psi + a_3 \psi^3 + a_5 \psi^5.$$

Выберем точки совпадения с координатами: **A** (0,003; 0,0015), **B** (0,006; 0,004), **C** (0,009; 0,018). Тогда получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_5$ .

$$\begin{cases} 0,0015 = a_1 \cdot 0,003 + a_3 \cdot 0,003^3 + a_5 \cdot 0,003^5 \\ 0,004 = a_1 \cdot 0,006 + a_3 \cdot 0,006^3 + a_5 \cdot 0,006^5 \\ 0,018 = a_1 \cdot 0,009 + a_3 \cdot 0,009^3 + a_5 \cdot 0,009^5 \end{cases}$$

Решая эту систему, например по методу Крамера, найдем  $a_1 = 0,55 \text{ А/Вб}$ ,  $a_3 = -9,09 \cdot 10^3 \text{ А/Вб}^3$ ,  $a_5 = 3,4 \cdot 10^8 \text{ А/Вб}^5$ .

Значит, заданная вебер-амперная характеристика может быть аппроксимирована полиномом (штриховая кривая на рис. 1.2) вида

$$i = 0,55 \psi - 9090 \psi^3 + 3,4 \cdot 10^8 \psi^5.$$

### Пример 1.3

Аппроксимировать гиперболическим синусом кулон-вольтную характеристику нелинейной емкости для мгновенных значений переменных (сплошная кривая на рис.1.3). Характеристика симметрична относительно начала координат и представлена на рис.1.3 одним квадрантом.

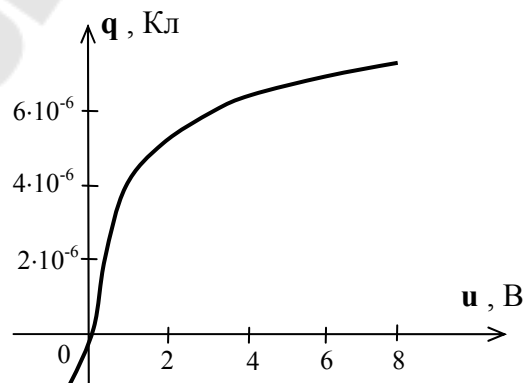


Рис. 1.3

### Решение

Поскольку кривая нечетная, и имеет выпуклость вдоль оси  $q$ , то переменную  $q$  примем за независимую, и аппроксимирующую функцию будем искать в виде

$$u = U_0 \operatorname{sh} \frac{q}{Q_0}.$$

Пусть точки совпадения **A** и **B** имеют координаты  $(4 \cdot 10^{-6}; 1)$  и  $(7 \cdot 10^{-6}; 6)$ . Тогда для определения размерных коэффициентов  $U_0$  и  $Q_0$  получим систему трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} 1 = U_0 \operatorname{sh} \frac{4 \cdot 10^{-6}}{Q_0} \\ 6 = U_0 \operatorname{sh} \frac{7 \cdot 10^{-6}}{Q_0} \end{cases}.$$

Поделим второе уравнение на первое и получим уравнение относительно  $Q_0$  вида

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{7 \cdot 10^{-6}}{Q_0}}{\operatorname{sh} \frac{4 \cdot 10^{-6}}{Q_0}} - 6 = 0,$$

которое решим, например, графически, и определим  $Q_0 = 1,7 \cdot 10^{-6}$  Кл. Подстановкой найденного значения  $Q_0$  в первое уравнение, вычислим  $U_0 = 0,186$  В.

Таким образом, аппроксимирующая функция будет иметь вид (штриховая кривая на рис.1.3)

$$u = 0,17 \operatorname{sh} \frac{q}{1,7 \cdot 10^{-6}}, \text{ В.}$$

Более точное решение можно получить с помощью ЭВМ.





*Решение*

1. Составим таблицу контрольных значений  $q_i(u_i)$  в предполагаемом рабочем интервале  $\Delta u$ . Если, допустим, амплитуда входного напряжения  $E_m = 8$  В, то можно выбрать  $\Delta u = 10 - (-10) = 20$  В. Задаем шаг изменения  $u_i = h = 2$  В, тогда количество расчетных точек  $N = \frac{\Delta u_i}{h} = 10$ . Следует иметь в виду, что значения  $u_i$  заданы точно, а соответствующие им значения  $q_i$  - приближенно по графику  $q(u)$ .

Таблица 1.1

$u_i, \text{В}$	-10	-8	-6	-4	-2	2	4	6	8	10
$q \cdot 10^{-5}, \text{Кл}$	-0,54	-0,51	-0,45	-0,34	-0,17	0,17	0,34	0,45	0,51	0,54

Так как при  $u_i = 0$   $q_i = 0$ , то эта точка в таблицу не включена. Кроме того, из этого следует, что  $a_0 = 0$ .

2. Составим систему уравнений вида (1.1), учитывая, что  $a_0 = 0$ ,  $n = 5$ ,  $m = 3$ ,  $N = 2n$

$$\begin{aligned} b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + b_{13}a_3 &= c_1, \\ b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + b_{23}a_3 &= c_2, \\ b_{31}a_1 + b_{32}a_2 + b_{33}a_3 &= c_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Результаты расчета сумм  $\sum u_i^k$  представлены в таблице 1.2. Так как  $q_i(u_i) = -q_i(-u_i)$ , то в таблице расчет выполнен только для положительных  $u_i$ . При суммировании  $u_i^k$ , если  $k$  нечетное  $\sum_1^n u_i^k = 0$ , если четное, то

$$\sum_1^n u_i^k = 2 \sum_1^{n/2} u_i^k. \text{ В таблице даны суммы только для четных } k.$$

Таблица 1.2

N	$u_i^1$	$u_i^2$	$u_i^3$	$u_i^4$	$u_i^6$	$q_i \cdot 10^{-5}$	$u_i q_i \cdot 10^{-5}$	$u_i^3 q_i \cdot 10^{-5}$
1	2	4	8	16	64	0,17	0,34	1,36
2	4	16	64	256	4096	0,34	1,36	21,76
3	6	32	216	1024	32768	0,45	2,7	97,2
4	8	64	284	4096	262144	0,51	4,08	145
5	10	100	$10^3$	$10^4$	$10^6$	0,54	5,4	540
2Σ	0	432	0	30784	0	0	27,76	1610

Рассчитываем теперь коэффициенты  $\mathbf{b}_{kl}$  и  $\mathbf{C}_k$  по формулам (1.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{11} &= \sum \mathbf{u}_i^2 = 432, \\ \mathbf{b}_{12} &= \mathbf{b}_{21} = \sum \mathbf{u}_i^3 = 0, \\ \mathbf{b}_{13} &= \mathbf{b}_{31} = \sum \mathbf{u}_i^4 = 30784, \\ \mathbf{b}_{22} &= \sum \mathbf{u}_i^4 = 30784, \\ \mathbf{b}_{33} &= \sum \mathbf{u}_i^6 = 2,6 \cdot 10^6, \\ \mathbf{b}_{23} &= \mathbf{b}_{32} = \sum \mathbf{u}_i^5 = 0, \\ \mathbf{C}_1 &= \sum \mathbf{q}_i \mathbf{u}_i^1 = 27,76, \\ \mathbf{C}_2 &= \sum \mathbf{q}_i \mathbf{u}_i^2 = 0, \\ \mathbf{C}_3 &= \sum \mathbf{q}_i \mathbf{u}_i^3 = 1610. \end{aligned}$$

После подстановки числовых данных в систему 1.2, получим

$$\begin{cases} 432 \mathbf{a}_1 + 30784 \mathbf{a}_3 = 27,76 \\ 30784 \mathbf{a}_2 = 0 \\ 30784 \mathbf{a}_1 + 2,6 \cdot 10^6 \mathbf{a}_3 = 1610 \end{cases} \quad (1.3)$$

Решение системы (1.3) дает результат

$$\mathbf{a}_1 = 0,105 \text{ Ф}; \quad \mathbf{a}_2 = 0; \quad \mathbf{a}_3 = -0,00051 \text{ Ф} \cdot \text{В}^{-3}.$$

Следовательно, искомый многочлен

$$\mathbf{q}_m(\mathbf{u}) = 0,105 \mathbf{u} - 0,00051 \mathbf{u}^3.$$

Расчет среднеквадратичного отклонения  $\delta$  представлен таблицей 1.3.

Таблица 1.3

$\mathbf{u}_i, \text{В}$	2	4	6	8	10
$\mathbf{q}_i \cdot 10^{-5}, \text{Кл}$	0,17	0,34	0,45	0,51	0,54
$\mathbf{q}_m(\mathbf{i}) \cdot 10^{-5}, \text{Кл}$	0,2	0,384	0,46	0,508	0,52
$[\mathbf{q}_m(\mathbf{i}) - \mathbf{q}_i] \cdot 10^{-5}, \text{Кл}$	0,03	0,041	0,01	0,002	0,02
$[\mathbf{q}_m(\mathbf{i}) - \mathbf{q}_i]^2 \cdot 10^{-10}, \text{Кл}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$16,81 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n}(\mathbf{q}_m(\mathbf{i}) - \mathbf{q}_i)^2} ; \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 34,82 \cdot 10^{-14}} = 2,64 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.}$$

Среднеквадратичная погрешность аппроксимации достигает наибольшего значения при  $u_i = 4$  В. Относительная погрешность в этой точке равна  $\varepsilon_i \% = \frac{0,384 - 0,34}{0,34} \cdot 100\% = 12\%$ .

Аппроксимирующая кривая  $\mathbf{q}_m(\mathbf{u})$  построена на рис. 1.4 пунктиром.

Расчет коэффициентов многочлена можно выполнить с помощью ЭВМ. Соответствующая программа содержится в блоке программ “ТОЭ”, разработанной на кафедре “Теоретические основы электротехники” ГГТУ им. П.О. Сухого. Программа построена в диалоговом режиме. В качестве исходных данных в программу вводятся:

$N$  – количество точек табулированной функции (максимальное количество точек – 15, включая нулевую);

$m$  - степень полинома;

$y_i(x_i)$  - значения табулированной функции  $y_i$  и независимой переменной  $x_i$ .

В результате работы программы на экран выводится таблица значений коэффициентов полинома.

### 1.3. Связь характеристик нелинейных элементов для мгновенных и действующих значений переменных

При расчете установившихся режимов нелинейных электрических цепей, когда требуется знать действующие значения переменных величин, нередко используются вместо характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений (ВАХ, ВбАХ, КВХ) вольт-амперные (ВАХ) и фазо-амперные (ФАХ) характеристик для действующих значений.

В последнем случае расчетные переменные величины в цепях считаются гармоническими функциями времени, равными либо первым гармоникам, либо эквивалентным синусоидам реальных периодических переменных.

Нижеследующие примеры иллюстрируют приемы и способы перехода от характеристик одного вида к другим.

### Пример 1.5

По ампер-вольтной характеристике для мгновенных переменных нелинейного активного сопротивления  $i = 0,0859 u + 0,00256 u^3$  получить ВАХ для действующих величин, пригодную для использования в расчете методом гармонической линеаризации.

#### Решение

Согласно методу гармонической линеаризации, все переменные в нелинейной электрической цепи считаются гармоническими функциями времени основной частоты (высшие гармонические составляющие не учитываются). В связи с этим положим  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  и найдем

$$\begin{aligned} i &= 0,0859 U_m \sin(\omega t + \psi_u) + 0,00256 U_m^3 \sin^3(\omega t + \psi_u) = \\ &= 0,0859 U_m \sin(\omega t + \psi_u) + 0,00256 U_m^3 \left[ \frac{3}{4} \sin(\omega t + \psi_u) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin 3(\omega t + \psi_u) \right] \approx \left( 0,0859 U_m + \frac{3}{4} 0,00256 U_m^3 \right) \times \\ &\quad \times \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \end{aligned}$$

Последнее равенство дает  $\psi_u = \psi_i$  и  $I_m = 0,0859 U_m + \frac{3}{4} 0,00256 U_m^3$ .

Получили ВАХ для амплитудных значений переменных. Если учесть, что  $I_m = \sqrt{2} I$ ,  $U_m = \sqrt{2} U$ , то после подстановки запишем

$$\sqrt{2} I = 0,0859 \cdot \sqrt{2} U + \frac{3}{4} \cdot 0,00256 (\sqrt{2} U)^3.$$

Откуда ВАХ для действующих значений

$$I = 0,0859 U + \frac{3}{2} \cdot 0,00256 U^3,$$

Обобщая полученный результат, можно утверждать, что если аналитическая аппроксимация для мгновенных значений реализована полиномом  $i = a u + b u^3$ , то для действующих значений она будет  $I = a U + 1,5 b U^3$ , а для амплитудных  $I_m = a U_m + 0,75 U_m^3 b$ .

### Пример 1.6

По вебер-амперной характеристике нелинейной индуктивности для мгновенных значений  $i = 0,55 \psi + 9090 \psi^3$  найти ампер-вольтную характеристику этой индуктивности для действующих значений (согласно метода гармонической линеаризации), если основная частота  $\omega = 2\pi \cdot 50, \text{ c}^{-1}$ .

*Решение*

Согласно закона электромагнитной индукции  $u_L = \frac{d\psi}{dt}$  связь между действующими значениями напряжения и потокосцепления будет  $U = \omega \psi$ . Тогда, используя результат предыдущего примера, получим

$$I = a \frac{U}{\omega} + 1,5b \left( \frac{U}{\omega} \right)^3 = \frac{a}{\omega} U + 1,5 \frac{b}{\omega^3} U^3,$$

или в численных значениях

$$I = \frac{0,55}{2\pi \cdot 50} U + 1,5 \frac{9090}{(2\pi \cdot 50)^3} U^3 = 1,75 \cdot 10^{-3} U + 4,39 \cdot 10^{-4} U^3.$$

### Пример 1.7

По кулон-вольтной характеристике нелинейной емкости для мгновенных значений  $u = 10^6 q + 2 \cdot 10^{16} q^3$  найти вольт-амперную характеристику этой емкости для действующих значений (согласно метода эквивалентных синусоид), если основная частота  $\omega = 1000 \text{ c}^{-1}$ .

*Решение*

Ток смещения в емкости  $i = \frac{dq}{dt}$ , поэтому связь между действующими значениями тока и заряда будет  $I = \omega Q$ .

Теперь найдем кулон-вольтную характеристику для действующих значений, используя понятие эквивалентных синусоид как синусоид с равными действующими значениями.

Пока будем КВХ использовать в буквенной записи  $u = a q + b q^3$ .

Пусть  $Q = Q_m \sin(\omega t + \psi_q)$ , тогда

$$\begin{aligned} u &= a Q_m \sin(\omega t + \psi_q) + b Q_m^3 \frac{3}{4} \sin(\omega t + \psi_q) - b Q_m^3 \frac{1}{4} \sin 3(\omega t + \psi_q) = \\ &= \left( a Q_m + \frac{3}{4} b Q_m^3 \right) \sin(\omega t + \psi_q) - \frac{1}{4} b Q_m^3 \sin 3(\omega t + \psi_q). \end{aligned}$$

Последнее равенство дает  $\psi_q = \psi_U$  и

$$U_m = \sqrt{\left( a Q_m + \frac{3}{4} b Q_m^3 \right)^2 + \left( \frac{1}{4} b Q_m^3 \right)^2}.$$

Получили кулон-вольтную характеристику для амплитудных значений переменных. Если учесть, что  $U_m = \sqrt{2} U$ ,  $Q_m = \sqrt{2} Q$ . То для действующих значений найдем

$$U = \sqrt{\left( a Q + \frac{3}{2} b Q^3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} b Q^3 \right)^2}.$$

Подставляя  $Q = \frac{1}{\omega} I$ , запишем вольт-амперную характеристику нелинейной емкости для действующих значений по методу эквивалентных синусоид в виде

$$U = \sqrt{\left( \frac{a}{\omega} I + \frac{3}{2} \frac{b}{\omega^3} I^3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{b}{\omega^3} I^3 \right)^2}.$$

В численных величинах

$$U = \sqrt{\left( \frac{10^6}{10^3} I + \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{10^9} I^3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{16}}{10^9} I^3 \right)^2} = \sqrt{10^{15} I^6 + 6 \cdot 10^{10} I^4 + 10^6 I^2}.$$

## 2. Расчет установившихся мгновенных переменных в нелинейных электрических цепях

### 2.1. Метод гармонической линеаризации

В данном методе предполагается, что искомые переменные нелинейной электрической цепи являются гармоническими функциями времени, равными первым гармоникам реальных периодических переменных величин. При этом используются характеристики нелинейных элементов, полученные для мгновенных значений.

#### Пример 2.1

Определить основную гармоническую составляющую мгновенного значения тока источника ЭДС в электрической цепи (рис. 2.1), если  $e(t) = 8 \sin(1000t + 60^\circ)$ , В, а ВБАХ нелинейной индуктивности  $L_{нл}$ , для мгновенных значений потокосцепления  $\psi$  и тока  $i_L$  имеет вид

$$i_L = 0,55\psi + 0,909 \cdot 10^4 \psi^3, \text{ А. } R = 100 \text{ Ом.}$$

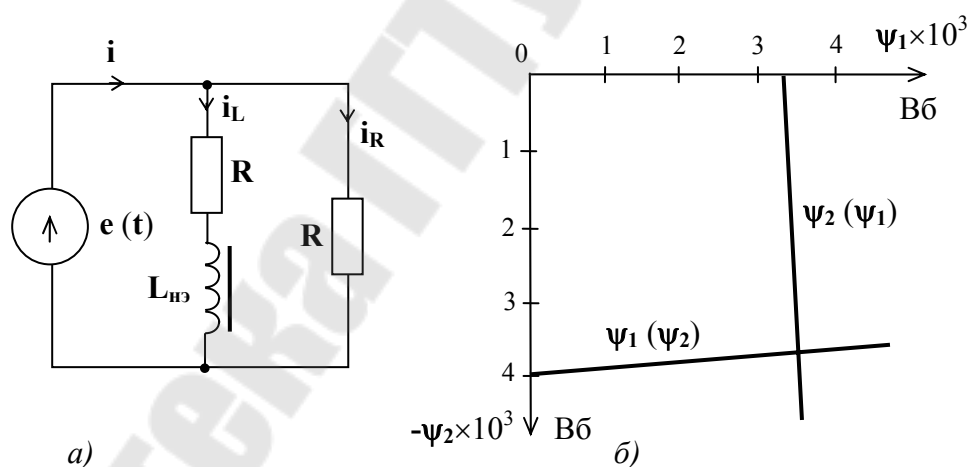


Рис. 2.1

Решение

По законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i = i_L + i_R = a\psi + b\psi^3 + \frac{e}{R} \\ e = i_L R + u_L = (a\psi + b\psi^3)R + \frac{d\psi}{dt} \end{cases}$$

Видно, что ток  $i$  определится прямой подстановкой в первое уравнение неизвестной  $\psi$ , найденной из второго уравнения.

Согласно методу гармонической линейаризации, решение второго уравнения будем искать в виде

$$\psi = \psi_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1) = \psi_1 \sin \omega t + \psi_2 \cos \omega t.$$

С целью упрощения операций подстановки этого предполагаемого решения в дифференциальное уравнение, предварительно найдем

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \psi_1 \cos \omega t - \omega \psi_2 \sin \omega t;$$

$$\begin{aligned} \psi^3 &= \psi_1^3 \sin^3 \omega t + 3\psi_1^2 \psi_2 \sin^2 \omega t \cos \omega t + 3\psi_1 \psi_2^2 \sin \omega t \cos^2 \omega t + \\ &+ \psi_2^3 \cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \psi_1^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} \psi_1^3 \sin 3\omega t + \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_2 \cos \omega t - \\ &- \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_2 \cos 2\omega t \cos t + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2^2 \sin \omega t + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2^2 \sin \omega t \cos 2\omega t + \\ &+ \frac{3}{4} \psi_2^3 \cos \omega t + \frac{1}{4} \psi_2^3 \cos 3\omega t \approx \left( \frac{3}{4} \psi_1^3 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2^2 - \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2^2 \right) \sin \omega t + \\ &+ \left( \frac{3}{4} \psi_2^3 + \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_2 - \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_2 \right) \cos \omega t = \frac{3}{4} \psi_1^3 \sin \omega t + \frac{3}{4} \psi_2^3 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Поскольку в решении учтена только первая гармоника, то при преобразованиях в выражении для  $\psi^3$  высшие гармоники считались равными нулю (отбрасывались).

Теперь осуществим подстановку и получим

$$\begin{aligned} &\omega \psi_1 \cos \omega t - \omega \psi_2 \sin \omega t + R a \psi_1 \sin \omega t + R a \psi_2 \cos \omega t + \\ &+ R b \frac{3}{4} \psi_1^3 \sin \omega t + R b \frac{3}{4} \psi_2^3 \cos \omega t = E_m \sin(\omega t + \alpha_e). \end{aligned}$$

Приведем подобные члены с синусными и косинусными составляющими

$$\begin{aligned} &\left( a R \psi_1 + \frac{3}{4} b R \psi_1^3 - \omega \psi_2 \right) \sin \omega t + \left( a R \psi_2 + \frac{3}{4} b R \psi_2^3 + \omega \psi_1 \right) \cos \omega t = \\ &= (E_m \cos \alpha_e) \sin \omega t + (E_m \sin \alpha_e) \cos \omega t. \end{aligned}$$



Осуществим гармонический баланс

$$\begin{cases} a R \psi_1 + \frac{3}{4} b R \psi_1^3 - \omega \psi_2 = E_m \cos \alpha_e \\ a R \psi_2 + \frac{3}{4} b R \psi_2^3 + \omega \psi_1 = E_m \sin \alpha_e \end{cases}$$

Подставим численные значения и преобразуем полученную систему алгебраических уравнений к виду

$$\begin{cases} \psi_2 = 682 \psi_1^3 + 0,055 \psi_1 - 0,004 \\ \psi_1 = -682 \psi_2^3 - 0,055 \psi_2 + 0,00346 \end{cases}$$

Графическое решение данной системы уравнений (рис. 2.1б) дает значения

$$\psi_1 = 0,0036, \text{ Вб}; \psi_2 = -0,0038, \text{ Вб}.$$

Значит,

$$\psi = 0,0036 \sin 1000 t - 0,0038 \cos 1000 t = 0,0052 \sin(1000 t - 46,5^\circ), \text{ Вб}.$$

Следовательно, с точностью до первой гармоники

$$\begin{aligned} i = 0,55 \cdot 0,0052 \sin(1000 t - 46,5^\circ) + 0,909 \cdot 10^4 \cdot (0,0052)^3 \sin^3(1000 t - 46,5^\circ) + \\ + \frac{1}{100} \cdot 8 \sin(1000 t + 60^\circ) \approx 0,077 \sin(1000 t + 38,1^\circ), \text{ А}. \end{aligned}$$

## 2.2. Метод гармонического баланса

Применение данного метода также базируется на использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений, хотя рассчитывается установившийся периодический режим в нелинейных электрических цепях.

Предполагается следующий алгоритм использования метода гармонического баланса:

а) расставляются условно-положительные направления токов и напряжений цепи;

б) по законам Кирхгофа записывается одно или система нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных величин;

в) предполагаемое частное (периодическое) решение приближенно представляется в виде усеченного ряда Фурье с неизвестными амплитудами синусных и косинусных гармонических составляющих;

г) предполагаемое решение подставляется в дифференциальное уравнение (или систему), полученное в пункте б), которое в результате аналитических преобразований становится тригонометрическим;

д) с помощью гармонического баланса тригонометрического уравнения, то есть приравнивая амплитудные синусные и косинусные составляющие одинаковых гармоник в левой и правой частях уравнения, находится система алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд гармоник по пункту в);

е) решением системы уравнений в пункте д) находятся неизвестные амплитуды синусных и косинусных составляющих гармоник, и записывается искомый периодический ток (напряжение) цепи.

## Пример 2.2

Определить мгновенное значение тока источника ЭДС в электрической цепи примера 2.1.

*Решение*

Исходная система уравнений была получена в примере 2.1.

Согласно методу гармонического баланса, периодическое решение второго уравнения будем искать в виде ряда Фурье

$$\psi = \psi_0 + \psi_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1) + \psi_{m2} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

Поскольку нелинейный член дифференциального уравнения (ВБАХ) для  $L_{н\bar{9}}$  описывается нечетной функцией, то

$$\psi_0 = \psi_{m2} = \psi_{m4} = \dots = 0.$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами ряда Фурье и учитывая сказанное, будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1) + \psi_{m3} \sin(3\omega t + \alpha_3) = \\ &= \psi_1 \sin \omega t + \psi_2 \cos \omega t + \psi_3 \sin 3\omega t + \psi_4 \cos 3\omega t. \end{aligned}$$

Найдем предварительно

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega \psi_1 \cos \omega t - \omega \psi_2 \sin \omega t + 3\omega \psi_3 \cos 3\omega t - 3\omega \psi_4 \sin 3\omega t; \\ \psi^3 &\approx \left( \frac{3}{4} \psi_1^3 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2 \psi_4 - \frac{3}{4} \psi_1^2 \psi_3 + \frac{3}{4} \psi_1 \psi_2^2 + \frac{3}{4} \psi_2^2 \psi_3 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_3^2 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_4^2 \right) \times \\ &\times \sin \omega t + \left( \frac{3}{4} \psi_2^3 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2 \psi_3 + \frac{3}{4} \psi_1^2 \psi_2 - \frac{3}{4} \psi_1^2 \psi_4 + \frac{3}{4} \psi_2^2 \psi_4 + \frac{3}{2} \psi_2 \psi_3^2 + \frac{3}{2} \psi_2 \psi_4^2 \right) \times \\ &\times \cos \omega t + \left( -\frac{1}{4} \psi_1^3 + \frac{3}{4} \psi_3^2 + \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_3 + \frac{3}{2} \psi_2^2 \psi_3 + \frac{3}{2} \psi_3 \psi_4^2 \right) \sin 3\omega t + \\ &+ \left( \frac{1}{4} \psi_2^3 + \frac{3}{4} \psi_4^3 + \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_4 + \frac{3}{2} \psi_2^2 \psi_4 + \frac{3}{2} \psi_3^2 \psi_4 \right) \cos 3\omega t. \end{aligned}$$

В выражении для  $\psi^3$  учтены, как и в предполагаемом решении, только первая и третья гармоники, а высшие гармоники приравнялись нулю.

Подставляя выражения для  $\psi$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$  и  $\psi^3$  в дифференциальное уравнение и осуществляя гармонический баланс, то есть приравнивая амплитудные полиномы в левой части уравнения последовательно при  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sin 3\omega t$  и  $\cos 3\omega t$ , получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных амплитуд  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$ .

$$\left\{ \begin{aligned} -\omega \psi_2 + a R \psi_1 + b R \left( \frac{3}{4} \psi_1^3 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2 \psi_4 - \frac{3}{4} \psi_1^2 \psi_3 + \frac{3}{4} \psi_1 \psi_2^2 + \frac{3}{4} \psi_2^2 \psi_3 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_3^2 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_4^2 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_4^2 \right) &= E_m \cos \alpha_e \\ \omega \psi_1 + \alpha R \psi_2 + b R \left( \frac{3}{4} \psi_2^3 + \frac{3}{2} \psi_1 \psi_2 \psi_3 + \frac{3}{4} \psi_1^2 \psi_2 - \frac{3}{4} \psi_1^2 \psi_4 + \frac{3}{4} \psi_2^2 \psi_4 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \psi_2 \psi_3^2 + \frac{3}{2} \psi_2 \psi_4^2 \right) &= E_m \sin \alpha_e \\ -3\omega \psi_4 + a R \psi_3 + b R \left( -\frac{1}{4} \omega_1^3 + \frac{3}{4} \omega_3^3 + \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_3 + \frac{3}{2} \psi_2^2 \psi_3 + \frac{3}{2} \psi_3 \psi_4^2 \right) &= 0 \\ 3\omega \psi_3 + a R \psi_4 + b R \left( \frac{1}{4} \omega_2^3 + \frac{3}{4} \omega_4^3 + \frac{3}{2} \psi_1^2 \psi_4 + \frac{3}{2} \psi_2^2 \psi_4 + \frac{3}{2} \psi_3^2 \psi_4 \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Решение этой системы представляет определенные трудности. Будем ее решать методом последовательных приближений. В качестве первого приближения примем найденные в примере 2.1 значения  $\psi_1 = 0,0036$  и  $\psi_2 = -0,0038$ . Тогда два последних уравнения примут вид (после подстановки численных значений)

$$\begin{cases} \psi_3^3 + \psi_3 (1,994 \psi_4^2 + 0,135 \cdot 10^{-3}) - (4,399 \cdot 10^{-3} \psi_4 + 4,32 \cdot 10^{-9}) = 0 \\ \psi_4^3 + \psi_4 (1,994 \psi_3^2 + 0,135 \cdot 10^{-3}) - (4,399 \cdot 10^{-3} \psi_3 + 4,81 \cdot 10^{-9}) = 0 \end{cases}$$

Графическое решение этой системы уравнений (рис.2.2) дает  $\psi_3 = 1,05 \cdot 10^{-6}$  Вб,  $\psi_4 = -0,95 \cdot 10^{-6}$  Вб.

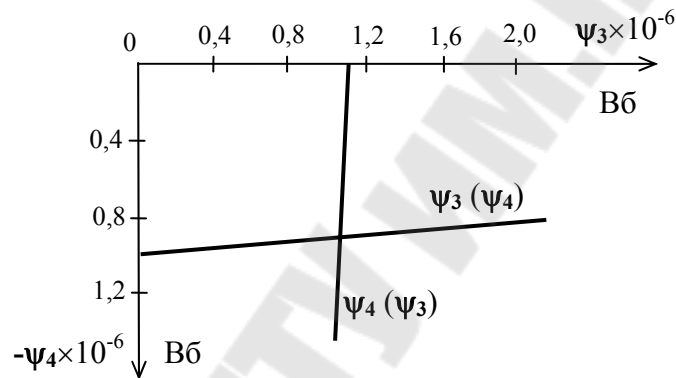


Рис. 2.2

Теперь можно эти значения  $\psi_3$  и  $\psi_4$  подставить в первые два уравнения системы алгебраических уравнений и найти более точные величины  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые затем можно подставить в два последних уравнения и найти более точные значения  $\psi_3$  и  $\psi_4$ . Продолжая этот процесс, удастся найти величины  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  и  $\psi_4$  с желаемой точностью.

Мы же ограничимся первым приближением и запишем неизвестную

$$\begin{aligned} \psi = & 0,0036 \sin 1000 t - 0,0038 \cos 1000 t + 1,05 \cdot 10^{-6} \sin 3000 t - \\ & - 0,95 \cdot 10^{-6} \cos 3000 t = 0,0052 \sin (1000 t - 46^\circ 30') + \\ & + 1,416 \cdot 10^{-6} \sin (3000 t - 42^\circ 06'), \text{ Вб.} \end{aligned}$$

Следовательно, с точностью до третьей гармоники,

$$i = 0,55 \left[ 0,0052 \sin (1000 t - 46^\circ 30') + 1,416 \cdot 10^{-6} \sin (3000 t - 42^\circ 06') \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + 0,909 \cdot 10^4 \cdot [0,0052 \sin(1000t - 46^\circ 30') + 1,416 \sin(3000t - 42^\circ 06')]^3 + \\
& + \frac{1}{100} \cdot 8 \sin(1000t + 60^\circ) \approx 0,08 \sin(1000t + 57^\circ) + 0,0277 \cdot 10^{-6} \times \\
& \times \sin(3000t - 140^\circ 30'), \text{ А.}
\end{aligned}$$

### 2.3. Метод кусочно-линейной аппроксимации

В данном методе нелинейную характеристику заменяют ломаной линией, что соответствует аппроксимации полиномом первой степени для каждого линейного отрезка. На рис. 2.3 показана нелинейная характеристика, аппроксимированная тремя отрезками прямых линий.

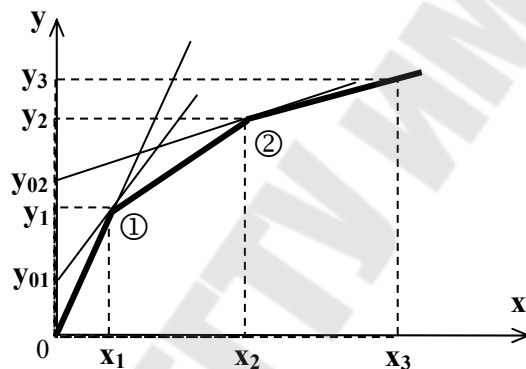


Рис. 2.3

Первый участок  $0 \leq x \leq x_1$

$$y = a_1 x, \quad a_1 = \frac{y_1}{x_1}.$$

Второй участок  $x_1 \leq x \leq x_2$

$$y = y_{01} + a_2 x, \quad a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Третий участок  $x_2 \leq x \leq x_3$

$$y = y_{02} + a_3 x, \quad a_3 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

Внутри каждого линейного участка процесс описывается линейными дифференциальными уравнениями. Общий вид уравнений одинаков для всех линейных участков, коэффициенты уравнений разные – они определяются параметрами линейных отрезков характеристики. Точки излома характеристики (т.1 и т.2) называются точками коммутации, так как в этих

точках происходит изменение параметра элемента. Следовательно, решение внутри каждого интервала содержит произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий для каждого интервала на основе законов коммутации, т.е., путем сопряжения решений, полученных для двух смежных интервалов [1]. Подлежат определению также моменты коммутации, которые рассчитываются из условия, что ток или напряжение достигает значения, соответствующего точке излома характеристики. Расчет выполняется обычно в течение периода изменения входного сигнала, т.е., в интервале повторяемости.

Наиболее простые решения достигаются в том случае, если характеристика аппроксимируется отрезками прямых, совпадающими с координатными осями.

### Пример 2.3

Вольт-амперная характеристика вентиля, включенного в схему однополупериодного выпрямителя (рис. 2.4а), аппроксимирована двумя отрезками прямых (рис. 2.4б).

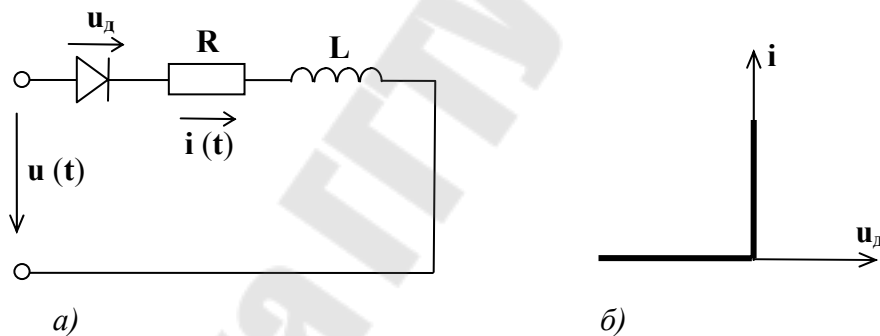


Рис. 2.4

Дано:  $u(t) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$ , В  
 $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,2 \text{ Гн}$ .

Рассчитать и построить график тока  $i(t)$ .

*Решение*

Диод в данном примере считается идеальным, и выполняет роль ключа:

а) если  $u_d = 0$ ,  $R_d = 0$ , диод открыт;

б) если  $i_d = 0$ ,  $R_d = \infty$ , диод закрыт.

Момент запираания диода  $t_{\text{зап}}$  достигается, когда ток, уменьшаясь, достигает нуля ( $i_d = 0$ ), а момент открывания  $t_{\text{отп}}$ , когда напряжение на диоде, увеличиваясь достигает нуля ( $u_d = 0$ ).

Составим расчетное уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений тока и напряжений.

$$Ri + u_d + L \frac{di}{dt} = u(t). \quad (2.1)$$

Получим решение для тока  $i(t)$  для каждого интервала аппроксимации.

*Решение для первого интервала:*  $u_d = 0$ ,  $R_d = 0$ , и расчетное уравнение приобретает вид

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (2.2)$$

Выполним решение классическим методом

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

Принужденную составляющую тока рассчитываем символическим методом.

$$\underline{I}_{\text{м.пр}} = \frac{U_m e^{j\psi}}{R + j\omega L} = \frac{50\sqrt{2} e^{j30^\circ}}{20 + j20} = \frac{50\sqrt{2} e^{j30^\circ}}{20\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 2,5 e^{-j15^\circ}, \text{ A.}$$

$$i_{\text{пр}}(t) = 2,5 \sin(\omega t - 15^\circ), \text{ A.}$$

Решение для свободной составляющей найдем как общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$L \frac{di_{\text{св}}}{dt} + R i_{\text{св}} = 0, \quad i_{\text{св}} = A e^{p(t-t_{\text{отп}})} = A e^{-\frac{R}{L}(t-t_{\text{отп}})},$$

где  $t_{\text{отп}}$  - момент отпираания диода, соответствует  $u_d = 0$  при  $\frac{du}{dt} > 0$ ,

$p$  – корень характеристического уравнения.

$$Lp + R = 0; \quad p = -\frac{R}{L} = -\frac{20}{0,2} = -100 \text{ с}^{-1}.$$

Полное решение на первом интервале

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) + A e^{p(t-t_{отп})} = 2,5 \sin(\omega t - 15^\circ) + A e^{-100(t-t_{отп})}.$$

Постоянную интегрирования  $A$  найдем из начальных условий для данного интервала:  $t = t_{отп}$ ,  $i = 0$ . Тогда  $0 = I_m \sin \psi_i + A$ ,  $A = -I_m \sin \psi_i = -2,5 \sin(-15^\circ) = 0,64$  А. Решение для первого интервала получили в виде

$$i(t) = 2,5 \sin(\omega t - 15^\circ) + 0,64 e^{-100(t-t_{отп})}, \text{ А.} \quad (2.3)$$

### Решение для второго интервала

$$i_d = 0, \quad R_d = \infty, \quad i = 0.$$

Расчетное уравнение (2.1) приобретает вид

$$u_d = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (2.4)$$

Найдем из уравнения (2.4) момент отпираания диода

$$t = t_{отп}, \quad u_d = 0, \quad \frac{d u_d}{d t} > 0, \quad (\text{первая четверть})$$

$$0 = U_m \sin(\omega t_{отп} + \psi), \quad \omega t_{отп} + \psi = 0,$$

$$\omega t_{отп} = -\psi = -30^\circ = -0,52 \text{ рад},$$

$$t_{отп} = -\frac{0,52}{100} = -0,0052 \text{ с} = -5,2 \text{ мс}.$$

Теперь определим время запираания диода  $t_{зап}$  из уравнения (2.3):

$$t = t_3, \quad u_d = 0, \quad \frac{d i}{d t} < 0, \quad (\text{вторая четверть})$$

$$0 = 2,5 \sin(\omega t_{зап} + 15^\circ) + 0,64 e^{-100(t_{зап} - t_{отп})}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) – трансцендентное.

Решим его графически.

На рис. 2.5 показаны графики  $u(t)$  - рис. а,

$i_{пр}(t)$ ,  $i_{св}(t)$  - рис. б,

$i(t)$  - рис. в.

Графики построены в промежутке повторяемости процесса – периода  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{100} = 0,0628 \text{ с} = 62,8 \text{ мс}$  входного напряжения.

Расчетные данные, по которым построены графики, приведены в таблице 2.1.



Таблица 2.1

$t, c$	$e^{-100(t-t_{отп})}$	$2,16e^{-100(t-t_{отп})}$	$2,5 \sin(100t - 15^\circ), A$	$i(t), A$
0	0,59	1,27	-0,64	0,63
$10^{-2}$	0,22	0,47	1,68	2,15
$2 \cdot 10^{-2}$	0,08	0,17	2,46	2,63
$3 \cdot 10^{-2}$	0,03	0,06	0,98	1,05
$4 \cdot 10^{-2}$	0,01	0,02	-1,4	-1,4
$5 \cdot 10^{-2}$	0,004	0,009	-2,5	-2,5
$6 \cdot 10^{-2}$	0	0	-1,3	-1,3

$$t_{отп} = -5,2 \text{ мс}$$

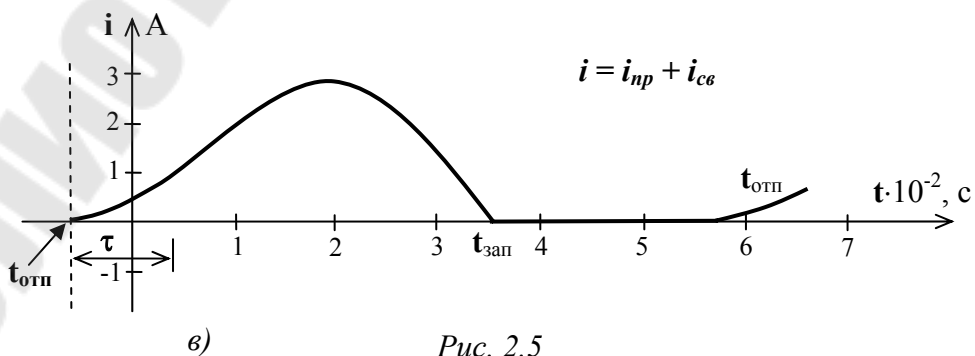
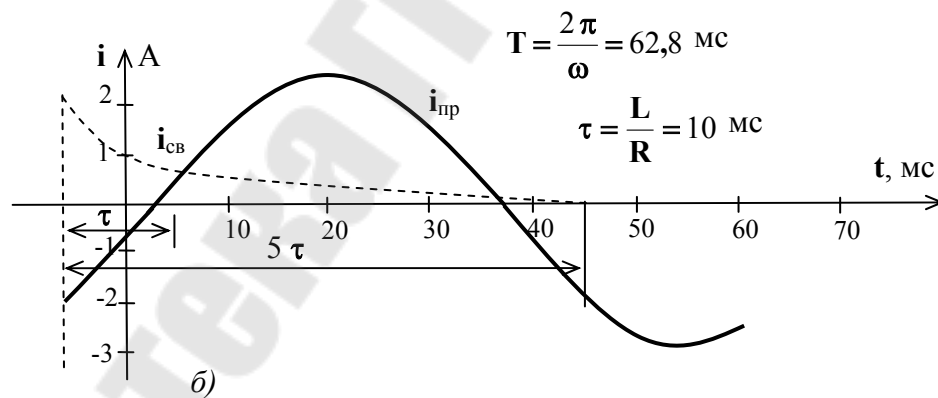
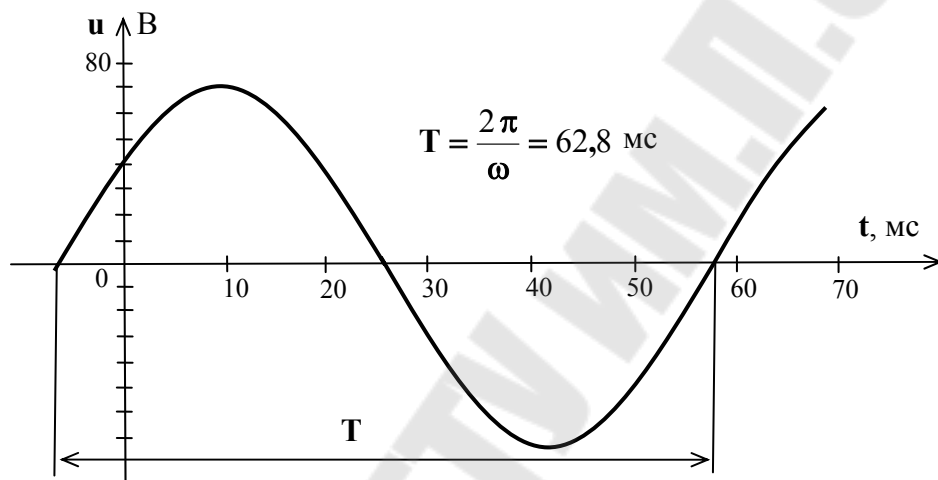


Рис. 2.5

### Пример 2.4

Цепь, состоящая из линейных активных сопротивлений и катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 2.6) подключена к источнику синусоидального напряжения  $e(t) = 230 \sin 5000 t$ , В. Площадь сечения сердечника  $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ , число витков  $\omega = 100$ , зависимость  $B$  (Тл) для материала сердечника показана на рис.2.7а, длина средней линии сердечника  $\ell_{\text{ср}} = 20 \text{ см}$ ,  $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2,5 \text{ Ом}$ .

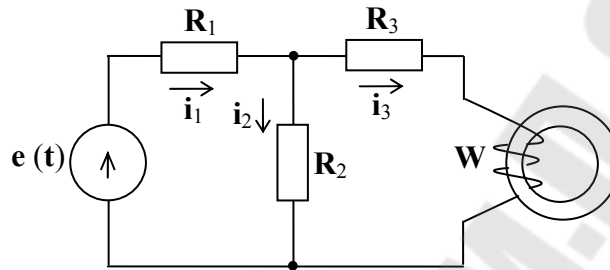


Рис. 2.6

Рассчитать и построить график изменения тока  $i_3(t)$  и потокосцепления  $\psi(t)$ .

*Решение*

1. Рассчитаем вебер-амперную характеристику катушки

Потокосцепление  $\psi = \omega S B = 100 \cdot 10^{-4} = 0,01 \text{ Вб}$ .

Ток катушки согласно закона полного тока равен

$$i_3 = \frac{H \ell}{\omega} = \frac{20 \cdot 10^{-2}}{100} H = 20 \cdot 10^{-4} H, \text{ А.}$$

Вебер-амперная характеристика катушки показана на рис. 2.7б.

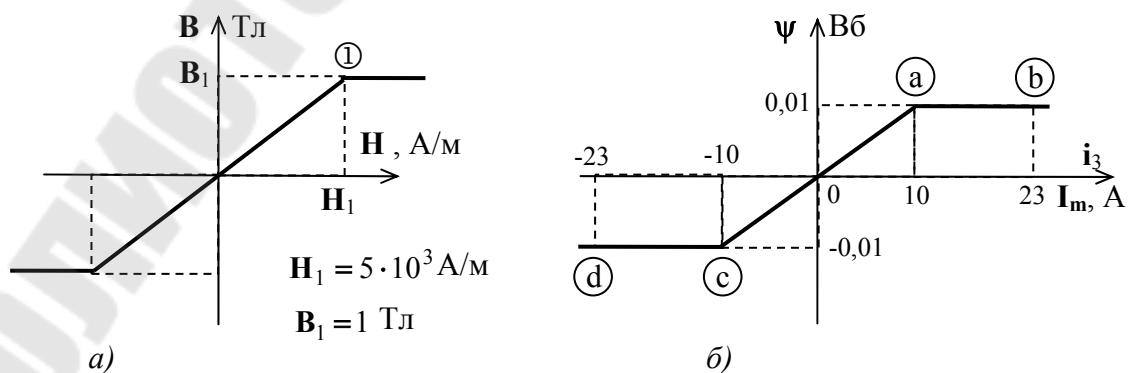


Рис. 2.7

2. Заменяем всю линейную часть цепи эквивалентным генератором и определим его параметры. Для этого разомкнем цепь с индуктивностью и определим напряжение холостого хода  $\underline{U}_{xx3}$  (рис. 2.8а) и  $\underline{R}_{вх3}$

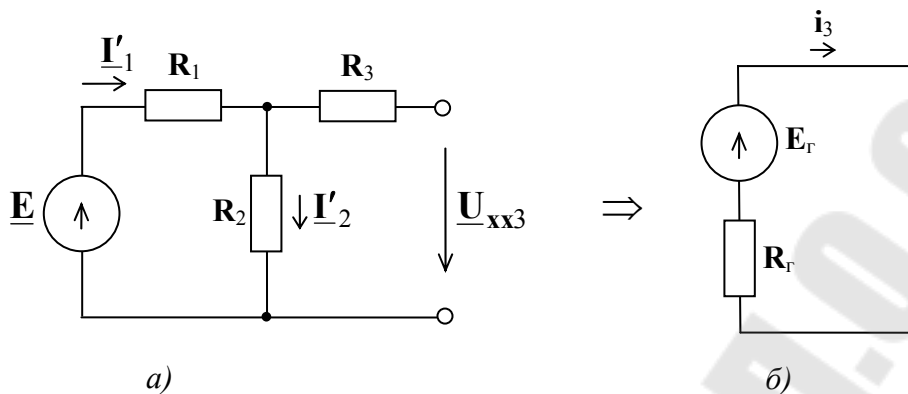


Рис. 2.8

$$\underline{E}_{г.м} = \underline{U}_{xx3м} = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{230}{10} \cdot 5 = 115 \text{ В},$$

$$\underline{R}_{вх3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = 5 \text{ Ом}, \quad \underline{R}_g = 5 \text{ Ом}.$$

Расчетная схема замещения представлена на рис. 2.8б. Определим закон изменения потокосцепления  $\psi(t)$  и тока  $\underline{i}_3(t)$  внутри интервала повторяемости процесса. Так как вебер-амперная характеристика нелинейной индуктивности симметрична относительно начала координат, а функция входного напряжения симметрична относительно оси абсцисс, то интервал повторяемости - половина периода

$$\frac{1}{2} T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{6,28}{2 \cdot 5 \cdot 10^3} = 1,24 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} = 0,62 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Расчетное дифференциальное уравнение получим на основании закона Кирхгофа для мгновенного значения тока (рис. 2.8б)

$$\frac{d\psi}{dt} + R_g i_3 = e_g(t).$$

При кусочно-линейной аппроксимации  $\psi = \psi_0 + L_d i_3$ , и тогда расчетное уравнение приобретает вид

$$L_d \frac{di_3}{dt} + R_g i_3 = E_{г.м} \sin \omega t. \quad (a)$$

3. В области насыщения катушки  $i_3 \geq 10 \text{ мА}$  и  $i_3 \leq -10 \text{ мА}$ ,  $\psi = \text{const}$ ,  $L_d = 0$ , и расчетное уравнение (а) упрощается

$$R_r i_3 = E_{r.m} \sin \omega t,$$

ток через катушку

$$i_3(t) = \frac{E_{r.m} \sin \omega t}{R_r} = 23 \sin \omega t, \text{ А.}$$

Определим момент времени  $t_2$ , когда  $i_3 = I_{3m} = 23 \text{ мА}$  (точка **b** на ВАХ)

$$23 \sin \omega t_2 = 23, \sin \omega t_2 = 1, \omega t_2 = \frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{3,14}{5 \cdot 10^3} = 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Теперь определим момент времени  $t_3$ , когда ток  $i_3$ , уменьшаясь ( $\frac{di_3}{dt} < 0$ , вторая четверть), достигает значения  $i_3 = 10 \text{ А}$  (точка **a** на ВАХ)

$$i_{3(l)} = I_{3m} \sin \omega t_3, 10 = 23 \sin \omega t_3.$$

Отсюда,

$$\omega t_3 = \pi - \arcsin \frac{i_{3(l)}}{I_{3m}} = \pi - \arcsin \frac{10}{25} = 180^\circ - 25,77^\circ = 154,2^\circ = 2,69 \text{ рад.}$$

$$t_3 = \frac{2,69}{5 \cdot 10^3} = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Потокосцепление  $\psi(t)$ ;  $\psi = \text{const} = 0,01 \text{ Вб}$ .

4. В области изменения тока

$$-10 \leq i_3 \leq 10 \text{ мА}, L_{d(l)} = \frac{\psi_a}{i_{3a}} = \frac{0,01}{10} = 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Расчетное уравнение

$$L_{d1} \frac{di_3}{dt} + R_r i_3 = E_{r.m} \sin \omega t \quad (6)$$

Уравнение линейное дифференциальное первого порядка, неоднородное. Решим уравнение классическим методом

$$i_3 = i_{3np} + i_{3св} = i_{3np} + A e^{p(t-t_3)}.$$

Принужденная составляющая тока

$$\underline{I}_{3m,np} = \frac{\underline{E}_{gm}}{\underline{R}_r + j\omega L_{dl}} = \frac{115}{5 + j5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} = \frac{115}{5 + j5} = \frac{115}{5\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 16,3e^{-j45^\circ}, \text{ A.}$$

$$i_{3np} = 16,3 \sin(\omega t - 45^\circ), \text{ A.}$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий для данного интервала:

$$t = t_3 = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ с, } i_3(t_3) = 10 \text{ mA,}$$

$$i_3 = 16,3 \sin(\omega t_3 - 45^\circ) + A e^{p(t_3 - t_3)},$$

$$9,21 = 16,3 \sin(23,6^\circ - 45^\circ) + A,$$

$$A = 9,21 - (-5,39) = 15,4 \text{ A.}$$

Корень определим из характеристического уравнения

$$L_{dl}p + R_r = 0,$$

$$p = -\frac{R_r}{L_{dl}} = -\frac{5}{10^{-3}} = -5 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Полное решение для тока:

$$i_3 = 16,3 \sin(\omega t - 45^\circ) + 15,4 e^{-5 \cdot 10^3(t - t_3)}, \text{ A, } t_3 = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Потокоцепление

$$\psi = L_d i_3 = 16,3 \cdot 10^{-3} \sin(\omega t - 45^\circ) + 15,4 \cdot 10^{-3} e^{-5 \cdot 10^3(t - t_3)}, \text{ Вб.}$$

Теперь рассчитаем момент времени  $t_4$ , когда ток  $i_3$ , уменьшаясь ( $\frac{di_3}{dt} < 0$ ) достигает значения  $i_3 = -10$  mA (точка с на вебер-амперной характеристике, третья четверть).

$$i_3(t_4) = -10 = 16,3 \sin(\omega t_4 - 45^\circ) + 15,6 e^{-5 \cdot 10^3(t_4 - t_3)}. \quad (4)$$

Уравнение (4) – трансцендентное. Найдем момент времени  $t_4$ , используя графические построения (рис.2.9б).

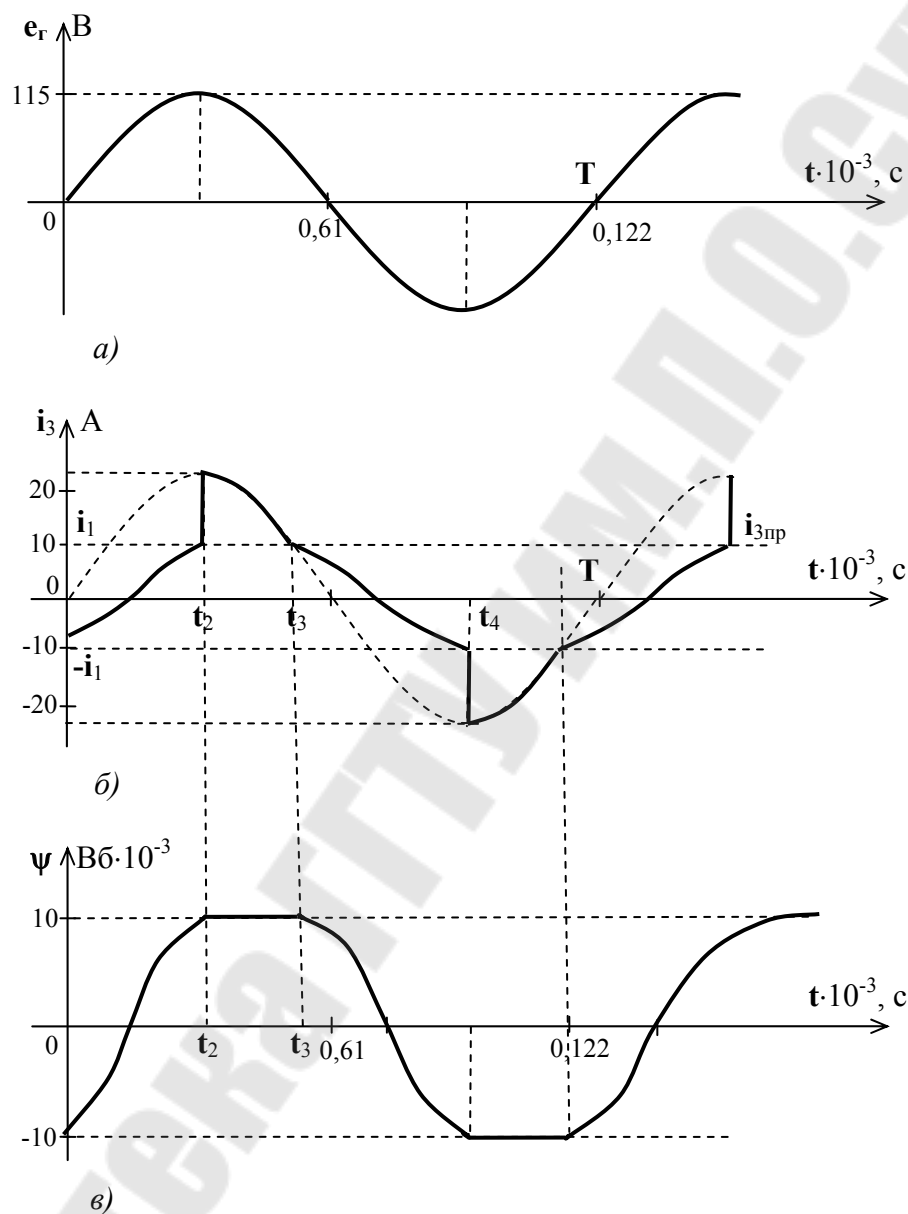


Рис. 2.9

В таблице 2.2 приведены расчетные данные  $i_3(t)$  при  $t \geq t_3$ .

Первая точка выбрана в начале интервала  $t = t_3$ ,  $\Delta t = 0,08 \cdot 10^{-3}$  с ( $\Delta \omega t = 22,93^\circ$ ). Расчет ведем до тех пор, пока ток  $i_3$  достигает значения, соответствующего концу интервала функции  $i_3 = -10$  А. На графике рис. 2.9б пунктиром показана функция  $i_3(t) = 23 \sin \omega t$ , сплошной линией –

функция  $i_3(t)$  на всех интервалах аппроксимации вебер-амперной характеристики. По графику  $t_4 = 0,77 \cdot 10^{-3}$  с.

Таблица 2.2

$t \cdot 10^{-3}, \text{с}$	0,54	0,70	0,86	1,01
$i_{3np}, \text{А}$	15,2	6,7	-5,52	-14,7
$i_{3св} = 0,91 e^{p(t-t_3)}$	-5,2	-2,65	-1,1	-0,5
$i_3, \text{А}$	10	4,05	-6,62	-15,2

Зависимость  $\psi(t)$  показана на рис. 2.9в.

### 3. Расчет действующих значений переменных в установившихся режимах нелинейных электрических цепей

Нелинейные элементы для данного расчета задаются своими вольт-амперными и фазо-амперными характеристиками  $U(I)$  и  $\varphi(I)$ . Эти характеристики получают опытным путем или рассчитывают аналитически по характеристикам для мгновенных значений, как это было, например, показано в разделе 1.3.

В случае, когда нелинейность несущественна, расчет выполняют по первым гармоникам. Различие характеристик в этом случае получается незначительным, так как действующее значение несинусоидальной функции определяется сложением действующих значений гармоник в квадрате. Так, например, если действующие значения двух гармоник равны соответственно 1 и 0,4, то общее действующее значение равно  $\sqrt{1^2 + 0,4^2} = 1,08$ . Видно, что в основном оно определяется первой гармоникой.

#### 3.1. Аналитический метод

Поскольку переменные в цепи считаются гармоническими функциями времени, то расчет их действующих значений можно вести комплексным аналитическим методом, используя, естественно, характеристики нелинейных элементов для действующих значений.

##### Пример 3.1

Определить действующее значение тока источника электроэнергии в электрической цепи по примеру 2.1, если ВБAX нелинейной индуктивности для действующих значений имеет вид  $I = 0,55\psi + 1,36 \cdot 10^4 \psi^3$ , А.

*Решение*

По законам Кирхгофа в комплексном виде запишем уравнение для тока источника

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{R} + \frac{\underline{E}}{R + j\omega L_{н3}} = \underline{E} \frac{2R + j\omega L_{н3}}{R(R + j\omega L_{н3})}.$$

Значение нелинейной индуктивности найдем по ВБAX

$$L_{н3} = \frac{\psi}{I} = \frac{\psi}{0,55\psi + 1,36 \cdot 10^4 \psi^3} = \frac{1}{0,55 + 1,36 \cdot 10^4 \psi^2}.$$



Потокосцепление определим из уравнения для модулей напряжений первого контура

$$E = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{(I_L R)^2 + (\omega \Psi)^2} = \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ В.}$$

Преобразуя это уравнение, найдем

$$1,85 \cdot 10^8 \Psi^6 + 1,01 \cdot 10^6 \Psi^4 + 0,302 \Psi^2 = 32.$$

Решая это уравнение графически (рис. 3.1), найдем  $\Psi = 0,06 \text{ Вб}$ .

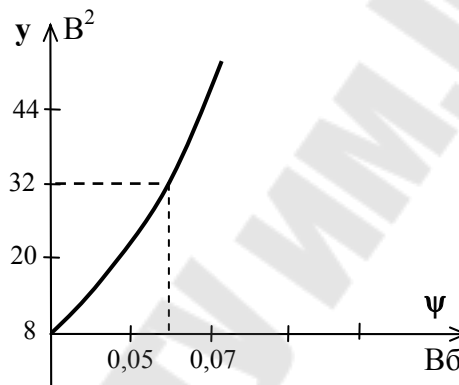


Рис. 3.1

Значит,  $L_{\text{нз}} = \frac{1}{0,55 + 1,36 \cdot 10^4 (0,06)^3} = 0,287 \text{ Гн}$ . Комплексный ток

источника  $\underline{I} = \frac{8}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \frac{2 \cdot 100 + j1000 \cdot 0,287}{100 \cdot (100 + j1000 \cdot 0,287)} = 0,065 e^{j44^\circ 10'}$ , А, и действ-

вующее значение  $I = 0,065 \text{ А}$ .

### 3.2. Графо-аналитический метод

Последовательно-параллельная цепь с одним источником энергии может быть упрощена до цепи с одним элементом путем аналитического расчета или графических построений на комплексной плоскости.

Характеристика элемента, эквивалентного нескольким последовательно соединенным элементам, получается путем векторного сложения напряжений при одинаковых токах. Если элементы соединены параллельно, то векторно складываются токи при одинаковых напряжениях.

Результатом указанных вычислений является характеристика эквивалентного нелинейного элемента, представленного вольт-амперной  $\underline{U}(\underline{I})$  и фазо-амперной  $\varphi(\underline{I})$  характеристиками. По эквивалентной характеристике и параметру источника ( $\underline{E}$ ,  $\underline{J}$ ) находится реакция ( $\underline{I}$ ,  $\underline{U}$ ).

### Пример 3.2

Для цепи рис. 3.2а известно: действующее значение синусоидального напряжения  $E = 20$  В, начальная фаза  $\psi_E = 30^\circ$ ,  $\omega = 10^3$  рад, сопротивления  $R_1 = 30$  Ом,  $R_2 = 100$  Ом, индуктивность  $L = 0,03$  Гн, нелинейный конденсатор задан вольт-амперной характеристикой по действующим значениям (рис. 3.2б).

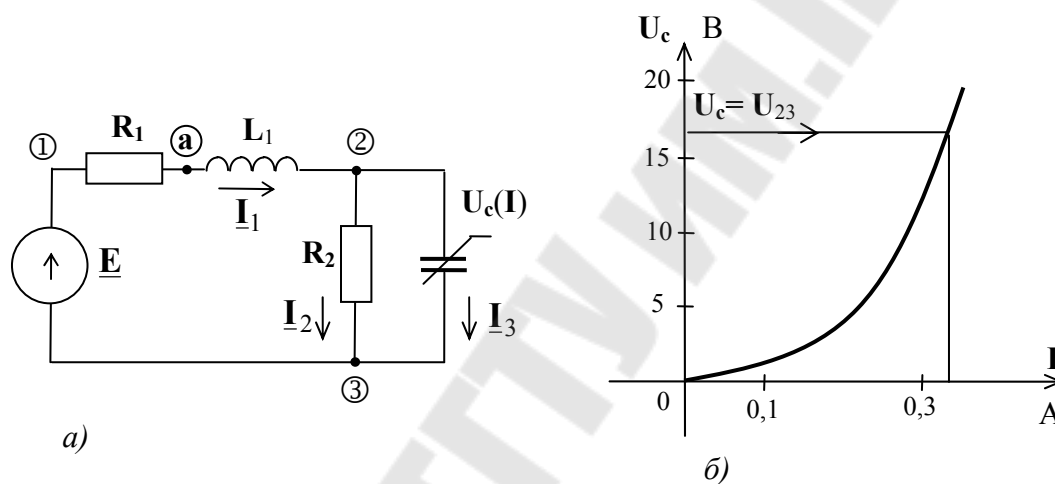


Рис. 3.2

Рассчитать токи, построить векторную диаграмму, определить активную мощность, отдаваемую источником питания в рабочем режиме. Найти величину индуктивности  $L_{кр}$ , при которой в цепи возникает нелинейный резонанс.

#### Решение

Рассчитаем входную эквивалентную характеристику цепи  $\underline{U}_{13}(\underline{I}_1)$ ,  $\varphi_{13}(\underline{I}_1)$ . Расчетные уравнения составим по законам Кирхгофа в символической форме записи

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \quad (3.1)$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_c = \underline{I}_2 R_2, \quad (3.2)$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{U}_{23} + \underline{I}_1 Z_1. \quad (3.3)$$

Определение каждой точки эквивалентной характеристики будем выполнять в следующем порядке. Вначале определим характеристику элемента, эквивалентного параллельной части схемы  $U_{23}(I_1)$ ,  $\varphi_{23}(I_1)$  по уравнениям (3.1) и (3.2). Задаем значение напряжения  $U_{23(1)} = 5$  В. По ВАХ НЭ определяем  $I_3 = 0,18$  А. По закону Ома для действующих значений

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{5}{100} = 0,05 \text{ А.}$$

По уравнению (3.1)

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = I_1 e^{-j\psi_{23}} = 0,05 + j0,18 = 0,187 e^{j74,48^\circ} \text{ А.}$$

При определении начальных фаз примем  $\psi_{U_{23}} = 0$ , тогда

$$\psi_{i_1} = \psi_{U_{23}} - \varphi_{23} = 0 - \varphi_{23}.$$

Теперь рассчитаем соответствующее значение входной эквивалентной характеристики по уравнению (3.3)

$$\underline{U}_{13(1)} = 5 + 0,187 e^{j74,48^\circ} (30 + j30) = 5 + 7,9 e^{j119,48^\circ} = 7 e^{j30,9^\circ}, \text{ В}$$

$$\psi_{13} = \psi_{U_{13}} - \psi_{i_1} = 80,9^\circ - 74,48^\circ = 6,42^\circ.$$

Решением уравнения (3.3) является  $U_{13} = E$ . Поэтому повторяем расчет входной эквивалентной характеристики до тех пор, пока действующее значение  $U_{13}$  не достигнет действующего значения входной ЭДС  $E = 20$  В. Результаты расчета представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

№ п/п	$U_{23}$ (задаем)	$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}$	$I_3$ (по ВАХ)	$I_1(-\psi_{23})$ (по формуле 1)	$U_{13}(\psi_{13})$ (по формуле 3)	$\varphi_{13} = \psi_{23} - \psi_{i_1}$
		А	А	А(°)	В(°)	
1	5	0,05	0,18	0,187 (74,5°)	7 (80,9)	6,4
2	10	0,1	0,25	0,27 (68,2°)	11,85 (62,3)	-2,3
3	15	0,15	0,29	0,326 (62,6°)	17,7 (50,5)	-12
4	20	0,2	0,34	0,39 (59,5°)	22,5 (45,2)	-14,3

По результатам расчета построим ВАХ и ФАХ эквивалентных характеристик (рис. 3.3).

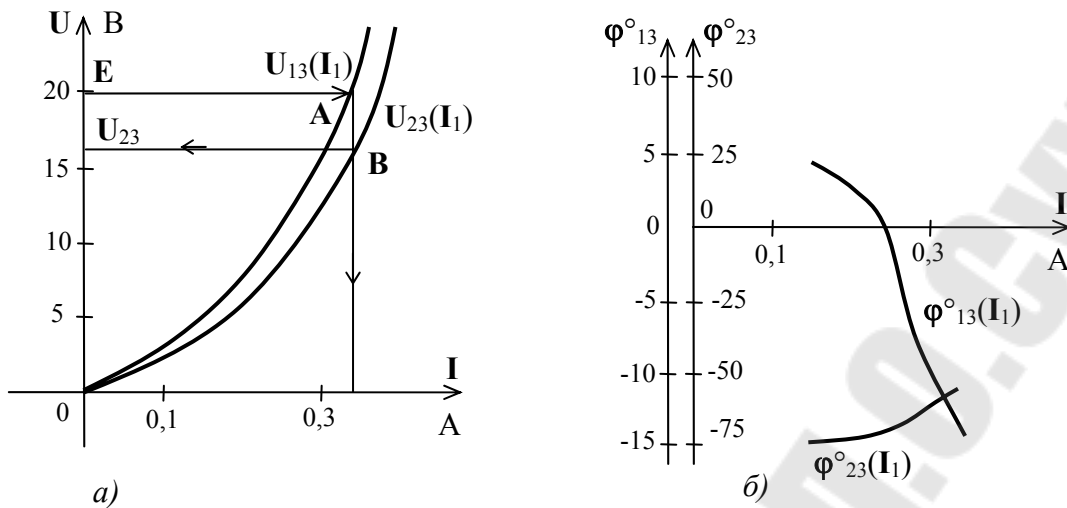


Рис. 3.3

ФАХ  $\varphi_{13}(I_1)$  пересекает ось токов  $\varphi_{13} = 0$  (условие резонансного режима работы цепи) при  $I_{1p} = 0,25$  А. По входной ВАХ это соответствует  $U_{13p} = 11$  В. Таким образом, в цепи, содержащей нелинейный конденсатор (или индуктивность) резонанс может быть достигнут изменением входного напряжения.

Рассчитаем токи в схеме в заданном режиме.

Пересечение входной ВАХ  $U_{13}(I_1)$  и прямой  $E = \text{const}$  дает рабочую точку А (рис.3.3), которой соответствует  $I_1 = 0,35$  А. По ФАХ  $\varphi_{13}(I_1)$  току  $I_1 = 0,35$  А соответствует  $\varphi_{13} = -13^\circ$ . Определим начальную фазу тока  $I_1$

$$\psi_{i_1} = \psi_E - \varphi_{13} = 30^\circ - (-13^\circ) = 43^\circ.$$

По ВАХ  $U_{23}(I_1)$  определяем  $U_{23} = 17$  В и по ФАХ  $\varphi_{23} = -61^\circ$ . Начальная фаза напряжения  $\psi_{23}$  равна

$$\psi_{23} = \psi_{i_1} + \varphi_{23} = 43^\circ - 61^\circ = -18^\circ.$$

Ток определим по ВАХ конденсатора рис. 3.2б и  $U_c = U_{23} = 17$  В.  $I_3 = 0,32$ . Начальная фаза тока равна

$$\psi_{i_3} = \psi_{23} + 90^\circ = -18^\circ + 90^\circ = 72^\circ.$$

Ток в резисторе найдем по закону Ома

$$\underline{I}_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{17 e^{-j18^\circ}}{100} = 0,17 e^{-j18^\circ}, \text{ А.}$$

Итак, имеем

$$\underline{I}_1 = 0,35 e^{j43^\circ} \text{ А}, \underline{I}_2 = 0,17 e^{-j18^\circ} \text{ А}, \underline{I}_3 = 0,32 e^{j72^\circ} \text{ А}, \underline{U}_c = 17 e^{-j18^\circ} \text{ В}.$$

По результатам расчета построим векторную диаграмму напряжений и токов.

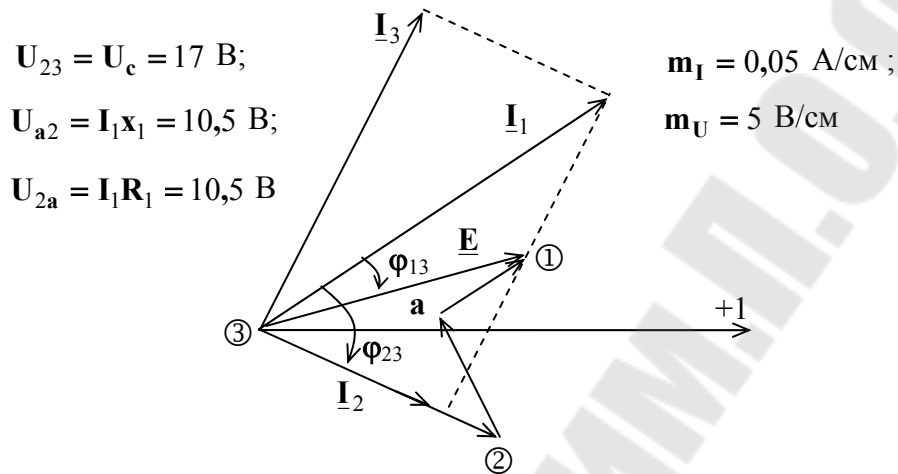


Рис. 3.4

Рассчитаем активную мощность источника питания

$$P_E = E I_1 \cos \varphi_{13} = 20 \cdot 0,35 \cos(-13^\circ) = 6,82 \text{ Вт}.$$

Определим значение  $L_{1кр}$ , при которой в цепи может иметь место резонанс напряжений.

Условие резонанса напряжений для рассматриваемой схемы можно записать следующим образом

$$U_{L1} - \mathbf{Jm} \{ \dot{U}_{23} \} = 0,$$

$$U_{L1} - U_{23p} = 0. \quad (3.4)$$

Решим задачу графически. Для этого рассчитаем зависимость  $U_{23p}(I_1)$ . Если принять начальную фазу тока  $I_1$  за 0, то  $U_{23p} = U_{23} \sin \varphi_{23}$  и тогда, воспользовавшись результатами расчета эквивалентной характеристики (таблица 3.1), рассчитаем характеристику  $U_{23p}(I_1)$

1.  $I_1 = 0,187 \text{ А}, U_{23p} = 5 \sin(-74,48^\circ) = -4,8 \text{ В};$

2.  $I_1 = 0,27 \text{ А}, U_{23p} = 10 \sin(-68,2^\circ) = -9,28 \text{ В};$

3.  $I_1 = 0,326 \text{ A}$ ,  $U_{23p} = 15 \sin(-62,6^\circ) = -13,3 \text{ B}$ ;
4.  $I_1 = 0,39 \text{ A}$ ,  $U_{23p} = 20 \sin(-59,5^\circ) = -17,23 \text{ B}$ .

Результаты расчета представлены на графике рис. 3.5.

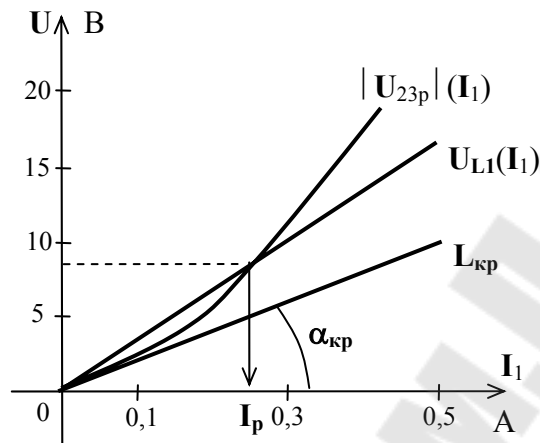


Рис. 3.5

Нелинейный резонанс может иметь место только в том случае, если характеристики  $U_L(I_1)$  (линейная) и  $|U_{23p}|I_1$  (нелинейная) пересекаются. Следовательно,

$$L_{1кр} = m_R \operatorname{tg} \alpha_{кр} \frac{1}{\omega} = \frac{20 \text{ Ом}}{10^3 \text{ с}^{-1}} = 20 \text{ мГн},$$

и нелинейный резонанс имеет место, если  $L_1 > L_{1кр} = 20 \text{ мГн}$ .

В рабочем режиме  $x_1 = 30 \text{ Ом}$ . ВАХ для этого случая  $U_{L1}(I_1)$  пересекаются с ВАХ  $(U_{23p})I_1$  при  $I_{1p} = 2,5 \text{ A}$ , что соответствует результату, полученному по графику  $\varphi_{вх}(I_1)$ .

### 3.3. Численно-аналитический метод последовательных приближений (итераций)

Согласно методу итераций, расчетное уравнение цепи должно быть относительно неизвестной  $X$  преобразовано к виду

$$X = \varphi(X). \quad (3.5)$$

Нулевое приближение решения уравнения (1)  $\mathbf{X}(0)$  выбирается либо из физических соображений, либо предварительной локализацией корней.

Затем решение уточняется по формуле (3.5). Итерационная формула, таким образом, имеет вид

$$\mathbf{X}_{(s+1)} = \varphi(\mathbf{X}_s). \quad (3.6)$$

Решение сходится к единственному корню уравнения (1), если функция  $\varphi(\mathbf{X})$  имеет непрерывную производную  $\varphi'(\mathbf{X})$  и  $|\varphi'(\mathbf{X})| \leq q \leq 1$ , Скорость сходимости определяется неравенством [3]

$$|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_n| \leq \frac{q}{1-q} |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0|, \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{X}^*$  - действительное значение корня.

Из формулы (3.7), в частности, следует, что скорость сходимости метода итерации зависит от величины  $q$ . Чем меньше  $q$ , тем быстрее сходимость. Аналитическая проверка условия сходимости может оказаться весьма сложной. Поэтому сходимость проверяется либо в процессе вычислений, либо по косвенным признакам. Так, если вольт-амперная характеристика имеет вогнутость, обращенную к оси токов, то итерационная формула должна быть составлена относительно тока, и если к оси напряжений – относительно напряжения.

Блок-схема метода простых итераций  $\mathbf{X}_{S+1} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_S)$  представлена на рис. 3.6.

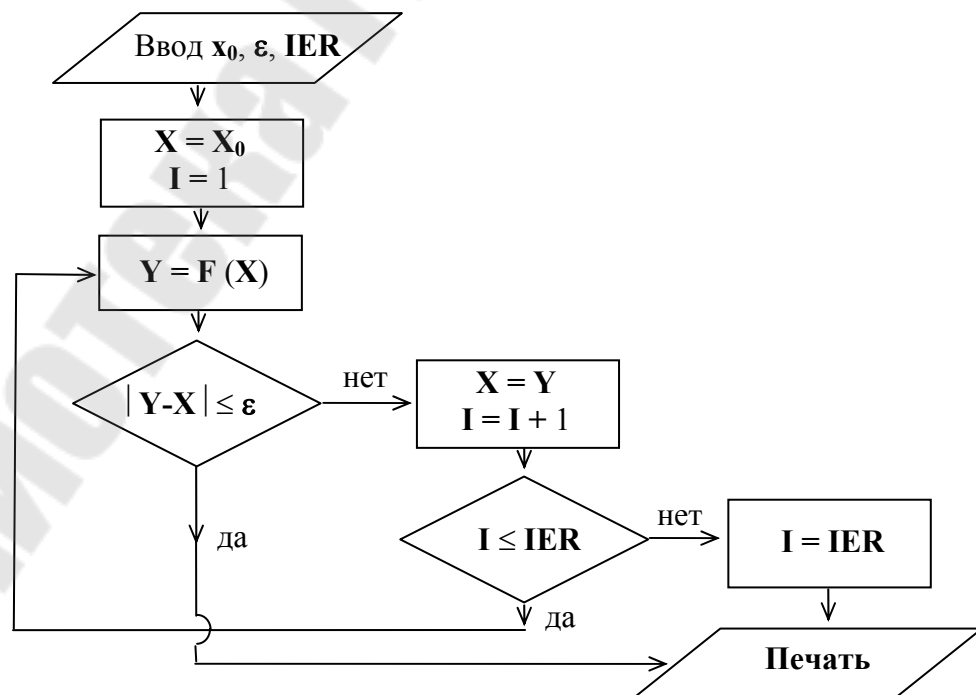


Рис. 3.6

В блок-схеме приняты обозначения:

$\varepsilon$  - точность расчета;

$IER$  - допустимое число итераций, целая константа, вводится для предотвращения закливания.

Если  $I > IER$ , а необходимая точность не достигнута, на печать выводится “ $IER$ ”. Если необходимая точность достигнута за число итераций  $I < IER$ , то на печать выводится значение корня  $x$ .

### Пример 3.3

Рассчитать токи в схеме примера 3.2 методом итераций.

*Решение*

Поскольку кривая  $U_c(I)$  обращена вогнутостью к оси токов, то для обеспечения сходимости итераций будем составлять расчетную формулу для напряжения  $U_c$ . Для получения расчетного уравнения заменим нелинейный элемент в данной рабочей точке линейным со статическим сопротивлением  $X_c(s) = \frac{U_c(s)}{I_c(s)}$ ,  $I_c(s) = I_3(s)$ .

В схеме два узла, поэтому удобно записать уравнение по методу узловых напряжений

$$\underline{U}_c = \underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{12}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = \underline{E} \underline{Y}. \quad (a)$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{1}{30\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 2,36 \cdot 10^{-2} e^{-j45^\circ} = (1,67 - j1,67) \cdot 10^{-2}, \text{ Ом}^{-1},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \text{ Ом}^{-1},$$

$$\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 2,67 \cdot 10^{-2} - j2,67 \cdot 10^{-2}, \text{ Ом}^{-1}.$$

После подстановки числовых данных в формулу (a), получим итерационную формулу

$$\underline{U}_{12(s+1)} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3(s)} = \frac{0,47 e^{-j15^\circ}}{2,67 \cdot 10^{-2} - j1,67 \cdot 10^{-2} + j\underline{Y}_3(s)}. \quad (b)$$



$$\underline{Y}_3(s) = \frac{\underline{I}_3(s)}{\underline{U}_{12}(s)}. \quad (c)$$

Расчет нулевого приближения  $S = 0$  начинаем с выбора  $\underline{U}_{12(0)}$ . Из физических соображений выберем  $\underline{U}_{12(0)} < E = 20$  В. Пусть  $\underline{U}_{12(0)} = 10$  В. По характеристике нелинейного элемента определим  $\underline{I}_{3(0)} = 0,25$  А и  $\underline{Y}_{3(0)} = \frac{\underline{I}_{3(0)}}{\underline{U}_{12(0)}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$  Ом<sup>-1</sup>. Найденное значение  $\underline{Y}_{3(0)}$  подставим в формулу (2) и рассчитаем  $\underline{U}_{12(1)}$  первого приближения. Далее расчет повторяется. Результаты расчета сведены в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

Номер итерации	$\underline{Y}_3(s) = \underline{I}_3(s) / \underline{U}_{12}(s)$	$\underline{U}_{12}(s+1)$ (по формуле 2)	$\underline{I}_3(s+1)$ (по ВАХ)
	Ом <sup>-1</sup>	В	А
0	$2,5 \cdot 10^{-2}$	16,78 (2,3°)	0,31
1	$1,84 \cdot 10^{-2}$	17,7 (-18,6°)	0,32
2	$1,7 \cdot 10^{-2}$	17,6 (-17,8°)	0,32

Поскольку после второго приближения изменение напряжения  $\underline{U}_{12}$  составляет  $\epsilon \% = \frac{17,7 - 17,6}{17,6} \cdot 100 \% = 0,568 \%$ , можно закончить итерационный процесс.

Ответ:  $\underline{U}_c = \underline{U}_{12} = 17,6 e^{-j17,8^\circ}$ , В;  $\underline{I}_3 = 0,32 e^{j81,2^\circ}$ , А.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, И.А. Ионкин, А.В. Нетушин, С.В. Страхов. – М.: Энергия, 1989. – 527 с.
2. Л.Р. Нейман, К.С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. Т.2. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
3. Л.И. Турчак. Основы численных методов. – М.: “Наука”, 1982. – 317 с.
4. Л.И. Бородич, А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, И.Н. Мелешко. Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики. – Мн.: “Вышэйшая школа”, 1986. – 50-55 с.
5. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие для вузов /под ред. проф. П.А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

# **НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

**Практикум  
по курсу «Теоретические основы электротехники»  
для студентов специальности 1-36 04 02  
«Промышленная электроника»  
дневной и заочной форм обучения**

Автор-составитель: **Бычкова** Лилия Геннадьевна

Подписано в печать 27.06.06.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.

Цифровая печать. Усл. печ. 2,56 л. Уч. - изд. л. 2,7.

Изд. № 40.

E-mail: [ic@gstu.gomel.by](mailto:ic@gstu.gomel.by)

<http://www.gstu.gomel.by>

Отпечатано на МФУ XEROX WorkCentre 35 DADF

с макета оригинала авторского для внутреннего использования.

Учреждение образования «Гомельский государственный технический  
университет имени П.О. Сухого».

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48, т. 47-71-64.