

УДК 62-83:621.313.333

## ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ОДНОФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ С ЛИНЕЙНОЙ ПРУЖИНОЙ НА ВАЛУ

**В.И. ЛУКОВНИКОВ, Л.В. ВЕППЕР**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### **Введение**

Эффективность применения безредукторного электропривода возвратно-вращательного (колебательного) движения с мягким реверсом обусловлена тем, что он позволяет не только уменьшить металлоемкость и исключить электромеханические удары в рабочей машине, но и осуществить плавное оперативное регулирование частоты и амплитуды колебаний, облегчить интеграцию привода с рабочим инструментом, повысить динамические и энергетические показатели, а значит, в целом повысить производительность рабочей машины и качество выпускаемой продукции.

Первые работы по созданию теории и практическому внедрению безредукторных электроприводов мягкого колебательного движения основывались на принципе возбуждения качающегося магнитного поля в воздушном зазоре асинхронного электродвигателя [1] или электрической машины двойного питания [2].

В последнее время нами разрабатываются колебательные электроприводы на совершенно новом принципе – создании условий возникновения устойчивого автоколебательного режима в электромеханической системе «однофазный асинхронный электродвигатель – упругий элемент» [3].

Автоколебательный асинхронный электропривод чрезвычайно прост в реализации, поскольку для него в отличие от традиционных колебательных приводов не требуются достаточно сложные силовые электронные блоки модуляции сетевого напряжения для электропитания обмоток, а достаточно статорные обмотки общепромышленного асинхронного электродвигателя подключить к однофазной электросети и на валу разместить пружину или маятник.

Предварительные исследования [4] показали, что введение пружинного или маятникового элемента хотя и упростило колебательный электропривод, но привело к бифуркациям его движения на:

- устойчивое нулевое состояние равновесия;
- предельный неустойчивый автоколебательный цикл;
- предельный устойчивый автоколебательный цикл;
- смещение нейтрали колебаний;
- вращение.

### **Цель работы**

Создать математическое обеспечение для анализа и синтеза условий возникновения, устойчивости и бифуркаций автоколебаний в однофазном асинхронном электродвигателе (ОАД) с пружиной на валу как научной основы его выбора в качестве силового элемента автоколебательного электропривода.

**Метод достижения цели**

Опуская предварительные математические преобразования, подобные частному случаю, рассмотренному в статье [4], запишем уравнение движения ОАД с пружиной на валу в канонической форме

$$\ddot{\varphi} + \varphi = -\mu_2 \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}) + (\mu_3 - \mu_1) \cdot \dot{\varphi} - \mu_4 \cdot \dot{\varphi}^3 + \mu_5 \cdot \dot{\varphi}^5 + \mu_6 \cdot \dot{\varphi}^7, \quad (1)$$

где  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$  – относительная угловая координата положения вала АД и ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по относительному времени;

$\mu_1$ ,  $\mu_2$  – коэффициенты нагрузки жидкостным и сухим трением;

$\mu_3$  – коэффициент электромагнитного демпфирования ОАД;

$\mu_4$ ,  $\mu_5$ ,  $\mu_6$  – коэффициенты полиномиальной аппроксимации механической характеристики АД.

**1. Условия равновесных состояний**

Представим уравнение (1) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \Omega, \\ \dot{\Omega} = -\varphi - \mu_2 \text{Sign}\Omega + (\mu_3 - \mu_1)\Omega - \mu_4\Omega^3 + \mu_5\Omega^5 - \mu_6\Omega^7. \end{cases} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение интегральных кривых получится делением второго уравнения на первое

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{-\varphi - \mu_2 \text{Sign}\Omega + (\mu_3 - \mu_1)\Omega - \mu_4\Omega^3 + \mu_5\Omega^5 - \mu_6\Omega^7}{\Omega}. \quad (3)$$

Координаты точек равновесия, то есть особые точки семейства интегральных кривых на фазовой плоскости, найдем, приравнявая к нулю правые части системы (2).

$$\begin{cases} \Omega = 0, \\ -\varphi - \mu_2 \text{Sign}\Omega + (\mu_3 - \mu_1)\Omega - \mu_4\Omega^3 + \mu_5\Omega^5 - \mu_6\Omega^7 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Видно, что существует одна особая точка в начале координат, для которой  $\Omega = 0$ ,  $\varphi = 0$ .

Определим устойчивость этого состояния равновесия. Для этого запишем переменные в виде

$$\begin{cases} \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega, \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Так как  $\Omega_0 = \varphi_0 = 0$  координаты особой точки, то после подстановки (5) в (2) получим в отклонениях

$$\begin{cases} \dot{\Delta\varphi} = \Delta\Omega \\ \dot{\Delta\Omega} = -\Delta\varphi - \mu_2 \text{Sign}\Delta\Omega + (\mu_3 - \mu_1)\Delta\Omega - \mu_4\Delta\Omega^3 + \mu_5\Delta\Omega^5 - \mu_6\Delta\Omega^7. \end{cases} \quad (6)$$

Аппроксимируя функцию  $Sign(\Delta\Omega)$  функцией  $\frac{2}{\pi} \cdot arctg(b \cdot \Delta\Omega)$  и используя разложение в степенной ряд, запишем

$$Sign(\Delta\Omega) = \frac{2}{\pi} \cdot arctg(b \cdot \Delta\Omega) = \frac{2b}{\pi} \Delta\Omega - \frac{8b^3 \Delta\Omega^3}{3\pi^3} + \dots,$$

где  $b$  – крутизна касательной к функции  $arctg$  в начале координат. После подстановки этого ряда во второе уравнение системы (6) и отбрасывания членов со степенями выше первой (слагаемые высших порядков малости) получим систему линейных уравнений для малых отклонений

$$\begin{cases} \Delta \dot{\varphi} = \Omega, \\ \Delta \dot{\Omega} = -\Delta\varphi - \frac{2b\mu_2}{\pi} \Delta\Omega + (\mu_3 - \mu_1)\Delta\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Корни характеристического уравнения системы (7) найдутся через определитель

$$\begin{vmatrix} 0 - p & 1 \\ -1 & \mu_3 - \mu_1 - \frac{2b\mu_2}{\pi} - p \end{vmatrix} = p^2 - \left( \mu_3 - \mu_1 - \frac{2b\mu_2}{\pi} \right) p + 1 = 0$$

в виде

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \mu_3 - \mu_1 - \frac{2b\mu_2}{\pi} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \mu_3 - \mu_1 - \frac{2b\mu_2}{\pi} \right)^2 - 1}.$$

Очевидно, что при  $b \rightarrow \infty$  корни  $p_{1,2}$  всегда отрицательны, следовательно, рассматриваемое состояние равновесия устойчиво.

Если же сухое трение отсутствует ( $\mu_2 = 0$ ), то состояние равновесия устойчиво при  $\mu_3 < \mu_1$ , когда суммарное нагрузочное и электромагнитное демпфирование положительно, и неустойчиво при  $\mu_3 > \mu_1$ , когда суммарное демпфирование отрицательно.

Этот вывод совпадает с известным результатом для линейного осциллятора.

## 2. Наличие предельных циклов автоколебаний

Будем искать уравнение радиусов и условие устойчивости предельных циклов автоколебаний по методу Ван-дер-Поля.

С этой целью запишем уравнение (1) через малый параметр  $\mu$  в виде

$$\ddot{\varphi} + \varphi = \mu [-\mu_{2,0} Sign \dot{\varphi} + (\mu_{3,0} - \mu_{1,0}) \dot{\varphi} - \mu_{4,0} \dot{\varphi}^3 + \mu_{5,0} \dot{\varphi}^5 - \mu_{6,0} \dot{\varphi}^7], \quad (8)$$

где  $\mu_{2,0} = \mu_2/\mu, \dots, \mu_{6,0} = \mu_6/\mu$ .

Решение будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_m \cos \lambda, \quad (9)$$

дополнив его по идее метода вариации постоянной связью

$$\dot{\varphi} = -\varphi_m \sin \lambda. \quad (10)$$

Подстановками (9) и (10) в (8), а также (9) в (10) получим

$$\begin{cases} -\dot{\varphi}_m \sin \lambda - \varphi_m \dot{\lambda} \cos \lambda + \varphi_m \cos \lambda = \mu [\mu_{2,0} \text{Sign}(\varphi_m \sin \lambda) - \\ - (\mu_{3,0} - \mu_{1,0}) \varphi_m \sin \lambda + \mu_{4,0} \varphi_m^3 \sin^3 \lambda - \mu_{5,0} \varphi_m^5 \sin^5 \lambda + \mu_{6,0} \varphi_m^7 \sin^7 \lambda], \\ \dot{\varphi}_m \cos \lambda - \varphi_m \dot{\lambda} \sin \lambda + \varphi_m \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений относительно  $\varphi_m$ , найдем

$$\dot{\varphi}_m = -\mu \sin \lambda [\mu_{2,0} \text{Sign}(\varphi_m \sin \lambda) - (\mu_{3,0} - \mu_{1,0}) \varphi_m \sin \lambda + \\ + \mu_{4,0} \varphi_m^3 \sin^3 \lambda - \mu_{5,0} \varphi_m^5 \sin^5 \lambda + \mu_{6,0} \varphi_m^7 \sin^7 \lambda].$$

Заменим как и ранее  $\text{Sign}(\varphi_m \sin \lambda) = \frac{2}{\pi} \arctg(b \cdot \varphi_m \sin \lambda)$ , а затем считая, что амплитуда  $\varphi_m$  по сравнению с фазой  $\lambda$  является «медленной переменной» усредним это уравнение по  $\lambda$ , то есть выделим справа постоянные составляющие и получим

$$\dot{\varphi}_m = -\mu \left[ \frac{2\mu_{2,0}}{\pi \cdot b \varphi_m} (\sqrt[+]{(b\varphi_m)^2 + 1} - 1) - \frac{\mu_{3,0} - \mu_{1,0}}{2} \varphi_m + \right. \\ \left. + \frac{3\mu_{4,0}}{8} \varphi_m^3 - \frac{3\mu_{5,0}}{16} \varphi_m^5 + \frac{9\mu_{6,0}}{64} \varphi_m^7 \right].$$

Знак  $\sqrt[+]$  означает, что учитываются только положительные значения корня.

При установившихся автоколебаниях  $\dot{\varphi}_m = 0$  поэтому уравнением радиусов (амплитуд  $\varphi_m$ ) предельных циклов будет

$$\frac{9\mu_{6,0}}{64} \varphi_m^8 - \frac{3\mu_{5,0}}{16} \varphi_m^6 + \frac{3\mu_{4,0}}{8} \varphi_m^4 - \frac{\mu_{3,0} - \mu_{1,0}}{2} \varphi_m^2 + \frac{2\mu_{2,0}}{\pi} \left( \sqrt[+]{\varphi_m^2 + \frac{1}{b} - \frac{1}{b}} \right) = 0.$$

Переходя к пределу  $b \rightarrow \infty$ , то есть приближая «arctg» к «Sign», найдем для предельных циклов

$$\varphi_m^8 - \frac{4\mu_{5,0}}{3\mu_{6,0}} \varphi_m^6 + \frac{8\mu_{4,0}}{3\mu_{6,0}} \varphi_m^4 - \frac{32(\mu_{3,0} - \mu_{1,0})}{9\mu_{6,0}} \varphi_m^2 + \frac{128\mu_{2,0}}{9\pi\mu_{6,0}} \sqrt[+]{\varphi_m^2} = 0. \quad (11)$$

Автоколебания будут устойчивыми, если производная от данного уравнения по  $\varphi_m$  будет отрицательна. Следовательно, условием устойчивости является с учетом в (11) сомножителя  $\sqrt[+]{\varphi_m^2}$

$$-\varphi_m^7 + \frac{\mu_{5,0}}{\mu_{6,0}} \varphi_m^5 - \frac{4\mu_{4,0}}{3\mu_{6,0}} \varphi_m^3 + \frac{8(\mu_{3,0} - \mu_{1,0})}{9\mu_{6,0}} \varphi_m - \frac{16\mu_{2,0}}{9\pi\mu_{6,0}} < 0. \quad (12)$$

Уравнение (11) дает первый корень  $\varphi_{m1} = 0$ , что говорит о вырождении предельного цикла в особую точку.

Она устойчива, если выполняется неравенство, полученное из (12) при подстановке  $\varphi_m = 0$ ,

$$-\frac{16\mu_{2,0}}{9\pi\mu_{6,0}} < 0.$$

Так как  $\mu_{2,0} > 0$  и  $\mu_{6,0} > 0$ , то это неравенство выполняется всегда.

Если сухое трение отсутствует ( $\mu_{2,0} = 0$ ), то из (12) получим неравенство

$$\frac{8(\mu_{3,0} - \mu_{1,0})}{9\mu_{6,0}} < 0,$$

которое выполняется при  $\mu_{3,0} < \mu_{1,0}$  и не выполняется при  $\mu_{3,0} > \mu_{1,0}$ .

Эти результаты совпадают с полученными ранее в разделе 1.

Остальные корни определяются из уравнения

$$\varphi_m^7 - \frac{4\mu_{5,0}}{3\mu_{6,0}}\varphi_m^5 + \frac{8\mu_{4,0}}{3\mu_{6,0}}\varphi_m^3 - \frac{32(\mu_{3,0} - \mu_{1,0})}{9\mu_{6,0}}\varphi_m + \frac{128\mu_{2,0}}{9\pi\mu_{6,0}} = 0. \quad (13)$$

Аналитическое решение этого уравнения, записанное в замкнутой форме, не существует. Можно найти численными методами приближенные значения его корней  $\varphi_{m2}, \dots, \varphi_{m8}$ , оставить для анализа вещественные и положительные, чтобы далее подстановкой в (12) установить, которые из них дают устойчивые предельные циклы.

Для получения инженерных аналитических соотношений, пригодных для исследования, с целью определения бифуркаций, рассмотрим «усеченное» уравнение (13), отбросив члены с  $\varphi_m^7$  и  $\varphi_m^5$  из-за малости коэффициентов при них.

Это уравнение сводится к виду

$$\varphi_m^3 - \frac{4}{3}\lambda_1 \cdot \varphi_m + \frac{16}{3\pi}\lambda_2 = 0, \quad (14)$$

где  $\lambda_1 = (\mu_{3,0} - \mu_{1,0})/\mu_{4,0}$ ,  $\lambda_2 = \mu_{2,0}/\mu_{4,0}$ .

С целью получения общего бифуркационного параметра, пронормируем уравнение (14) введением новой переменной

$$\rho = \varphi_m \cdot \sqrt[3]{3\pi/16\lambda_2}.$$

После преобразования получим

$$c^3 - \nu c + 1 = 0, \quad (15)$$

где  $\nu = \sqrt[3]{\frac{p^2}{12}} \cdot \frac{\lambda_1}{\sqrt[3]{\lambda_2^2}} \approx 0,93693 \frac{\lambda_1}{\sqrt[3]{\lambda_2^2}}$ .

В соответствии с теорией кубического алгебраического уравнения можно получить, что при  $\beta < 3/\sqrt[3]{4} \approx 1,889882$  корни уравнения (15) отрицательные и мнимые, что говорит об отсутствии предельных циклов.

При  $\beta \geq 3/\sqrt[3]{4}$  имеются один отрицательный и два положительных корня, равных

$$\rho_{1,2} = \sqrt[3]{\beta/3} \cdot \cos(60^\circ \mp \varphi/3), \quad (16)$$

где  $\varphi = \arccos\left(0,5\sqrt{(3/\beta)^3}\right)$ .

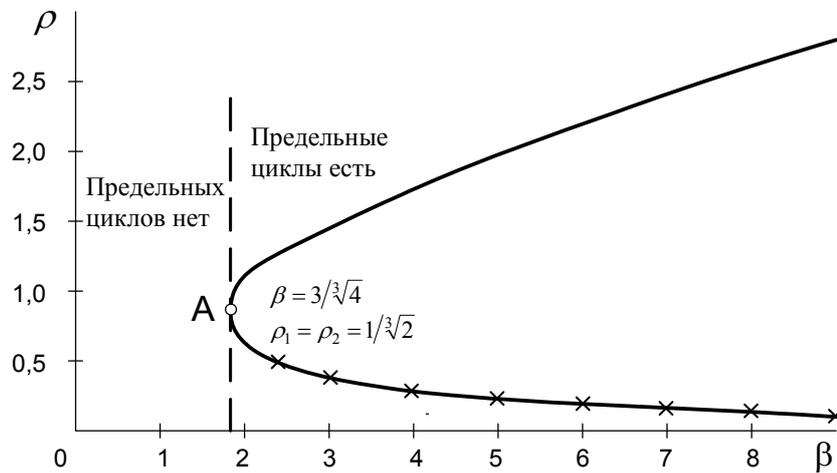
Эти корни дают предельные циклы автоколебаний на фазовой плоскости, устойчивость которых можно определить по условию (12). В «усеченном» виде (12) через переменную  $\rho$  можно записать так

$$\rho^3 - 0,5\beta\rho + 0,25 > 0. \quad (17)$$

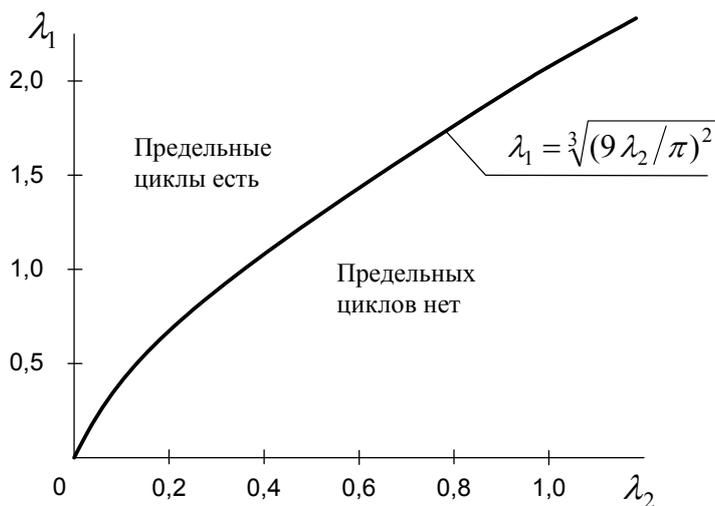
Прямой подстановкой (16) в (17) можно убедиться, что устойчивыми являются предельные циклы для больших ( $\rho_1$ ) и неустойчивыми для меньших ( $\rho_2$ ) радиусов.

При  $\beta = 3/\sqrt[3]{4}$  эти циклы сливаются в один и дают полуустойчивый цикл с радиусом  $\rho_1 = \rho_2 = 1/\sqrt[3]{2}$ .

На рисунке 1а представлена бифуркационная диаграмма, на которой параметром бифуркаций является величина  $\beta$ .



а)



б)

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма (а) и граница раздела существования и отсутствия предельных циклов автоколебаний (б)

Предельные циклы вне кривой  $\rho(\beta)$  не существуют. Верхняя часть кривой определяет устойчивые, а нижняя (помечена крестиками) – неустойчивые циклы, точка А (координаты указаны на графике) дает полуустойчивый цикл.

Из экспликации к (15) следует, что параметр  $\beta$  связывает две величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соотношением

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{p^2}{12}} \cdot \frac{\lambda_1}{\sqrt[3]{\lambda_2^2}}.$$

Тогда по условию  $\beta = 3/\sqrt[3]{4}$  можно получить уравнение границы

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{(9\lambda_2/\pi)^2}, \quad (18)$$

разделяющей области существования и отсутствия предельных циклов автоколебаний (рис. 1б).

Для определения бифуркационных диаграмм в реальных амплитудах автоколебаний через параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  осуществим обратные замены в (16), после чего получим

$$\varphi_{m1,2} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot \text{Cos}\left(60^\circ \mp \frac{\varphi}{3}\right), \quad (19)$$

$$\varphi = \text{arcCos}(9\lambda_2/p\sqrt{\lambda_1^3}).$$

При расчете диаграмм по (19) параметры бифуркаций  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  задаются в соответствии с рисунком 1б или соотношением (18).

По представленным на рисунке 2а бифуркационным диаграммам видно, что рост параметра  $\lambda_2$ , который определяется сухим трением, уменьшает амплитуду предельных устойчивых циклов (верхняя часть кривых), но увеличивает амплитуду неустойчивых циклов (нижняя часть кривых). При значениях  $\lambda_2$ , связанных с  $\lambda_1$  соотношением (18), циклы сливаются и становятся полуустойчивыми (точки А<sub>1</sub>, А<sub>2</sub>, А<sub>3</sub>). Этот результат с точностью до коэффициентов совпадает с полученным в [6].

Рост же параметра  $\lambda_1$ , который определяется превышением электромагнитного восстанавливающего демпфирования АД ( $\mu_{3,0}$ ) над демпфированием от жидкого трения, приводит к росту амплитуды устойчивых колебаний и уменьшению амплитуды неустойчивых, начиная с точек А<sub>1</sub>, А<sub>2</sub>, А<sub>3</sub> полуустойчивых циклов.

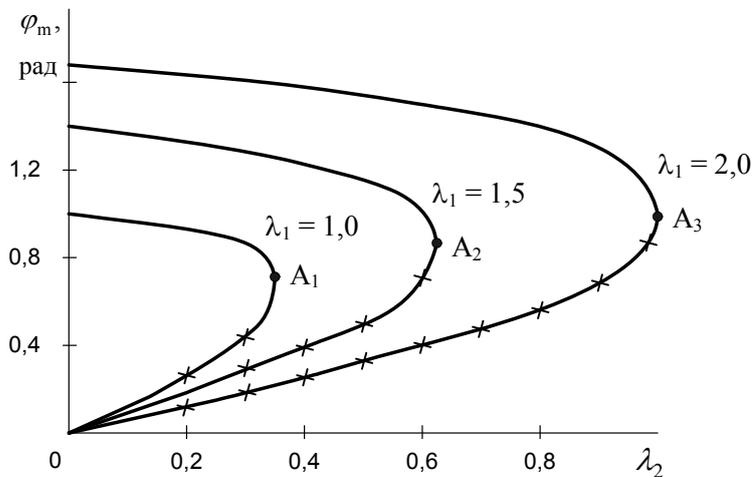
Таким образом, кривая  $\lambda_1(\lambda_2)$  на рисунке 1б является сепаратрисой, фиксирующей области существования и отсутствия предельных циклов.

Изложенное иллюстрируется изображенными на рисунке 3 характерными фазовыми портретами рассматриваемой автоколебательной системы.

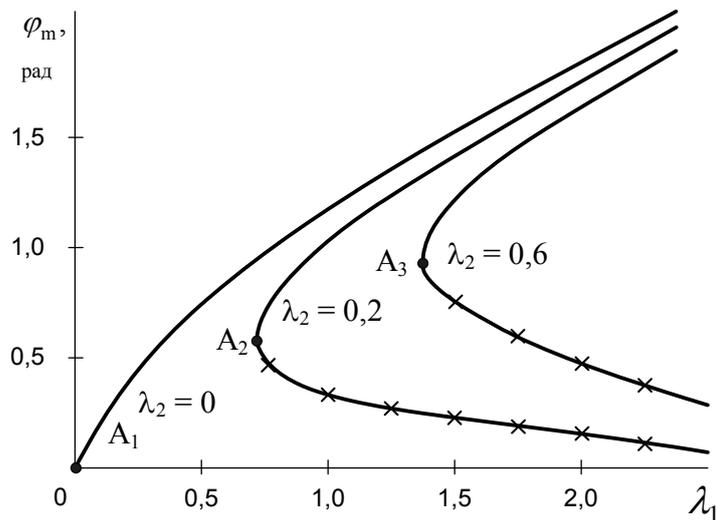
Наличие устойчивого и неустойчивого фокуса (рис. 3б, в) было показано в разделе 1, а отсутствие вращательного движения при использовании пружинного КРЭ не только очевидно физически, но и легко подтверждается прямой подстановкой в (8) предполагаемого решения при вращении  $\varphi = \Omega \cdot \tau$ . Поведение системы при нулевых значениях бифуркационных параметров достаточно просто проанализировать по уравнениям (8) или (14).

Например, при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , когда согласно экспликаций к (14) должно быть  $\mu_{1,0} = \mu_{2,0} = \mu_{3,0} = 0$ , что означает отсутствие в автоколебательной системе АД сухого и жидкостного трения, в уравнении движения (8) исчезает правая часть и остается

хорошо исследованное уравнение гармонического осциллятора без потерь, дающее на фазовой плоскости один устойчивый цикл автоколебаний (рис. 3а).



а)



б)

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы в координатах «амплитуда – сухое трение» (а) и «амплитуда – суммарное демпфирование» (б)

При  $\lambda_2 = 0$ , что означает отсутствие сухого трения, из уравнения (14) получаем три корня

$$\begin{aligned} \varphi_{m1} &= 0, \\ \varphi_{m2,3} &= \pm 2\sqrt{\lambda_1/3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Первый корень дает устойчивый фокус при  $\lambda_1 < 0$  (рис. 3б) и неустойчивый при  $\lambda_1 > 0$  (рис. 3в). В последнем случае положительный корень (19) дает один устойчивый предельный цикл.

Результаты по фазовым траекториям электромеханической автоколебательной системы с пружинным и пружинно-маятниковым КРЭ сведены в таблицу 1.

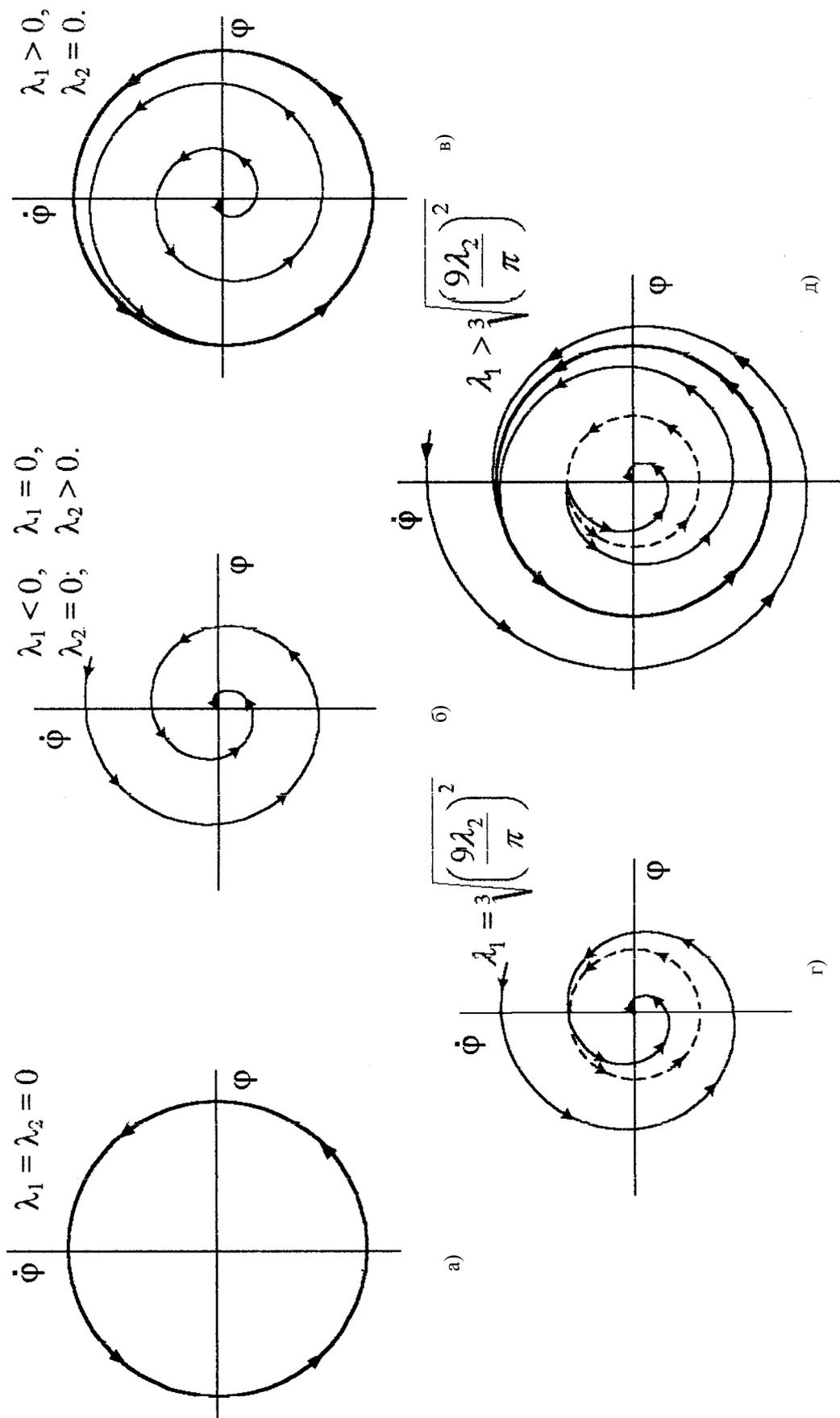


Рис. 3. Фазовые портреты автоколебательной электромеханической системы с пружинным и пружинно-маятниковым КРЭ: устойчивый предельный цикл (а); устойчивый фокус (б); неустойчивый фокус с предельным устойчивым циклом (в); неустойчивый предельный цикл с устойчивым фокусом (г); один предельный устойчивый и один неустойчивый циклы с устойчивым фокусом (д)

**Фазовые траектории автоколебательной электромеханической системы  
с пружинным и пружинно-маятниковым КРЭ**

| Вид фазовой траектории<br>Параметры | Устойчивый предельный цикл | Устойчивый фокус | Неустойчивый фокус с устойчивым предельным циклом | Неустойчивый фокус с полуустойчивым предельным циклом | Неустойчивый фокус с одним неустойчивым и другим устойчивым предельными циклами  |
|-------------------------------------|----------------------------|------------------|---|---|--|
| $\lambda_1$                         | 0                          | 0 или $< 0$      | $> 0$   | $\sqrt[3]{(9\lambda_2/\pi)^2}$                        | $> \sqrt[3]{(9\lambda_2/\pi)^2}$   |
| $\lambda_2$                         | 0                          | $> 0$ или 0      | 0   | $\pi\sqrt{\lambda_1^3}/9$                             | $< \pi\sqrt{\lambda_1^3}/9$  |
| $\varphi_{m1}$ (уст.)               | $\varphi(+0)$              | –                | $2\sqrt{\lambda_1}/3$                             | –   | $\frac{4\sqrt{\lambda_1}}{3}\text{Cos}\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right)$ ,<br>$\text{Cos}\varphi = 9\lambda_2/\pi\sqrt{\lambda_1^3}$ |
| $\varphi_{m2}$ (неуст.)             | –                          | –                | –   | $\pi\sqrt{\lambda_1}/3$                               | $\frac{4\sqrt{\lambda_1}}{3}\text{Cos}\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right)$ ,<br>$\text{Cos}\varphi = 9\lambda_2/\pi\sqrt{\lambda_1^3}$ |

### Заключение

Проведенные исследования автоколебательного движения ОАД с линейной пружиной на валу показали, что имеются его бифуркации в виде:

- устойчивый предельный цикл;
- устойчивый фокус;
- неустойчивый фокус с устойчивым предельным циклом;
- неустойчивый фокус с полуустойчивым предельным циклом;
- неустойчивый фокус с одним неустойчивым и другим устойчивым предельным циклами.

Определяющие эти виды движения аналитические соотношения, представленные в таблице 1, определяют собой основы методики научно-обоснованного выбора общепромышленного АД в качестве силового элемента автоколебательного электропривода.

### Литература

1. Луковников В.И. Электропривод колебательного движения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
2. Аристов А.В. Электропривод колебательного движения с машиной двойного питания. – Томск: Изд.-полиграфическая фирма ТПУ, 2000. – 176 с.
3. Луковников В.И., Тодарев В.В., Веппер Л.В. Автоколебательный режим однофазного асинхронного электродвигателя //Известия ВУЗов и ЭО СНГ. Энергетика. – 1998. – № 2. – С. 45-49.
4. Веппер Л.В. Анализ уравнения движения асинхронного автоколебательного электропривода //Сборник материалов межвузовской конференции аспирантов и студентов. – Гомель: ГКИ-ГПИ, 1997. – С. 25-27.

Получено 01.10.2001 г.