Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 8

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

К ОБОБЩЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ЛАМЕ—ДАРБУ

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым I IX 1946*)

Еще Ламе поставил задачу нахождения всех триортогональных систем в эвклидовом пространстве E_3, для которых уравнение Лапласа допускает, так называемое, полное разделение переменных (см. ([1,2])).

Эта проблема допускает различные обобщения (неэвклидовы пространства, неполное разделение переменных, число измерений $n>3$, более общее дифференциальное уравнение).

В настоящей работе мы находим все триортогональные системы в трехмерном пространстве S_3 постоянной кривизны $k\gtrless 0$, для которых уравнение $\Delta_2 u=0$ допускает полное разделение переменных, где Δ_2 — второй дифференциальный параметр Бельтрами, отвечающий линейному элементу S_3.

Следующая таблица содержит окончательные результаты этого исследования: в ней перечислены все отвечающие поставленной задаче формы линейного элемента $ds^2=\sum_{i=1}^{3} h_i^2 d\rho_i^2$ (с точностью до нормировки параметров $\rho_i=f_i(\bar{\rho}_i)$, $i=1, 2, 3$) и искомые триортогональные системы (с точностью до движения); уравнения соответствующих поверхностей записаны в вейерштрассовых координатах ξ, η, ζ, p

$$\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\frac{1}{k}p^2=\frac{1}{k};\quad ds^2=d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+\frac{1}{k}\,dp^2\right).$$

1) $$d\rho_1^2+\frac{1}{k}\sin^2\sqrt{k}\rho_1 d\rho_2^2+\cos^2\sqrt{k}\rho_1 d\rho_3^2,\quad k\gtrless 0.$$

$$k(\xi^2+\eta^2)=\sin^2\sqrt{k}\rho_1,\quad \eta=\xi\operatorname{tg}\rho_2,\quad \zeta\sqrt{k}=p\operatorname{tg}\sqrt{k}\rho_3.$$

2) $$d\rho_1^2+e^{2\sqrt{-k}\rho_1}(d\rho_2^2+d\rho_3^2),\quad k<0.$$

$$p-\sqrt{-k}\xi=e^{\sqrt{-k}\rho_1},\quad \eta=\rho_2(p-\sqrt{-k}\xi),\quad \zeta=\rho_3(p-\sqrt{-k}\xi).$$

3) $$A\sin^2\sqrt{k}\rho_3+d\rho_3^2,\quad k\gtrless 0.$$

$$A\equiv-\frac{1}{4k}(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{d\rho_1^2}{(\rho_1-a)(\rho_1-b)(\rho_1-c)}-\frac{d\rho_2^2}{(\rho_2-a)(\rho_2-b)(\rho_2-c)}\right).$$

$$a>\rho_1>b>\rho_2>c.$$

$$\frac{\xi^2}{a-\rho_i}+\frac{\eta^2}{b-\rho_i}+\frac{\zeta^2}{c-\rho_i}=0\ (i=1, 2),\quad p=\cos\sqrt{k}\rho_3.$$

4) $$\frac{1}{k}\sin^2\sqrt{k}\rho_3\,(d\rho_1^2+\sin^2\rho_1 d\rho_2^2)+d\rho_3^2,\quad k\gtrless 0.$$

$$\xi^2+\eta^2=\zeta^2\sin^2\rho_1,\quad \eta=\xi\operatorname{tg}\rho_2,\quad p=\cos\sqrt{k}\rho_3.$$

5) $$A\operatorname{ch}^2\sqrt{-k}\rho_3+d\rho_2^2,\quad k<0,\quad \rho_1<c<b<a<\rho_2.$$

$$\frac{\xi^2}{a-\rho_i}+\frac{\eta^2}{c-\rho_i}+\frac{p^2}{k(b-\rho_i)}=0\ (i=1,2),\quad \zeta=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\rho_3}{\sqrt{-k}}.$$

6) * $$\rho_1<c<\rho_2<b<a,\quad k<0.$$

$$\frac{\xi^2}{c-\rho_i}+\frac{\eta^2}{b-\rho_i}+\frac{p^2}{k(a-\rho_i)}=0\quad (i=1,2).$$

7) $$\rho_2<a<\rho_1,\quad b=\gamma+\delta i,\quad c=\gamma-\delta i,\quad k<0.$$

$$\frac{\xi^2}{a-\rho_i}+\frac{(\gamma-\rho_i)(k\eta^2+p^2)-2\delta\sqrt{-k}\eta p}{k[(\gamma-\rho_i)^2+\delta^2]}=0\quad (i=1,2).$$

8) $$\rho_1>a>\rho_2,\quad c=b<a,\quad k<0.$$

$$\frac{\xi^2}{a-\rho_i}+\frac{k\eta^2+p^2}{k(b-\rho_i)}\pm\frac{(\eta\sqrt{-k}-p)^2}{k(b-\rho_i)^2}=0\quad (i=1,2.$$

9) $$\rho_1>a>\rho_2,\quad c=b=a,\quad k<0.$$

$$\left(\frac{\xi\sqrt{-k}-p}{a-\rho_i}-\eta\sqrt{-k}\right)^2=p^2+k\xi^2\quad (i=1,2).$$

10) $$\operatorname{ch}^2\sqrt{-k}\rho_3\,(d\rho_1^2+\operatorname{sh}^2\sqrt{-k}\rho_1 d\rho_2^2)+d\rho_3^2,\quad k<0.$$

$$p^2=(1-k\zeta^2)\operatorname{ch}^2\sqrt{-k}\rho_1,\quad \eta=\xi\operatorname{tg}\sqrt{-k}\rho_2.$$

11) $$\operatorname{ch}^2\sqrt{-k}\rho_3\,(d\rho_1^2+\operatorname{ch}^2\sqrt{-k}\rho_1 d\rho_2^2)+d\rho_3^2,\quad k<0.$$

$$-k\eta^2=(p^2+k\xi^2)\operatorname{th}^2\sqrt{-k}\rho_1,\quad \xi\sqrt{-k}=p\operatorname{th}\sqrt{-k}\rho_2.$$

12) $$\operatorname{ch}^2\sqrt{-k}\rho_3\,(d\rho_1^2+e^{-2\sqrt{-k}\rho_1}d\rho_2^2)+d\rho_3^2,\quad k<0.$$

$$1-k\zeta^2=e^{2\sqrt{-k}\rho_1}(p-\sqrt{-k}\xi)^2,\quad \eta=\rho_2(p-\sqrt{-k}\xi).$$

13) $$e^{2\sqrt{-k}\rho_3}(d\rho_1^2+\rho_1^2 d\rho_2^2)+d\rho_3^2,\quad k<0.$$

$$\eta^2+\zeta^2=\rho_1^2(p-\sqrt{-k}\xi)^2,\quad \zeta=\eta\operatorname{tg}\rho_2,\quad p-\sqrt{-k}\xi=e^{\sqrt{-k}\rho_3}.$$

---

* Там, где не указан линейный элемент, предполагается, что он имеет тот же вид, что и в соответствующей предыдущей рубрике; то же относится и к третьему семейству поверхностей в случаях 6—12, 14—15.

14) $$e^{2\sqrt{-k}\rho_3}(\rho_1^2+\rho_2^2)(d\rho_1^2+d\rho_2^2)+d\rho_3^2, \quad k<0.$$

$$[(p-\sqrt{-k}\xi)\rho_i^2-\sqrt{\eta^2+\zeta^2}]^2=\eta^2 \quad (i=1, 2).$$

15) $$e^{2\sqrt{-k}\rho_3}(\operatorname{ch}2\rho_1-\cos 2\rho_2)(d\rho_1^2+d\rho_2^2)+d\rho_3^2, \quad k<0.$$

$$\frac{\eta^2}{\operatorname{ch}^2\rho_1}+\frac{\zeta^2}{\operatorname{sh}^2\rho_1}=(p-\sqrt{-k}\xi)^2, \quad \frac{\eta^2}{\cos^2\rho_2}-\frac{\zeta^2}{\sin^2\rho_2}=(p-\sqrt{-k}\,\xi)^2.$$

16) $$A-\frac{1}{k}(\rho_1-a)(a-\rho_2)\,d\rho_3^2, \quad k\gtrless 0.$$

$$c<b<\rho_2<a<\rho_1, \quad k<0; \qquad c<\rho_2<b<\rho_1<a, \quad k>0.$$

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{a-\rho_i}+\frac{\zeta^2}{-\rho_i}+\frac{p^2}{k(c-\rho_i)}=0 \ (i=1, 2), \quad \frac{\xi}{\eta}=\operatorname{tg}\sqrt{(a-b)(a-c)}\,\rho_3.$$

17) $$A-\frac{1}{k}(\rho_1-b)(\rho_2-b)\,d\rho_3^2, \quad k\gtrless 0.$$

$$c<b<\rho_2<a<\rho_1, \quad k<0; \qquad c<\rho_2<b<\rho_1<a, \quad k>0.$$

$$\frac{\xi^2}{a-\rho_i}+\frac{\eta^2+\zeta^2}{b-\rho_i}+\frac{p^2}{k(c-\rho_i)}=0 \ (i=1, 2), \quad \frac{\eta}{\zeta}=\operatorname{tg}\sqrt{(c-b)(b-a)}\,\rho_3.$$

18) $$A-\frac{1}{k}(\rho_1-a)(a-\rho_2)\,d\rho_3^2, \quad k<0, \quad \rho_2<c<b<a<\rho_1.$$

$$\frac{\xi^2}{c-\rho_i}+\frac{\eta^2+\zeta^2}{a-\rho_i}+\frac{p^2}{k(b-\rho_i)}=0 \ (i=1, 2), \quad \frac{\eta}{\zeta}=\operatorname{tg}\sqrt{(c-a)(b-a)}\,\rho_3.$$

19) $$A-\frac{1}{k}(c-\rho_1)(c-\rho_2)\,d\rho_3^2, \quad k<0, \quad c<b<\rho_2<a<\rho_1.$$

$$\frac{\xi^2}{a-\rho_i}+\frac{\eta^2}{b-\rho_i}+\frac{k\zeta^2+p^2}{k(c-\rho_i)}=0 \ (i=1, 2), \quad \frac{\zeta}{p\sqrt{-k}}=\operatorname{th}\sqrt{(c-a)(c-b)}\,\rho_3.$$

20) $$A-\frac{1}{k}(c-\rho_1)(\rho_2-c)\,d\rho_3^2, \quad k<0, \quad \rho_2<c<b<a<\rho_1.$$

$$\frac{\xi^2}{c-\rho_i}+\frac{k\eta^2+p^2}{k(b-\rho_i)}+\frac{\zeta^2}{a-\rho_i}=0 \ (i=1, 2), \quad \frac{\eta}{p\sqrt{-k}}=\operatorname{th}\sqrt{(a-b)(b-c)}\,\rho_3.$$

21) $$A-\frac{1}{k}(\rho_1-a)(a-\rho_2)\,d\rho_3^2, \quad k<0; \quad \rho_1>a>\rho_2,$$

$$b=\gamma+\delta i, \quad c=\gamma-\delta i.$$

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{a-\rho_i}+\frac{(\gamma-\rho_i)(k\zeta^2+p^2)-2\delta\sqrt{-k}\zeta p}{k[(\gamma-\rho_i)^2+\delta^2]}=0 \quad (i=1, 2),$$

$$\xi=\eta\operatorname{tg}\sqrt{(a-\gamma)^2+\delta^2}\,\rho_3.$$

22) $$A - \frac{1}{k}(\rho_1 - c)(c - \rho_2)\, d\rho_3^2, \quad k < 0; \quad \rho_1 > c > \rho_2, \quad a = b.$$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a - \rho_i} + \frac{k\zeta^2 + p^2}{k(c - \rho_i)} + \frac{(\zeta\sqrt{-k} - p)^2}{k(c - \rho_i)^2} = 0 \ (i = 1, 2), \quad \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tg}(a - c)\rho_3.$$

23) $$A \pm \frac{1}{k}(\rho_1 - a)(\rho_2 - a)\, d\rho_3^2, \quad k < 0; \quad \rho_2 < c < \rho_1, \quad a = b.$$

$$\frac{\xi^2}{c - \rho_i} + \frac{k(\eta^2 + \zeta^2) + p^2}{k(a - \rho_i)} \pm \frac{(\zeta\sqrt{-k} - p)^2}{k(a - \rho_i)^2} = 0 \ (i = 1, 2),$$

$$\frac{\eta\sqrt{-k}}{\zeta\sqrt{-k} - p} = \sqrt{|a - c|}\,\rho_3.$$

24) $$A - \frac{1}{k}(\rho_1 - a)(a - \rho_2)\, d\rho_3^2, \quad k < 0; \quad \rho_1 > a > \rho_2, \quad a = b = c.$$

$$\left(\frac{p - \xi\sqrt{-k}}{a - \rho_i} + \sqrt{1 - k\eta^2}\right)^2 + k\eta^2 = 0 \ (i = 1, 2), \quad \frac{\zeta\sqrt{-k}}{p - \xi\sqrt{-k}} = \rho_3.$$

25) $$-\frac{1}{4k}\left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)}{(\rho_1 - a)(\rho_1 - b)(\rho_1 - c)(\rho_1 - d)}\, d\rho_1^2 + \ldots\right], \quad k \gtrless 0.$$

$$d < c < \rho_3 < b < \rho_2 < a < \rho_1, \ k < 0; \ d < \rho_3 < c < \rho_2 < b < \rho_1 < a, \ k > 0.$$

$$\frac{\xi^2}{a - \rho_i} + \frac{\eta^2}{b - \rho_i} + \frac{\zeta^2}{c - \rho_i} + \frac{p^2}{k(d - \rho_i)} = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad k \gtrless 0.$$

26) $$\rho_3 < d < c < b < \rho_2 < a < \rho_1, \quad k < 0.$$

$$\frac{\xi^2}{d - \rho_i} + \frac{\eta^2}{b - \rho_i} + \frac{\zeta^2}{a - \rho_i} + \frac{p^2}{k(c - \rho_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

27) $$\rho_3 < b < \rho_2 < a < \rho_1, \quad c = \gamma + \delta i, \quad d = \gamma - \delta i; \quad k < 0.$$

$$\frac{\xi^2}{a - \rho_i} + \frac{\eta^2}{b - \rho_i} + \frac{(\gamma - \rho_i)(k\zeta^2 + p^2) - 2\delta\sqrt{-k}\,\zeta p}{k[(\gamma - \rho_i)^2 + \delta^2]} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

28) $$\rho_3 < b < \rho_2 < a < \rho_1, \quad c = d < b; \quad k < 0.$$

$$\frac{\xi^2}{a - \rho_i} + \frac{\eta}{b - \rho_i} \pm \frac{(\zeta\sqrt{-k} - p)}{k(c - \rho_i)^2} + \frac{k\zeta^2 + p^2}{k(c - \rho_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

29) $$\rho_3 < d < \rho_2 < a < \rho_1, \quad d < c = b; \quad k < 0.$$

$$\frac{\xi^2}{d - \rho_i} + \frac{\zeta^2}{a - \rho_i} \pm \frac{(\eta\sqrt{-k} - p)^2}{k(b - \rho_i)^2} + \frac{k\eta^2 + p^2}{k(b - \rho_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

30) $$\rho_3 < b < \rho_2 < a < \rho_1, \quad d = c = b; \quad k < 0.$$

$$\frac{\xi^2}{a - \rho_i} + \frac{(\zeta\sqrt{-k} - p)^2}{(b - \rho_i)^3} + \frac{2(\zeta\sqrt{-k} - p)\eta}{(b - \rho_i)^2} + \frac{k(\eta^2 + \zeta^2) + p^2}{k(b - \rho_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Поступило
1 IX 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Darboux, Systèmes orthogonaux, 1910. [2] В. В. Степанов, Мат. сб., 11, (53) (1942).