

# БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЗВОНКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

К. С. Курочка, И. Л. Стефановский  
Кафедра «Информационные технологии»,  
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого  
Гомель, Республика Беларусь  
E-mail: kurochka@gstu.by, igorst@pisem.net

*Изложено построение биомеханической модели позвонка методом конечных элементов. Построенная модель позволяет оценить напряженно-деформированное состояние позвонка в различных фазах остеопороза. Получена зависимость перемещений на верхней суставной поверхности позвонка от изменения плотности костной ткани в результате заболевания.*

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из перспективных областей приложения метода конечных элементов (МКЭ) является биомеханика. С помощью математических моделей, построенных с использованием МКЭ, возможно оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов позвоночника в различных состояниях (переломы, смещения, травмы и т. д.) при функциональных нагрузках, провести анализ различных методов восстановления после травм [1].

Такие биомеханические модели могут быть использованы для выбора оптимальной фиксирующей конструкции, вариантов крепления ее к позвоночнику. При этом возможно проводить анализ позвоночника, варьируя параметры (свойства) исследуемых элементов, таких как плотность костной ткани, модуль упругости, пластичности, геометрические параметры позвоночника, при различных заболеваниях, включая остеопороз.

Остеопороз – обменное заболевание скелета, которое характеризуется снижением плотности костей, усилением хрупкости, по причине нарушения метаболизма костной ткани, снижением прочности костей и повышением риска переломов. Построенная модель позволяет оценить НДС в различных фазах остеопороза, предсказать риск развития переломов в том числе при таком заболевании.

## 1. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Для получения достоверных оценок НДС конкретного случая необходимо использовать результаты компьютерной томографии позвоночника конкретного пациента и на ее основе проводить моделирование [2].

Модель позвонка, полученная на основе данных компьютерной томографии, изображена на рис. 1. Решение данной задачи будем искать методом конечных элементов.

Воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\int_R \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_R b_i \delta v_i dV - \int_{\partial_2 R} t_i \delta v_i dA = 0. \quad (1)$$

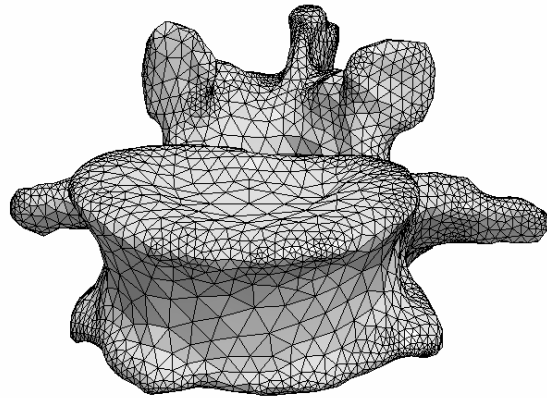


Рис. 1 – Модель позвонка

Соотношение между деформациями и перемещениями:

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Для разработанной модели материал был принят однородным и упругим. Соотношение между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) получим (4).

В качестве конечного элемента выберем тетраэдр. После дискретизации определим интерполяцию полей перемещений  $u_i(x)$  и виртуальных перемещений  $\delta v_i(x)$  как

$$u_i(x) = \sum_{a=1}^n N^a(x) u_i^a; \quad (5)$$

$$\delta v_i(x) = \sum_{a=1}^n N^a(x) \delta v_i^a. \quad (6)$$

После подстановки (5) и (6) в (4) получим (7).

Представим матрицу жесткости  $k_{aibk}^{(l)}$  и вектор сил  $f_i^{a(l)}$  элемента  $l$  в виде:

$$k_{aibk}^{(l)} = \int_{V_e^{(l)}} C_{ijkl} \frac{\partial N^a(x)}{\partial x_j} \frac{\partial N^b(x)}{\partial x_l} dV;$$

$$f_i^{a(l)} = \int_{V_e^{(l)}} b_i N^a(x) dV + \int_{\partial_2 V_e^{(l)}} t_i^* N^a(x) dA;$$

где  $V_e^{(l)}$ ,  $\partial_2 V_e^{(l)}$  – объем и поверхность элемента  $l$ . Для аппроксимации перемещений воспользуемся следующими функциями формы:

$$N^1 = \xi_1; N^2 = \xi_2; N^3 = \xi_3;$$

$$N^4 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3;$$

в локальной системе координат. Координаты узлов удовлетворяют требованиям:  $-1 \leq \xi_i \leq +1$ .

После формирования глобальных матриц жесткости и сил

$$K_{aibk} = \sum_{l=1}^{N_{lmn}} k_{aibk}^{(l)}; F_i^a = \sum_{l=1}^{N_{lmn}} f_i^{a(l)};$$

решив систему

$$K_{aibk} u_k^b = F_i^a;$$

получим вектор перемещения  $u_k^b$  в узлах элемента.

## II. РЕЗУЛЬТАТЫ

Постепенное уменьшение плотности костной ткани позвонка было использовано для моделирования изменений в кости при остеопорозе. Нагрузка прикладывалась к верхней концевой пластинке и верхней суставной поверхности. Прикладываемая статическая нагрузка соответствует нагрузке, приходящейся на позвонок стоящего или идущего человека массой 70 кг [3, 4]. В качестве граничных условий были использованы полное защемление поверхности нижней концевой пластинки и нижней суставной поверхности (перемещения во всех направлениях равны нулю). Модель была разбита на 6824 тетраэдра. Наибольшее перемещение наблюдалось на верхней суставной поверхности и составило (без уменьшения плотности костной ткани) 0,091 мм.

Полученные результаты зависимости перемещений на верхней суставной поверхности от уменьшения плотности кости позвонка представлены на рис. 2. Сопоставление с результатами исследования [5] показало сходимость, достаточную для практического применения. При уменьшении плотности кости на 15 % перемещения увеличились на 18 %.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная конечно-элементная модель подверглась компрессионной нагрузке для изучения поведения позвонка. Для предсказания максимальных значений перемещений элементов позвонка в различных фазах остеопороза, использовалось изменение плотности костной ткани позвонка для моделирования изменений в кости при остеопорозе.

Разработанная модель может быть полезна для оценки поведения кости позвонка на различных стадиях остеопороза.

1. Middleton, J. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering / J. Middleton, Gyan Pande, M. L. Jones. – Boca Raton: CRC Press, 1999. – 852 p.
2. Noriyasu, H. Theory and Applications of CT Imaging and Analysis – Rijeka: InTech, 2011. – 300 p.
3. White, A. A. Clinical biomechanics of the spine / A. A. White, M. M. Panjabi. – Philadelphia: J.B. Lippincott Company, 1990. – 752 p.
4. Lai, C. C. The load sharing contribution of spinal facet joint during impact loading – a porcine biomechanical model / C. C. Lai, J. L. Wang, G. L. Chang, C. H. Chung // ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition. – Washington, 2003.
5. Jovanović, J. D. Finite element modeling of the vertebra with geometry and material properties retrieve from CT-scan data / J. D. Jovanović, M. L. Jovanović // Mechanical Engineering. – 2010. – Vol. 8, No 1. – p. 19-26

$$\int_R C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dV - \int_R b_i \delta v_i dV - \int_{\partial_2 R} t_i^* \delta v_i dA = 0. \quad (4)$$

$$\int_R C_{ijkl} \frac{\partial N^b(x)}{\partial x_l} u_k^b \frac{\partial N^a(x)}{\partial x_j} \delta v_i^a dV - \int_R b_i N^a(x) \delta v_i^a dV - \int_{\partial_2 R} t_i^* N^a(x) \delta v_i^a dA = 0. \quad (7)$$

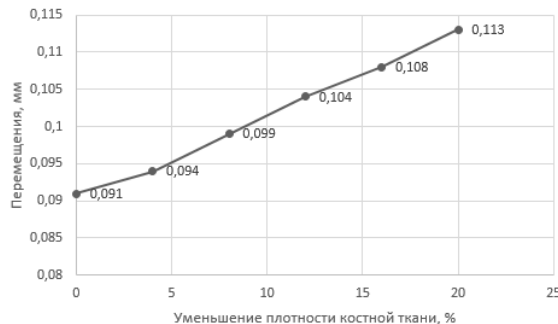


Рис. 2 – Зависимость перемещений на верхней суставной поверхности от уменьшения плотности костной ткани