Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

В. И. Вальковская, В. И. Лашкевич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по курсам «Высшая математика» и «Математика»
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения

Гомель 2013

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5я73
В16

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 8 от 25.03.2013 г.*)

Рецензент: доц. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *И. И. Злотников*

Вальковская, В. И.

В16 Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление : учеб.-метод. пособие по курсам «Высшая математика» и «Математика» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / В. И. Вальковская, В. И. Лашкевич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 108 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by/. – Загл. с титул. экрана.

Содержит основные понятия, определения, формулы и доказательства наиболее важных теорем по разделам «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление».

Многие теоремы и задачи удачно иллюстрируются чертежами и графиками, что помогает лучше осмысливать данный раздел математики.

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5я73

ГЛАВА 1
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1.1. Комплексные числа

Число $z = x + iy$, где x и y – любые действительные числа, а i – мнимая единица, называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются:

$$x = \operatorname{Re} z \text{ или } R(z),$$
$$y = \operatorname{Im} z \text{ или } I(z).$$

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные и мнимые части, т.е. равенство $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ равносильно двум равенствам: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Так как две точки, определенные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат, совпадают тогда и только тогда, когда они имеют равные абсциссы и равные ординаты, то можно установить взаимнооднозначное соответствие между всевозможными точками плоскости, с одной стороны, и всевозможными комплексными числами – с другой. Иначе говоря, будем изображать комплексное число $z = x + iy$ с помощью точки, абсцисса которой равна x, а ордината y; тогда всякое комплексное число изображается с помощью вполне определенной точки плоскости, и обратно всякой точке (x, y) плоскости будет соответствовать вполне определенное комплексное число $z = x + iy$. Можно действительной и мнимой частям комплексного числа поставить в соответствие не координаты точки, а координаты вектора, т.е. взятые с соответствующим знаком проекции на координатные оси вектора, начало которого совмещено с началом координат, и, следовательно, изображать комплексные числа с помощью векторов (рис. 1.)

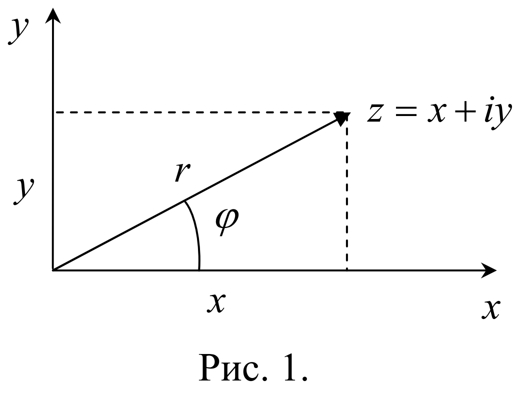

Рис. 1.

Действительные числа изображаются точками, лежащими на оси $0x$; эту ось называют действительной осью. Числа, действительные части которых равны нулю изображаются с помощью точек, лежащих на оси $0y$. Эту ось называют мнимой осью.

Положение точки, изображающей комплексное число z, можно определить также с помощью полярных координат r и φ, т.е. с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величины угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси. Числа r и φ будем называть соответственно модулем и аргументом комплексного числа z и пользоваться обозначением

$$r = |z|,\ \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Для действительного числа введенное здесь понятие модуля совпадает с понятием абсолютной величины. Модулем чисто мнимого числа является абсолютная величина его мнимой части.

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + iy$, то

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = |z|\cos(\operatorname{Arg} z),\\ y &= r\sin\varphi = |z|\sin(\operatorname{Arg} z). \end{aligned} \tag{1.1}$$

и

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Величина $\operatorname{Arg} z$ многозначная и определена лишь с точностью до целого числа 2π. В качестве главного значения величины $\operatorname{Arg} z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами:

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi.$$

Главное значение аргумента z обозначают $\arg z$, тогда:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x, & \text{если } x > 0,\\ \pi + \operatorname{arctg} y/x, & \text{если } x < 0,\ y \le 0,\\ -\pi + \operatorname{arctg} y/x, & \text{если } x < 0,\ y < 0,\\ \pi/2, & \text{если } x = 0,\ y > 0,\\ -\pi/2, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пользуясь формулами (1.1), можно всякое комплексное число, отличное от нуля, представить в так называемой тригонометрической форме:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.3)$$

С помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ можно перейти от тригонометрической формулы (1.3) к показательной

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (1.4)$$

Пример 1.

а) $z = 1 + i$. $\quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = 1$, $\quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Тогда

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

б) $z = i$. $\quad r = \sqrt{1} = 1$; $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \infty$, $\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

$$z = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1e^{i\pi/2}.$$

в) $z = 1$. $\quad r = 1$; $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = 0$, $\quad \varphi = 0$.

$$z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1e^{i0} = 1.$$

г) $z = -2$. $\quad r = \sqrt{(-2)^2} = 2$; $\quad \varphi = \pi$.

$$z = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}.$$

д) $z = -3i$. $\quad r = \sqrt{(-3)^2} = 3$; $\quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

$$z = -3i = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\pi/2}.$$

Два комплексные числа, имеющие одну и ту же действительную часть, а мнимые части которых равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, называются взаимно сопряженными. Число, сопряженное числу z, обозначается $\bar{z}$. Если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Из этого определения следует, что если $\omega = \bar{z}$, то $z = \overline{\omega}$ и, следовательно, $\bar{\bar{z}} = z$.

Модули взаимно сопряженных чисел одинаковы, а аргументы отличаются только знаком:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

Всякое действительное число совпадает с числом, ему сопряженным. Сопряженные числа изображаются точками, взаимно-симметричными относительно действительной оси.

§ 1.2. Действия над комплексными числами

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов; последнее из этих правил дополняется требованием замены $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, …. При записи результата действий, произведенных над комплексными числами следует отделить действительную часть от мнимой.

Пусть даны два комплексных числа: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда

$$\text{а)}\ z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\text{б)}\ z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \qquad (1.5)$$

$$\text{в)}\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\cdot\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

В частности следует, что произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2, \text{ т.е. } z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Сумма двух взаимно-сопряженных комплексных чисел также является действительным числом:

$$(x + iy) + (x - iy) = 2x, \text{ т.е. } z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z.$$

Если изобразить комплексное число с помощью вектора, то его действительная и мнимая части будут являться координатами вектора, а так как при сложении или вычитании векторов их координаты соответственно складываются или вычитаются, то сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению или вычитанию векторов, изображающих эти числа.

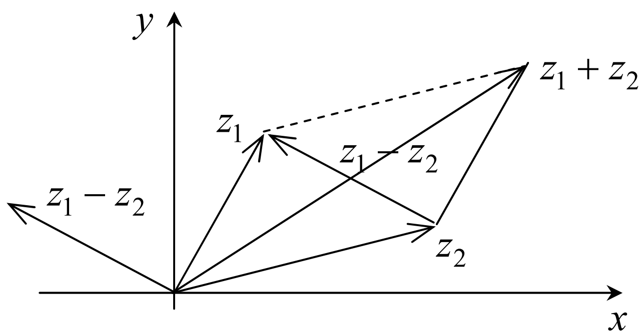

Рис. 2.

Если воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то имеем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

Вектор, изображающий произведение $z_1 z_2$, может быть получен из вектора, изображающего число z_1, поворотом на угол φ_2, образованный вектором z_2 с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину вектора z_2.

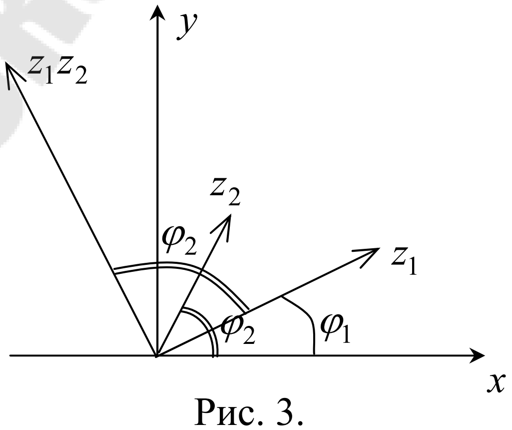

Рис. 3.

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, приводит к формуле:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right],\quad \text{т.е.}$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \tag{1.7}$$

Из правил умножения (1.6) следует правило возведения в целую положительную степень:
если

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

то

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

т.е.

$$|z^n|=|z|^n,\ \operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}z.$$

Пользуясь правилом деления, нетрудно проверить, что эти формулы остаются справедливыми и при целом отрицательном n.

Извлечь корень целой положительной степени n из числа z значит найти такое число $\omega=\sqrt[n]{z}$, n-я степень которого равна z. В соответствии с правилом возведения в степень имеем:

$$|\omega^n|=|z|,\ n\operatorname{Arg}\omega=\operatorname{Arg}z.$$

Если обозначить:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$
$$\omega=\rho(\cos\theta+\sin\theta),$$

то, учитывая, что аргумент комплексного числа содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π, получим:

$$\rho^n=r,\ n\theta=\varphi+2k\pi,\ (k=0,\pm1,\pm2).$$

Так как r и ρ – положительные числа, то первое из этих равенств однозначно определяет ρ, а именно: $\rho=\sqrt[n]{r}$ (берется арифметическое значение корня).

Из второго равенства находим:

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

и формула, с помощью которой можно извлекать корень из любого комплексного числа, примет вид:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{1.8}$$

Из формулы следует, что имеется лишь n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$, которые можно получить, полагая $k = 0,1,2,...,n-1$.

Способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$ таков: из начала координат, как из центра, описываем окружность, радиус которой $\sqrt[n]{|z|}$. Проведя из начала координат луч, направленный к положительному направлению действительной оси под углом в n раз меньшим, чем угол, образованный с тем же направлением лучом, идущим из начала координат в точку z, мы найдем на окружности точку, соответствующую одному из значений $\sqrt[n]{z}$. Вписав в окружность правильный n-угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, мы построим точки, соответствующие остальным значениям корня.

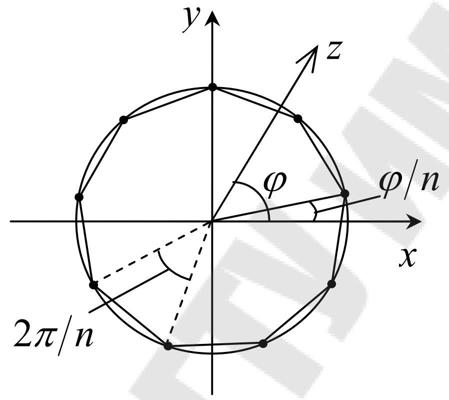

Рис.4.

Пример 1. Даны числа: $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 4-2i$.

Найти: $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = 2+3i+4-2i = 6+i$;

б) $z_1 - z_2 = 2+3i-4+2i = -2+5i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(4-2i) = 8+6+i(12-4) = 14+8i$.

Пример 2. Найти значения $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение.

Приводим комплексное число $1-i$ к тригонометрическому виду:

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}; \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=-\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi/4+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi/4+2k\pi}{4}\right).$$

Полагаем: $k=0,1,2,3$, найдем:

$$k=0 \qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$k=1 \qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right),$$

$$k=2 \qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right),$$

$$k=3 \qquad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\sin\frac{23}{16}\pi\right).$$

Пример 3. Вычислить $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$.

Решение.

Представим число $z=-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Следовательно, т.к. $z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, то применяя приведенную выше формулу возведения в степень, получим

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right]=$$

$$=2^{60}\left[\cos 40\pi+i\sin 40\pi\right]=2^{60}.$$

Пример 4. Найти частное $\frac{2+2i}{3-5i}$.

Решение.

Умножаем числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{2+2i}{3-5i}=\frac{(2+2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{6-10+i(6+10)}{9+25}=\frac{-4+i16}{34}=$$

$$= -\frac{4}{34} + i\frac{16}{34} = -\frac{2}{17} + i\frac{8}{17}.$$

Пример 5. Какое множество точек на плоскости комплексного переменного z определяется условием $\operatorname{Im} z^2 > 2$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$. Тогда $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Следовательно, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$.

Согласно условию задачи имеем $2xy > 2$ или $xy > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой $xy = 1$.

Пример 6. Какая область определяется условиями:

$$1 \le |z - 1 - i| \le 2, \quad \pi/4 \le |\arg z| \le \pi/2.$$

Решение.

Пусть $z = x + iy$, тогда $|z - 1 - i| = |x + iy - 1 - i| = |x - 1 + i(y - 1)| =$ $= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. Следовательно, $1 \le (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2^2$.

Тогда искомая область – часть кольца, ограниченного двумя лучами $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ и $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$, и окружностями радиусов $r = 1$, $r = 2$ с центром в точке $z = 1 + i$.

Пример 7. Какая область определяется условием: $|z| + \operatorname{Re} z < 1$.

Решение.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $|z| = \rho$, $\operatorname{Re} z = \rho\cos\varphi$. По условию имеем $\rho + \rho\cos\varphi < 1$, откуда

$$\rho < \frac{1}{1 + \cos\varphi}.$$

Этому условию удовлетворяют все точки, лежащие в области, ограниченной кривой:

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos\varphi}$$

(уравнение параболы в полярных координатах).

Пример 8. Какая кривая определяется уравнением $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$. Имеем:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

По условию $\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$ или $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ – окружность радиуса 2 с центром в точке (2;0).

Пример 9. Найти действительные решения уравнения:

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Решение.

Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части: $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$. Отсюда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим: $x = 2$, $y = 1$.

Пример 10. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $z = -\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$.

Решение.

Имеем: $x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0$, $y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0$. Главным значением аргумента будет:

$$\arg z = -\pi + \mathrm{arctg}\left[\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}\right] = -\pi + \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= -\pi + \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{3}{8}\pi\right) = -\pi + \frac{3}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Arg}\, z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1.$$

§ 1.3. Функции комплексного переменного

Говорят, что на некотором множестве точек, изображающих значения комплексного переменного z, задана функция $w = f(z)$, если каждой точке z (каждому значению z) этого множества поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) или большее число (в случае многозначной функции) значений w.

Множество точек, на котором задана функция $w = f(z)$ будет или совокупность всех точек плоскости, или всей плоскостью, за исключением отдельных ее точек, или односвязной, либо многосвязной областью, являющейся частью плоскости, ограниченной одной или несколькими гладкими или кусочно-гладкими кривыми, из которой могут быть удалены отдельные точки.

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y, являющихся соответственно действительной и мнимой частями $z = x + iy$, а числу w точно так же однозначно соответствует пара действительных чисел u и w ($w = u + iv$), то зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексным аргументом z равносильна двум зависимостям:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \tag{1.9}$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных аргументов x и y.

Например, если $w = z^2$, то, полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим $u + iv = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy$ и, следовательно, равенство $w = z^2$ равносильно равенствам:

$$u = x^2 - y^2,$$
$$v = 2xy.$$

Если значения аргумента z изображать с помощью точек некоторой плоскости («плоскости z»), а значения функции w с помощью точек другой плоскости («плоскости w»), то функция $w = f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости z, в которых эта функция определена, и точками плоскости w, другими словами, функция осуществляет отображение точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w.

Обозначим символом q множество точек плоскости, на котором определена функция $w = f(z)$, а символом G множество, состоящее из тех точек плоскости w, на которые с помощью функции $w = f(z)$ отображаются точки множества q. Выбрав определенную точку множества G, найдем те точки множества q, которые отобразились в выбранную точку, т.е. каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества q. В соответствии с определением функции это означает, что на множестве G определена некоторая функция $z = \varphi(w)$, которую называют обратной по отношению к функции $w = f(z)$.

Если в плоскости z кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

то для того, чтобы найти уравнение кривой c в плоскости w, на которую отображается кривая c, с помощью функции $w = f(z)$, достаточно исключить x и y из уравнений:

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y) \text{ и } F(x, y) = 0.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t),$$

то, подставляя $x(t)$, $y(t)$ вместо x, y в формулы $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, получим уравнение кривой c также в параметрическом виде:

$$u = u[x(t), y(t)] = \varphi_1(t)$$
$$v = v[x(t), y(t)] = \varphi_2(t)$$

Пример 1. Найти уравнение линий плоскости w, на которые с помощью функции $w = z^2$ отображаются прямые, параллельные координатным осям плоскости z.

Решение.

Равенство $w = z^2$ равносильно равенствам

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy, \quad \text{где } z = x + iy, w = u + iv. \end{cases} \tag{1.10}$$

Образ прямых $x = c$, параллельных мнимой оси плоскости z, получим, исключая x и y из уравнения $x = c$ и уравнений (1.10):

$$u = c^2 - y^2$$
$$v = 2cy,$$

откуда $u = c^2 - \dfrac{v^2}{4c^2}$.

Мы получили уравнение некоторого семейства парабол, симметричных относительно оси $0u$, вершины которых находятся на положительной части этой оси и которые обращены вогнутостью в сторону отрицательной части оси $0u$. Мнимая ось $x = 0$ плоскости z отобразится на линию

$$\begin{aligned} u &= -y^2 \\ v &= 0. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Второе из этих равенств показывает, что линия (1.11) расположена на оси $0u$, а из первого следует, что u может принимать любые значения, для которых $u \le 0$, следовательно, мнимая ось $x = 0$ плоскости z отображается на отрицательную часть действительной оси плоскости w:

$$u \le 0, \quad v = 0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что семейство прямых $y = c$, параллельных действительной оси плоскости z, отобразится в семейство парабол $u = \dfrac{v^2}{4c^2} - c^2$ плоскости w, причем действительная ось $y = 0$ плоскости z отобразится в положительную часть действительной оси плоскости w:

$$u \ge 0, \quad v = 0$$

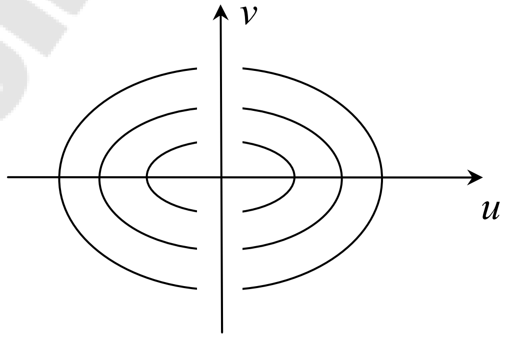

Рис. 5.

Следует заметить, что параметрические уравнения линии в плоскости z:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

могут быть заданы одним уравнением:

$$z = z(t),$$

где $z(t) = x(t) + y(t)$.

Пример 2. Уравнение задано в виде: $z = \cos t + i\sin t$ и является уравнением окружности радиуса 1 с центром в начале координат, так как оно равносильно уравнениям

$$x = \cos t,$$

$$y = \sin t.$$

Уравнение кривой в плоскости w, на которую с помощью функции $w = f(z)$ отображается кривая $z = z(t)$, имеет вид $w = f(z(t))$.

Пример 3. Найти образ прямой $z = (1+i)t$ при отображении $w = z^3$.

Решение.

Уравнение $z = (1+i)t$ равносильно системе уравнений $x = t$, $y = t$ и определяет в плоскости z биссектрису первого координатного угла $y = x$.

С помощью функции $w = z^3$ эта биссектриса отображается на линию $w = (1+i)^3 t^3$ или $w = (-2+2i)t^3$. Откуда:

$$u = -2t^3$$

$$v = 2t^3.$$

Исключая параметр t, получим $v = -u$ – уравнение биссектрисы второго координатного угла плоскости w.

Пример 4. Пусть $w = z^3 - i\bar{z}$. Найти действительную и мнимую части функции.

Решение.

Полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим

$$u + iv = (x+iy)^3 - i(x - iy) = \left(x^3 - 3xy^2 - y\right) + i\left(3x^2y - y^3 - x\right).$$

Следовательно, равенство $w = z^3 - i\bar{z}$ равносильно двум равенствам:

$$u = x^3 - 3xy^2 - y$$

$$v = 3x^2 y - y^3 - x.$$

Пример 5. В какую кривую отображается единичная окружность $|z| = 1$ с помощью функции $w = z^2$.

Решение.

Так как по условию $|z| = 1$, то $|w| = |z|^2 = 1$. Итак, образом окружности $|z| = 1$ в плоскости z является окружность $|w| = 1$ в плоскости w, проходимая дважды. Это следует из того, что поскольку $w = z^2$, то $\operatorname{Arg} w = 2\operatorname{Arg} z + 2k\pi$, так что когда точка z описывает полную окружность $|z| = 1$, то ее образ описывает окружность $|w| = 1$ дважды.

Пример 6. Найти образ окружности:

$$z = R\cos t + iR\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

при отображении $w = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$. Данное уравнение окружности можно записать в виде:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t.$$

Выделим действительную и мнимую части функции $w = u + iv$.

Имеем:

$$u + iv = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ в u и v, получим параметрические уравнения образа окружности.

$$\operatorname{Re} w = u = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos 2t,$$

$$\operatorname{Im} w = v = \frac{2\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin 2t$$

или

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Итак, образ есть единичная окружность, проходимая дважды, что следует из того, что $0 \le t \le 2\pi$ и формул u и v.

§ 1.4. Предел последовательности

Окрестностью точки, изображающей комплексное число z_0, называется всякая область, внутри которой лежит точка z_0. Будем пользоваться только круговыми окрестностями, т.е. будем называть окрестностью точки z_0 внутренность круга с центром в этой точке, при этом ρ-окрестностью точки z_0 мы будем называть внутренность круга радиуса ρ с центром в точке z_0, т.е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству:

$$|z - z_0| < \rho .$$

Число z_0 называется пределом последовательности комплексных чисел z_1, $z_2,\ldots$, $z_n,\ldots$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно подобрать такое число N ($N(\varepsilon)$), что при $n \ge N$ выполнено неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. В этом случае говорят, что последовательность z_1, $z_2,\ldots$, $z_n,\ldots$ сходится к числу z_0.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то как бы мала ни была ε-окрестность точки z_0, вне этой окрестности может остаться лишь конечное число точек последовательности, так как все точки последовательности z_n, начиная с той, для которой $n = N$, попадут внутрь этой ε-окрестности.

Если $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$, то $|z_n - z_0| < \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$, следовательно, можно заключить, что существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 .$$

Если последовательность z_1, $z_2,\ldots$, $z_n,\ldots$ такова, что модули всех ее членов, начиная с некоторого, становятся больше любого сколь угодно большого положительного числа (т.е.если, как бы велико ни было положительное число *M*, к нему можно подобрать такое N, что $|z_n| > M$ при $n \ge N$), то хотя последовательность, очевидно, предела не имеет, однако удобно и в этом случае писать:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

и говорить, что последовательность точек z_1, $z_2,\ldots$, $z_n,\ldots$ сходится к бесконечно удаленной точке или что предел последовательности бесконечен. Окрестностью бесконечно удаленной точки называют внешность круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R, а центр находится в точке $z=0$, то множество точек, образующих окрестность бесконечно удаленной точки, определяется неравенством $|z|>R$, Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющейся внешностью этого круга.

Сопоставляя определение равенства $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ с определением окрестности бесконечно удаленной точки, мы видим, что, если последовательность точек сходится к бесконечно удаленной точке, то, как бы мала ни была окрестность бесконечно удаленной точки, т.е. как бы велик ни был радиус R круга, внешностью которого эта окрестность является, все точки последовательности z_1, $z_2,\ldots$, $z_n,\ldots$, за исключением конечного числа, попадут внутрь этой окрестности.

Таким образом, определение предела одно и то же как в случае, когда этот предел конечен, так и в случае, когда он бесконечен, т.е. бесконечно удаленная точка вполне равноправна с остальными точками плоскости, заметим, что у комплексной плоскости имеется только одна бесконечно удаленная точка.

§ 1.5. Предел функции. Непрерывность

Число w_0 называется пределом однозначной функции $f(z)$ при z стремящейся к z_0:

$$w_0 = \lim_{z\to z_0} f(z)$$

если, как бы мала ни была выбранная ε-окрестность точки w_0, можно найти такую δ-окрестность точки z_0, что для всех точек z этой окрестности соответствующие значения функции $f(z)$ будут изображаться точками выбранной ε-окрестность точки w_0.

В случае, если z_0 и w_0 – конечные числа, это определение равносильно следующему. Равенство

$$w_0 = \lim_{z\to z_0} f(z)$$

обозначает, что как бы мало ни было положительное число ε, к нему можно подобрать такое положительное число δ, что для всех значений z, удовлетворяющих условию:

$$|z - z_0| < \delta \tag{1.12}$$

выполнено неравенство:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon . \tag{1.13}$$

Если z_0, или w_0, или оба эти числа бесконечны, то в соответствии с определением окрестности бесконечно удаленной точки неравенства (1.12), (1.13) должны быть заменены другими.

Так равенство $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0$ обозначает, что, как бы мало ни было положительное число ε, к нему можно подобрать столь большое положительное число A, что для всех значений z, для которых $|z| > A$, функция $f(z)$ будет удовлетворять неравенству $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Введенное нами определение предела функции ничем не отличается от определения предела функции действительного аргумента, и следовательно, все доказываемые в курсе математического анализа теоремы о пределах и бесконечно малых остаются в силе для функции комплексного аргумента.

Если функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не только существует, но равен значению функции $f(z)$ в точке z_0:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0. В соответствии с определением предела это значит, что функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta \tag{1.14}$$

будет следовать

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon . \tag{1.15}$$

Если обозначить $z - z_0 = \Delta z$, $w - w_0 = \Delta w$, то неравенства (1.14), (1.15) заменяются неравенствами:

$$|\Delta z| < \delta; \quad |\Delta w| < \varepsilon$$

и определение непрерывности в точке z_0 функции $w = f(z)$, заданной в некоторой окрестности этой точки, сводится к тому, что в этой точке $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$.

Сформулированное выше определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функций действительного аргумента, следовательно, доказанные в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения, частного непрерывных функций остаются в силе для функций комплексного переменного.

Рассмотрим равенство $w = f(z)$, которое равносильно системе равенств:

$$u = u(x, y),$$
$$v = v(x, y),$$

где $w = u + iv$, $z = x + iy$.

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, то

$$f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]$$

и

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2}. \quad (1.16)$$

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке z следует, что, если точка (x, y) находится в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), то выполнение неравенства (1.15), а следовательно, в соответствии с (1.16), тем более удовлетворяются неравенства:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &< \varepsilon, \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.17)$$

которые означают, что функции, $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Таким образом, из непрерывности функции комплексного аргумента следует непрерывность ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных аргументов x и y. Справедливо и обратное утверждение: из неравенств (1.17) непосредственно следует, что непрерывность функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ влечет за собой непрерывность функции $f(z)$.

§ 1.6. Основные трансцендентные функции

Ряд с комплексными числами

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots \qquad (1.18)$$

называется сходящимся, если существует предел при $n \to \infty$ его частичной суммы:

$$s_n = z_1 = z_2 + \ldots + z_n.$$

Этот предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ называется суммой ряда. Очевидно, что ряд (1.18) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$, членами которого являются действительные части членов ряда (1.18), так и ряд $y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$, составленный из мнимых частей членов рядов (1.18).

Из этого утверждения следует, что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости двух последовательностей, одна из которых составлена из действительных, а другая из мнимых частей членов данной последовательности, т.е. в случае ряда (1.18), если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Если сходится ряд $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$, членами которого являются модули членов данного ряда (1.18), то ряд (1.18) сходится и называется абсолютно сходящимся.

Определение суммы, разности, произведения двух рядов и теоремы сходимости суммы, разности, произведения рядов не отличаются от соответствующих теорем для рядов с действительными членами.

Введем определения основных трансцендентных функций для комплексных значений независимой переменной.

Принимая во внимание известные для действительных значений x разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в степенной ряд, положим, по определению:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (1.19)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{1.20}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{1.21}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении z.

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ связаны между собой формулой Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{1.22}$$

Если в формуле Эйлера заменить z на $-z$ будем иметь:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{1.23}$$

Из (1.22) и (1.23) получим:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{1.24}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{1.25}$$

Если x_1 и x_2 – действительные числа, то, как известно,

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2},$$

что позволяет нам формально перемножать ряды с комплексными числами по правилам перемножения рядов с действительными числами, т.е. равенство

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

справедливо при любых комплексных z_1 и z_2.

В частности, если $z = x + iy$, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

но $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, следовательно,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1.26}$$

Отсюда следует, что $|e^z| = e^x$, а одно из значений $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Равенство (1.26) позволяет вычислять значения показательной функции при любых комплексных значениях показателя.

Пример 1.

$$e^{3+4i} = e^3(\cos 4 + i\sin 4)$$
$$e^{2-5i} = e^2(\cos 5 - i\sin 5)$$
$$e^{\pi i} = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$$
$$e^{\frac{\pi}{2}i} = (\cos\pi/2 + i\sin\pi/2) = i.$$

Из равенства (1.26) следует периодичность функции e^z с периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Действительно, если $z = x + iy$, то

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

В частности, $e^{2k\pi i} = e^0 = 1$; $e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i} = -1$ (k – целое); $(e^z)^m = e^{mz}$.

Формула (1.26) позволяет вычислять значения показательной функции, а функции (1.24), (1.25) могут служить для вычисления $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном z.

Показательная функция имеет период $2\pi i$, поэтому правые части не изменятся при замене z на $z + 2\pi$, следовательно,

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \quad \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

Нетрудно убедиться в том, что для функций $\sin z$, $\cos z$ при любых комплексных значениях z сохраняется основное связывающее их тождество:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Сохраняются и другие тригонометрические тождества. Например,

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1 + z_2).$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются с помощью равенств:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}.$$

Гиперболические функции легко могут быть выражены через тригонометрические:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz,\ \ \operatorname{ch} z = \cos iz$$
$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz,\ \ \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Из этих тождеств следует периодичность гиперболических функций, причем период $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ равен $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ равен π.

Пример 2. Найти $\cos i$.

Решение.

Так как $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, то $\cos i = \dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \operatorname{ch} 1$.

Пример 3. Найти $\sin(1+2i)$.

Решение.

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^{i} + e^{2}e^{-i}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2i} = \frac{\cos 1\left(e^{-2} - e^{2}\right) + i\sin 1\left(e^{-2} - e^{2}\right)}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-2} - e^{2}}{2}\sin 1 + i\frac{e^{-2} - e^{2}}{2}\cos 1 = \operatorname{ch} 2 \sin 1 + \operatorname{sh} 2 \cos 1.$$

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной.

Если $e^{w} = z$, где $z \neq 0$, то число w называется логарифмом числа z и обозначается: $w = \operatorname{Ln} z$.

Если $w = u + iv$, то из формулы (1.26) следует, что $|\,e^{w}\,| = e^{u}$, $\operatorname{Arg} e^{w} = v$. Так как в рассматриваемом случае $e^{w} = z$, то $e^{u} = |\,z\,|$, или $u = \ln|\,z\,|$ и $v = \operatorname{Arg} z$.

Итак,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm\ldots) \quad (1.27)$$

Ввиду многозначности величины $\operatorname{Arg} z$ логарифм является многозначной функцией.

Главным значением логарифма числа z будем называть то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа z. Следовательно, в формуле (1.27) главное значение логарифма получим при $k = 0$. Следовательно, главное значение логарифма определяется формулой:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z. \quad (1.28)$$

Пример 4. Найти $\ln(-1)$ и $\operatorname{Ln}(-1)$.

Решение.

Модуль числа $z = (-1)$ равен 1, а главное значение аргумента равно π, следовательно,

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i,$$

а

$$\operatorname{Ln}(-1) = \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \pm3)$$

Пример 5. Вычислить $\ln i$ и $\operatorname{Ln} i$.

Решение.

Модуль числа $z = i$ равен 1, а главное значение аргумента равно $\pi/2$. Следовательно,

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i,$$

$$\operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi i, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm\ldots$$

Пример 6. Найти $\ln(3+4i)$ и $\operatorname{Ln}(3+4i)$.

Решение.

Модуль числа $z = 3 + 4i$ равен $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, а главное значение аргумента равно $\operatorname{arctg} 4/3$, следовательно,

$$\ln(3+4i) = \ln 5 + i\operatorname{arctg} 4/5,$$

$$\operatorname{Ln}(3+4i) = \ln 5 + i\operatorname{arctg} 4/5 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm\ldots.$$

Так как:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z,$$

$$\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Arg} z.$$

Из формулы (1.27) следует, что обобщенная на случай комплексных значений аргумента логарифмическая функция обладает следующими известными свойствами логарифмов:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z,$$

$$\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Ln} z.$$

Рассмотрим степенную функцию $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, тогда $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, главное значение $z^a = e^{a \ln z}$, а также общую показательную функцию: $w = a^z$, a – любое комплексное число, $a^z = e^{z \ln a}$.

Пример 7. Найти i^i.

Решение.

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$$

Главное значение i^i равно $e^{-\pi/2}$.

Пример 8. Найти 2^{1+i}.

Решение.

$$2^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Ln} 2} = e^{(1+i)(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{(\ln 2 - 2k\pi) + i(\ln 2 + 2k\pi)} =$$
$$= e^{(\ln 2 - 2k\pi)}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2).$$

Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные к тригонометрическим.

Если $z = \sin w$, то w называется арксинусом числа z и обозначается: $w = \operatorname{Arcsin} z$, аналогично, если $z = \cos w$, то $w = \operatorname{Arccos} z$, если $z = \operatorname{tg} w$, то $w = \operatorname{Arctg} z$, если $z = \operatorname{ctg} w$, то $w = \operatorname{Arcctg} z$.

а) $z = \sin w$

$w = \operatorname{Arcsin} z$

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0 \quad (: e^{-iw})$$

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = \frac{2\left(iz \pm \sqrt{1 - z^2}\right)}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

$$iw = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

б) $z = \cos w$

$w = \operatorname{Arccos} z$

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2i}$$

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

$$e^{iw} = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

в) $z = \operatorname{tg} w$

$w = \operatorname{Arctg} z$

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = zie^{iw} + zie^{-iw}$$

$$e^{iw}(1 - zi) = e^{-iw}(1 + iz)$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - zi}$$

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right).$$

г) $z = \operatorname{ctg} w$

$w = \operatorname{Arcctg} z$

$$z = \frac{i\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}{e^{iw} - e^{-iw}}$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = zie^{iw} + zie^{-iw}$$

$$ze^{iw} - ze^{-iw} = ie^{iw} + ie^{-iw}$$

$$e^{iw}(z - i) = e^{-iw}(i + z)$$

$$e^{2iw} = \frac{i + z}{z - i}$$

$$2iw = \operatorname{Ln}\frac{z + i}{z - i}$$

$$w = \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z + i}{z - i}\right).$$

Функции, обратные $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, называются обратными гиперболическими функциями и обозначаются соответственно $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$.

а) $z = \operatorname{sh} w$

$w = \operatorname{Arsh} z$

$$z = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

$$e^{w} - e^{-w} - 2z = 0$$

$$e^{2w} - 2ze^{w} - 1 = 0$$

$$e^{w} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 + 4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2 + 1}$$

$$w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right).$$

б) $z = \operatorname{ch} w$

$w = \operatorname{Arch} z$

$$z = \frac{e^{w} + e^{w}}{2}$$

$$e^{w} + e^{-w} - 2z = 0$$

$$e^{2w} - 2ze^{w} + 1 = 0$$

$$e^{w} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2}$$

$$e^{w} == z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$w = \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

в) $z = \operatorname{th} w$

$w = \operatorname{Arth} z$

$$z = \frac{e^{w} - e^{w}}{e^{w} + e^{-w}}$$

$$ze^{w} + ze^{-w} = e^{w} - e^{-w}$$

$$e^{-w}(z + 1) = e^{w}(1 - z)$$

г) $z = \operatorname{cth} w$

$w = \operatorname{Arcth} z$

$$z = \frac{e^{w} + e^{-w}}{e^{w} - e^{-w}}$$

$$ze^{w} - ze^{-w} = e^{w} + e^{-w}$$

$$e^{w}(z - 1) = e^{-w}(z + 1)$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$2w = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$w = \mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{z-1}$$

$$2w = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+z}{z-1}\right)$$

$$w = \mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{z-1}.$$

Пример 9. Найти $\mathrm{Arcsin}\, 2$.

Решение.

$$\mathrm{Arcsin}\, 2 = -i\,\mathrm{Ln}\left(2i \pm i\sqrt{3}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left[\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i\right] =$$

$$= -i\left[\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\,\pi/2 + 2k\pi i\right] = \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots)$$

Пример 10. $\mathrm{Arctg}\, 2i$

Решение.

$$\mathrm{Arctg}\, 2i = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{i\ln 3}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots).$$

Пример 11. Записать в алгебраической форме $\mathrm{Arcsin}\frac{\pi}{3}i$.

Решение.

$$\mathrm{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}}\right).$$

Откуда

$$\mathrm{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\,\mathrm{Ln}\left[-\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}}\right)\right] = -i\left[\ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}}\right) + \pi i + 2k\pi i\right] =$$

$$= (2k+1)\pi - i\ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}}\right), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots)$$

и

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i = -i\,\mathrm{Ln}\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right) = -i\left[\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi i\right] =$$

$$= 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right), \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \pm\ldots)$$

Пример 12. Найти значение модуля функции $w = \sin z$ в точке $z = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Решение.

Пусть $z = x + iy$ тогда $w = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$. Модуль функции $\sin z$ равен:

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y\left(1-\sin^2 x\right)} =$$
$$= \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}\,.$$

Полагая $z = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, найдем

$$\left|\sin\left[\pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]\right| = \operatorname{sh}\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right] = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = 2\,.$$

Этот пример показывает, что тригонометрическая функция $\sin z$ в комплексной области может принимать значения, по модулю больше единицы.

Пример 13. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arctg}(1+i)$.

Решение.

Положим $z = 1 + i$, получим

$$\operatorname{Arctg}(1+i) = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i}{2-i} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right).$$

Тогда

$$\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) = -\ln\sqrt{5} + (2k+1)\pi i - \operatorname{arctg} 2\,.$$

Окончательно:

$$\operatorname{Arctg}(1+i) = -\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}2 + (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\ln\sqrt{5}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 14. Решить уравнение $\sin z = 3$.

Решение.

Задача сводится к нахождению величины $z = \operatorname{Arcsin}3$, но $\operatorname{Arcsin}t = -i\operatorname{Ln}\left(it + \sqrt{1-t^2}\right)$, тогда будем иметь

$$z = \operatorname{Arcsin}3 = -i\operatorname{Ln}\left(3i + \sqrt{-8}\right)$$

или, учитывая то, что $\sqrt{-8} = \pm i\sqrt{8}$, получим

$$z = -i\left[\operatorname{Ln}\left(3+\sqrt{8}\right)i\right], \ z = -i\left[\operatorname{Ln}\left(3-\sqrt{8}\right)i\right].$$

Так как

$$\arg\left[\left(3+\sqrt{8}\right)i\right] = \arg\left[\left(3-\sqrt{8}\right)i\right] = \frac{\pi}{2},$$

$$\left|\left(3+\sqrt{8}\right)i\right| = 3+\sqrt{8}, \ \left|\left(3-\sqrt{8}\right)i\right| = 3-\sqrt{8},$$

то

$$\operatorname{Ln}\left[\left(3\pm\sqrt{8}\right)i\right] = \ln\left(3\pm\sqrt{8}\right) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(3\pm\sqrt{8}\right), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

§ 1.7. Производная функции комплексного переменного

Дадим независимому переменному $z = x + iy$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и вычислим вызванное этим приращением аргумента приращение Δw функции $w = f(z)$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Если существует предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, w', $\frac{dw}{dz}$, $\frac{df}{dz}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{1.29}$$

Функция, имеющая производную в точке z, называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, то предел (1.29) существует и не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю; в частности, при $\Delta z = \Delta x$, т.е. при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси $0x$, получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Выбрав $\Delta z = i\Delta y$, т.е. устремляя точку $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси $0y$, получим:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(-i\frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.30}$$

Эти условия, называемые условиями Даламбера-Эйлера или условиями Коши-Римана, должны быть выполнены в каждой точке, в которой функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема.

Требуя существование полных дифференциалов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, можно доказать, что условия Даламбера-Эйлера не только не необходимы, но и достаточны для дифференцируемости функции $f(z) = u + iv$.

Если однозначная функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется аналитической в данной точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в этой области.

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют правильными точками этой функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической – особыми точками.

Пример 1. Выяснить, является ли функция $w = z^2$ аналитической.

Решение.

Если $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, т.е. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, откуда находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия Коши-Римана выполнены во всех точках плоскости, следовательно, функция z^2 является аналитической во всей плоскости.

Пример 2. Выяснить, является ли функция e^z аналитической.

Решение.

Если $w = e^z$, $w = u + iv = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, тогда $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, условия Даламбера-Эйлера выполнены в каждой точке и функция e^z является аналитической во всей плоскости.

Пример 3. Выяснить, является ли аналитической функция $w = \bar{z}$.

Решение.

Если $w = \bar{z}$, то $w = u + iv = x - iy$, тогда $u = x$, $v = -y$, откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$ и, следовательно, первое из условий Коши-Римана не выполнено. Функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

Пример 4. Выяснить, является ли функция $w = z \operatorname{Re} z$ аналитической.

Решение.

Если $w = z\,\mathrm{Re}\,z$, то $u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy$, т.е. $u = x^2$, $v = xy$, откуда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial v}{\partial y} = x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Условия Даламбера-Эйлера выполнены только при $x = 0$ и $y = 0$. Следовательно, функция $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$ и нигде не является аналитической.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функций, зависящих от комплексного аргумента, то известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, функции от функции, обратной функции остаются справедливыми и в случае комплексного аргумента.

Выясним связь аналитических функций с гармоническими. Действительная и мнимая части функции $f(z) = u + iv$, аналитической в некоторой области D, в той же области являются решениями уравнения $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, называемого уравнением Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Действительно, функции u и v связаны в области D условиями Даламбера-Эйлера. Дифференцируя первое из эти тождеств по x, а второе по y и складывая, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференцируя первое из тех же тождеств по y, а второе по x и вычитая, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Решения уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ называются гармоническими функциями. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мы можем получить, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$, подберем другую так, чтобы удовлетворялись условия Даламбера-Эйлера, т.е. определим другую из этих функций по ее двум частным производным или по ее полному дифференциалу, по которому функция определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие условиям Даламбера-Эйлера и, следовательно, являющиеся действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции $f(z)=u+iv$, называются сопряженной парой гармонических функций.

Пример 5. Найти аналитическую функцию $w=f(z)$ по известной ее действительной части $u(x,y)=2e^x\cos y$ при условии $f(0)=2$.

Решение.

Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2e^x\cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\sin y$. Согласно условий Коши-Римана должны быть выполнены следующие условия: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$; $-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

В этом случае $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2e^x\cos y$, откуда $v(x,y)=\int 2e^x\cos y dy=$ $=2e^x\sin y+\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Дифференцируя $v(x,y)$ по x и используя второе из условий Коши-Римана, получим:

$$2e^x\sin y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2e^x\sin y;\ \ \frac{d\varphi}{dx}=0;\ \ \varphi=const=C.$$

Отсюда $v(x,y)=2e^x\sin y+C$, следовательно

$$w=2e^x\cos y+i\left(2e^x\sin y+C\right)=2e^z+iC.$$

Найдем переменную C из условия $f(0)=2$, т.е. $2e^0+iC=2$, $C=0$.

Ответ: $f(z)=2e^z$.

Пример 6. Найти аналитическую функцию $f(z)=w$ по известной ее мнимой части $v=x^3-3y^2x$, $f(0)=1$.

Решение.

Имеем: $\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy$.

Тогда по условиям Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy;\ \partial u = -\int 6xydx;\ u = -6\frac{x^2}{2}y + \varphi(y) = -3x^2y + \varphi(y),$$

$$\text{но } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2 + \varphi'(y) = -3x^2 + 3y^2;$$

$$\varphi'(y) = 3y^2;\ \varphi(y) = 3\frac{y^3}{3} + C = y^3 + C.$$

Отсюда $u = -3x^2y + y^3 + C$.

Тогда $w = -3x^2y + y^3 + C + i(x^3 - 3y^2x)$.

Найдем постоянную C из условия $f(0) = 1$.

$$w(0) = C = 1$$

$$w = -3x^2y + y^3 + 1 + i(x^3 - 3y^2x) = i(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - iy^3) + 1 =$$

$$= i(x + iy)^3 + 1 = iz^3 + 1.$$

Пример 7. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Решение.

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то из уравнений Даламбера-Эйлера находим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1. \qquad (1.31)$$

Воспользовавшись первым из этих уравнений, получим (1.30):

$u = \int -4ydx = -4xy + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция.

Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем (1.31) по y и подставляем в (1.30):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1.$$

Откуда:

$$\varphi'(y) = -1 \text{ или } \varphi(y) = -y + C.$$

Следовательно, $u = -4xy - y + C$, и окончательно получим:

$$w = u + iv = -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) =$$
$$= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C,$$

где $z = x + iy$.

§ 1.8. Аргумент и модуль производной. Конформное отображение.

Пусть в плоскости z дана точка z_0 и через эту точку проведены линии γ_1 и γ_2, причем каждая из них имеет в точке z_0 определенную касательную.

Функция $w = f(z)$, которую мы будем предполагать аналитической в некоторой области, содержащей точку z_0, отображает точку z_0 плоскости z в некоторую точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w, а линии γ_1 и γ_2, проходящие через точку z_0, отображаются на линии α_1, α_2, проходящие через точку w_0.

Возьмем на линии γ_1 произвольную точку $z_0 + \Delta z$, которая отображается в некоторую точку $w_0 + \Delta w$ на линии α_1.

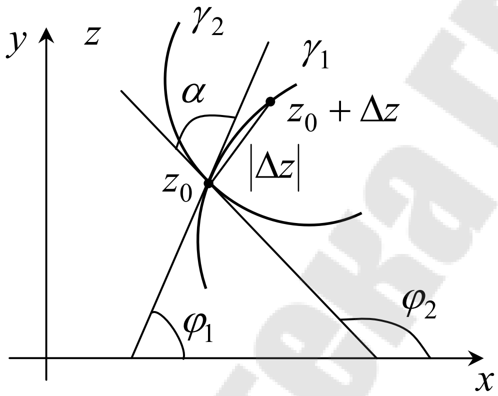

Рис. 6.

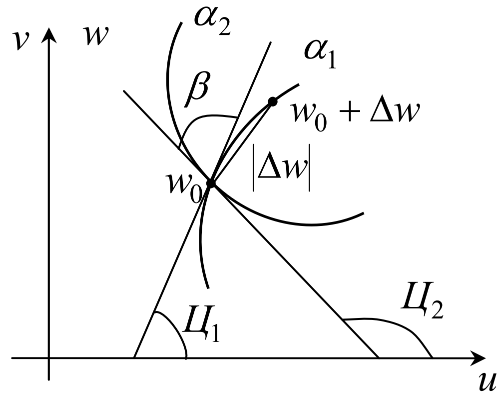

Рис. 7.

Комплексное число Δz изобразится при этом вектором, идущим из точки z_0 в точку $z_0 + \Delta z$, а число Δw с помощью вектора, идущего из точки w_0 в точку $w_0 + \Delta w$.

Так как функция $w = f(z)$ является аналитической, в точке z_0, то предел, к которому стремится отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, не зависит от закона стремления Δz к нулю и равен число $f'(z_0)$.

Будем стремить Δz к нулю так, чтобы точка $z_0 + \Delta z$ оставалась на кривой γ_1, тогда Δw будет стремиться к нулю так, что точка $w_0 + \Delta w$ будет перемещаться по кривой α_1.

Из существования предела

$$\lim_{\Delta z \to 0} = \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$$

следует существование предела

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \left| f'(z_0) \right|, \tag{1.32}$$

а также, если $f'(z_0) \neq 0$, и предела

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} f'(z_0). \tag{1.33}$$

С другой стороны:

$$\operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \Delta w - \operatorname{Arg} \Delta z,$$

где $\operatorname{Arg} \Delta w$ и $\operatorname{Arg} \Delta z$ – углы, образованные векторами, изображающие числа Δz и Δw с положительными направлениями соответствующих действительных осей. При выбранном нами способе предельного перехода эти векторы направлены по хордам кривых γ_1 и α_1, и пределы величин $\operatorname{Arg} \Delta z$ и $\operatorname{Arg} \Delta w$ при $z \to 0$ равны соответственно углам φ_1 и $Ц_1$ между касательными к кривым γ_1 и α_1 в точках z_0 и w_0 и положительными направлениями соответствующих действительных осей.

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = Ц_1 - \varphi_1. \tag{1.34}$$

Повторяя те же рассуждения, получим:

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = Ц_2 - \varphi_2, \tag{1.35}$$

где φ_2 и $Ц_2$ – соответственно углы между касательными к кривым γ_2 и α_2 в точках z_0 и w_0 и положительным напрвлением осей $0x$ и $0u$.

Из (1.34) и (1.35) имеем:

$$Ц_1 - \varphi_1 = Ц_2 - \varphi_2$$

или

$$Ц_2 - Ц_1 = \varphi_2 - \varphi_2 . \qquad (1.36)$$

Но $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ является углом между касательными к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0, т.е. углом между этими кривыми в точке z_0, $\alpha = Ц_2 - Ц_1$ – угол между кривыми α_1 и α_2 в точке w_0.

Следовательно, при отображении, осуществляемом аналитической функцией, угол между кривыми, пересекающимися в точке, в которой производная отображающей функции отлична от нуля, сохраняется как по величине, так и по направлению отсчета (свойство постоянства углов).

Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Равенства (1.34) и (1.35) показывают, что если совместить плоскость z и плоскость w так, чтобы точка z_0 совпала с точкой w_0, а ость $0x$ была бы направлена параллельно оси $0u$, причем положительные направления этих осей совпали бы, то угол, на который после этого нужно повернуть вокруг точки z_0 плоскость z для того, чтобы касательная к кривой γ_1 (или γ_2) совпала с касательной к отображенной кривой α_1 (или α_2), равен $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ – таков геометрический смысл аргумента производной отображающей функции.

Для выяснения геометрического смысла модуля производной заметим, что $|\Delta z|$ является расстоянием от точки z_0 до точки $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ – расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$, и, следовательно, величина $\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ указывает, в каком отношении в результате отображения изменяется расстояние между этими точками. Величину $|f'(z_0)|$ называют коэффициентом растяжения в точке z_0 при отображении с помощью функции $w = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$, то расстояния между точками при отображении увеличиваются, и происходит растяжение; если $|f'(z_0)| < 1$, то отображение в окрестности точки z_0 приводит к сжатию.

Так как, в силу аналитичности функции $f(z)$, производная $f'(z_0)$ не зависит от того, по какому закону точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0, то коэффициент растяжения в данной точке постоянен, т.е. одинаков во всех направлениях – второе свойство отображения, осуществляемого с помощью аналитической функции.

Отображение, обладающее свойством постоянства углов и свойством постоянства коэффициента растяжения в каждой точке, называют конформным отображением 1-го рода. Отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным во всех точках, в которых производная этой функции отлична от нуля. Можно доказать и обратное утверждение: если отображение, осуществляемое функцией $f(z)$ конформно в области D, то функция $f(z)$ является аналитической в области D.

Отображение, отличающееся от конформного тем, что углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное, называют конформным отображением 2-го рода.

Дифференциалом $df(z)$ аналитической функции $w = f(z)$ в точке z называется главная линейная по отношению к Δz часть приращения $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$ этой функции.

Так как $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$, то $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(z, \Delta z)$, где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(z, \Delta z) = 0$. Следовательно, $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z$.

В виду того, что произведение $\alpha(z, \Delta z)\Delta z$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δz, дифференциал функции $f(z)$ равен произведению $f'(z)\Delta z$ или $f'(z)dz$ (так как при $f(z) = z$ $df(z) = dz = \Delta z$), т.е. $df(z) = f'(z)dz$.

Пример 1. Проверить, является ли функция $f(z) = e^{2z}$ аналитической. Если да, то найти коэффициент растяжения k и угол φ для отображения $w = f(z)$ в точке $z_0 = 1 + i$.

Решение.

Так как $e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y)$,

то

$$u(x, y) = e^{2x}\cos 2y, \;\; v(x, y) = e^{2x}\sin 2y.$$

Для того, чтобы функция была аналитической, необходимо и достаточно выполнение условий Коши-Римана. Согласно этих условий:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y; \;\; \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y; \;\; \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\sin 2y,$$

т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия выполняются во всей комплексной плоскости, поэтому функция $f(z) = e^{2z}$ является аналитической для всех точек $z \in C$. Найдем ее производную:

$f'(z) = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) = 2e^{2z}$.

В точке $z_0 = 1+i$, $f'(z_0) = 2e^2e^{i2}$.

Отображение $w = e^{2z}$ задает конформное преобразование с коэффициентом растяжения:

$$k = |f'(z_0)| = \left|2e^2e^{2i}\right| = 2e^2$$

и углом поворота:

$$\varphi = \arg f'(z_0) = 2 \text{ (рад.)}$$

Пример 2. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Решение.

Имеем $w'(z) = 2z$, так что $w'\big|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$. Перейдем от алгебраической формы записи комплексного числа $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ к тригонометрической, находим:

$$2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Значит,

$$f'(z)\big|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = 4; \;\; \arg f'(z)\big|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

т.е. коэффициент растяжения $r = 4$, а угол поворота $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

§ 1.9. Интеграл от функции комплексного переменного

Предположим, что в плоскости z дана замкнутая или незамкнутая дуга *C*, которую считаем гладкой или кусочно-гладкой. Граничные точки кривой *C* обозначим z_0 и Z; если кривая замкнута, то

$z_0 = Z$. Точку z_0 считаем начальной, а другую конечной, т.е. мы установили положительное направление на кривой *C*. Предположим функция $f(z)$ комплексного аргумента z непрерывна во всех точках дуги *C*.

Разобьем дугу *C* произвольным способом на n элементарных дуг, и занумеруем точки деления z_n в направлении от начальной точки к конечной, причем $z_n = Z$.

Введем обозначения:

$$z_1 - z_0 = \Delta z_1,\ z_2 - z_1 = \Delta z_2, \ldots,\ z_n - z_{n-1} = \Delta z_n .$$

Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k, а $|z_k|$ – длина этого вектора, т.е. длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу. Внутри каждой элементарной дуги выберем точки и обозначим эти точки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Составим сумму

$$f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta z_n . \qquad (1.37)$$

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $n \to \infty$ и длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю, называется интегралом функции $f(z)$ по дуге *C*:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)\Delta z_k . \qquad (1.38)$$

Из этого определения непосредственно получим следующие свойства интеграла:

1. $\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz \pm \int_C f_2(z)dz$;

2. $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, где k – действительная или комплексная постоянная;

3. Если дуга $\overline{C}$ геометрически совпадает с дугой *C*, но имеет направление, противоположное направлению дуги C, то

$$\int_{\overline{C}} f(z)dz = -\int_C f(z)dz ;$$

4. Если дуга *C* состоит из дуг $C_1, C_2, ..., C_n$, то

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \ldots \int_{C_n} f(z)dz ;$$

5. $\int\limits_C f(z)dz = Z - z_0$;

6. Если $|f(z)| < M$ во всех точках дуги *C* и длина дуги *C* равна l, то

$$\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \le Ml;$$

7. $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \le \int\limits_C |f(z)||dz| = \int |f(z)|ds$, где ds – дифференциал дуги кривой *C*.

8. Вычисление интеграла (1.38) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных аргументов: $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$.

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy;$$

9. Если дуга *C* задана параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \end{aligned} \tag{1.39}$$

а начальная и конечная точки дуги соответствуют при этом значениям параметра $t = t_0$ и $t = T$, тогда интеграл по комплексному аргументу можно вычислить с помощью формулы:

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt, \tag{1.40}$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

10. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_1 и z_0, то имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \tag{1.41}$$

где $\Phi(z)$ – первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, где дугой C является:

1) прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $1+i$,
2) ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $1+i$.

Решение.

1) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $1+i$ в параметрической форме имеет вид:

$$x = t$$

$$y = t,$$

а в комплексной форме: $z = (1+i)t$, где действительное переменное t изменяется от 0 до 1.

Находим: $dz = (1+i)dt$ и

$$\int\limits_C \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 \operatorname{Re}\left[(1+i)t\right](1+i)dt = (1+i)\int\limits_0^1 t dt = \frac{(1+i)}{2}\cdot t^2\Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

2) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и 1 в комплексной форме $z = t$, где t изменяется от 0 до 1; уравнение в комплексной форме отрезка, соединяющего точки 1 и $1+i$: $z = 1+it$, где t изменяется от 0 до 1.

Итак,

$$\int\limits_C \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 \operatorname{Re} t dt + \int\limits_0^1 \operatorname{Re}(1+it) i dt = \int\limits_0^1 t dt + i\int\limits_0^1 dt = \frac{t}{2}\Big|_0^1 + it\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_C \left(\bar{z} + z^2\right)dz$, где C – отрезок прямой $y = x$, начинающийся в точке $z_0 = 0$ и оканчивающийся в точке $z_1 = 1+i$.

Решение.

Для вычисления интеграла используем свойство (8). Для этого выделим действительную и мнимую части подынтегральной функции:

$$\bar{z} + z^2 = x - iy + \left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) = x^2 + x - y^2 + i\left(2xy - y\right),$$

т.е.

$$u = x + x^2 - y^2,\ \ v = 2xy - y.$$

$$\int_C \left(\bar{z}+z^2\right)dz = \int_C \left(x^2+x-y^2\right)dx-(2xy-y)dy + i\int_C (2xy-y)dx+\left(x^2+x-y^2\right)dy =$$

$$= \begin{vmatrix} y=x, & x_0=0 \\ dy=dx, & x_1=1 \end{vmatrix} = \int_0^1 \left(x+x^2-x^2-2x^2+x\right)dx + i\int_0^1 \left(2x^2-x+x+x^2-x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x-2x^2dx\right)+i\int_0^1 2x^2dx = \left(x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + i\frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_C xdx + x^2dy$, где C – окружность с центром в начале координат и радиусом 1, обход которой совершается против часовой стрелки.

Решение.

Параметрические уравнения такой окружности будут $x=\cos t$, $y=\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

Поэтому находим:

$$\int_C xdx + x^2dy = \int_0^{2\pi}\left[-\cos t\sin t+\cos^2 t\cos t\right]dt = -\int_0^{2\pi}\cos t\sin tdt +$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\cos tdt = \left[\frac{\cos^2 t}{2}+\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_C (1+i-2\bar{z})dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$:

1) по прямой,
2) по параболе $y=x^2$.

Решение.

Перепишем подынтегральную функцию в виде:

$$1+i-2\bar{z} = (1-2x)+i(1+2y).$$

Здесь $u=1-2x$, $v=1+2y$. Применяем свойство (8), получим:

$$I_1 = \int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_C (1-2x)dx-(1+2y)dy + i\int_C (1+2y)dx+(1-2x)dy.$$

1) Уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$ будет $y = x$, $0 \le x \le 1$, а значит, $dy = dx$, тогда

$$I_1 = \int_0^1 [(1-2x)-(1+2x)]dx + i\int_0^1 [(1+2x)+(1-2x)]dx = 2(i-1).$$

2) Для параболы $y = x^2$, $dy = 2xdx$, ($0 \le x \le 1$). Тогда:

$$I_1 = \int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 \left[1-2x-\left(1+2x^2\right)2x\right]dx + i\int_0^1 \left[1+2x^2+(1-2x)2x\right]dx =$$

$$= -2 + \frac{4}{3}i.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_{1-i}^{2+i} \left(3z^2 + 2z\right)dz$.

Решение.

Так как подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду, то, применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдем:

$$\int_{1-i}^{2+i} \left(3z^2 + 2z\right)dz = \left(z^3 + z^2\right)\Big|_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^i z\cos z dz$.

Решение.

Функции $f(z) = z$, $\varphi(z) = \cos z$ являются аналитическими всюду. Применим формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^i z\cos z dz = \int_0^i z d(\sin z) = z\sin z\Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i =$$

$$= -\mathrm{sh}1 + \mathrm{ch}1 - 1 = \frac{1-e}{e}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_C \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz$, где C – дуга окружности $|z| = 1$, ($0 \le \arg z \le \pi$).

Решение.

Положим $z = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$ и

$$\int\limits_C \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz = \int\limits_0^{\pi} ie^{i\varphi}\left(e^{i2\varphi} + 1\right)d\varphi = i\int\limits_0^{\pi}\left(e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right)d\varphi = \left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right) = -\frac{8}{3}.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_C e^{\bar{z}}dz$, где C – отрезок прямой $y = -x$, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - \pi i$.

Решение.

Параметрическое уравнение линии C есть $x = t$, $y = -t$ или в комплексной форме $z = t - it$, где $0 \le t \le \pi$.

Тогда

$$\int\limits_C e^{\bar{z}}dz = \int\limits_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)dt = (1-i)\int\limits_0^{\pi} e^{(1+i)t}dt = \frac{1-i}{1+i}e^{(1+i)t}\Big|_0^{\pi} = \left(e^{\pi} + 1\right)i.$$

§ 1.10. Теорема Коши

Если $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в односвязной области, ограниченной этим контуром, то

$$\int\limits_C f(z)dz = 0.$$

Доказательство.

Справедливость теоремы Коши следует из свойства (8), если предположить, что производная $f'(z)$ данной функции непрерывна на контуре C и в области, ограниченной этим контуром, так как в этих предположениях криволинейные интегралы $\int\limits_C udx - vdy$ и $\int\limits_C vdx + udy$, будучи интегралами по замкнутому контуру от полных дифференциалов, равны нулю.

Действительно, для того, чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции, было полным дифференциалом, как известно, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$. В применении к интегралам $\int\limits_C udx - vdy$ и $\int\limits_C vdx + udy$ это условие сводится к условиям Эйлера-Даламбера

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$, выполненным в силу аналитичности функции $f(z)$, а непрерывность производной $f'(z)$ обеспечивает непрерывность частных производных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Таким образом, каждый из двух интегралов в правой части свойства (8) равен нулю, и теорема Коши доказана.

Можно данную теорему доказать на случай многосвязной области. Рассмотрим многосвязную область D, ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами $C_1, C_2, ..., C_n$ и предположим, что функция $f(z)$ является аналитической функцией как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$.

Тогда справедливо равенство:

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz=...=\int_{C_n} f(z)dz. \qquad (1.42)$$

Если функция $f(z)$ является аналитической на контурах C_0 и C_1 и в двусвязной области, ограниченной этими контурами, то из (1.42) при $n=1$ получим:

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz.$$

Из данной теоремы следует, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области D, то, какова бы ни была дуга C внутри этой области, величина $\int_C f(z)dz$ зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки Z дуги C и, следовательно, для этого интеграла можно пользоваться обозначением $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$.

§ 1.11. Интеграл вида $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$

Вычислим интеграл $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ по замкнутому контуру C в предположении, что n является целым положительным числом (если целое число $n \le 0$, то по теореме Коши $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int\limits_C (z-a)^m dz = 0$, $m = -n \ge 0$).

Если точка $z = a$ находится вне области, ограниченной контуром *C*, то в соответствии с теоремой Коши: $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$.

Предположим, что контур *C* один раз обходит точку a, считаем, что направление обхода выбрано так, что точка a остается слева. Тогда, в силу теоремы Коши, величина интеграла $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ не зависит от вида контура *C*, хотя, может быть, и отлична от нуля. Поэтому в качестве контура *C* можно взять окружность радиуса R с центром в точке a. Уравнение такой окружности в комплексной форме имеет вид:

$$z - a = Re^{i\varphi},\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ dz = Rie^{i\varphi} d\varphi.$$

Тогда:

$$\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(\varphi - n\varphi)} d\varphi = \frac{i}{R^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi.$$

При $n \ne 1$ ($n = 2,3,4,...$) получим:

$$\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)R^{n-1}} e^{i(1-n)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

т.е. $e^{2\pi i(1-n)} = e^0 = 1$.

Если же $n = 1$, то $\int\limits_C \frac{dz}{z-a} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$.

Итак, если даже точка a находится внутри контура С, то $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ отличен от нуля только при $n = 1$.

Следовательно, если контур *C* обходит k раз точку a в положительном направлении, то $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 2k\pi i$, если же контур *C* обходит k раз точку a в отрицательном направлении, то $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = -2k\pi i$.

§ 1.12. Интеграл Коши

Предположим, что функция $f(z)$ является аналитической на некотором контуре Γ и в односвязной области D, ограниченной этим контуром. Пусть z – любая точка внутри области D. Описав из точки z, как из центра, лежащую в области D окружность γ радиуса ρ, в силу теоремы Коши:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Теорема Коши применима, так как единственной особой точкой в области D для подынтегральной функции является точка $\xi = z$ и, следовательно, в двусвязной области между Γ и γ эта функция аналитическая.

Так как функция $f(z)$ является аналитической, а, следовательно, и непрерывной в области D, то для каждого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, и для любой точки ξ на окружности γ справедливо неравенство:

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon,$$

если только радиус ρ окружности γ достаточно мал.

Поэтому

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma} \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \le \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon, \quad (1.43)$$

Воспользовавшись тем, что $|\xi - z| = \rho$ на дуге γ.

Так как ε можно взять сколь угодно малым, то неравенство (1.43) означает, что

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \quad (1.44)$$

Но величина $\int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$ при изменении ρ не изменяется, поэтому знак предела в левой части (1.44) можно опустить.

Тогда имеем

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} = f(z)\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z).$$

Отсюда получим интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Величина, стоящая в правой части интегральной формулы Коши, называется интегралом Коши. Для вычисления интеграла Коши нужно знать значение функции $f(z)$ только на контуре Γ и, следовательно, интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области D, если известны значения этой функции на контуре Γ, ограничивающей область G.

Если точка z лежит вне области D, то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши, так как в этом случае подынтегральная функция является аналитической в области D.

Интегральная формула Коши справедлива для случая сложного контура, ограничивающего многосвязную область D.

Можно доказать, что производная аналитической функции также является аналитической функцией.

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в ограниченной этим контуром области; тогда в соответствии с интегральной формулой Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z},$$

где z – любая точка внутри рассматриваемой области.

Какова бы ни была внутренняя точка z рассматриваемой области, $|h|$ можно подобрать столь малой, что точка $z+h$ будет лежать внутри области, считаем, что $|h|$ меньше кратчайшего расстояния точки z до контура C. Тогда на основании интегральной формулы Коши:

$$f(z+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z - h}$$

и поэтому:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\left[\frac{f(\xi)}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi)}{\xi - z}\right]d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)}.$$

При $h \to 0$ левая часть этого равенства стремится к $f'(z)$, а подынтегральная функция в правой части стремится к $\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}$.

Следовательно, мы приходим к формуле:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2},$$

Справедливость которой можно доказать, если обосновать предельный переход под знаком интеграла в правой части.

Составив отношение $\dfrac{f'(z+h) - f'(z)}{h}$, и перейдя к пределу при $h \to 0$, можно доказать, что

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^3}.$$

Тогда при любом целом положительном n

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}. \tag{1.45}$$

Итак, из аналитичности функции в некоторой точке, т.е. из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а, следовательно, и аналитичность этих производных.

Интегральная формула Коши и формула (1.45) могут служить для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$,

где С – окружность радиуса 2 с центром в точке $3i$.

Решение.

Функция $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ внутри круга, ограниченного плоскостью *C*, аналитична, поэтому применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int_C \frac{f(z)dz}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i\frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i\sin 2).$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$,

где С – замкнутый контур, однократно обходящий точку i.

Решение.

Применяя формулу (1.45) к формуле $f(z) = \cos z$, получим:

$$\int\limits_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2(\cos z)}{dz^2}\bigg|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \frac{e^{-1}+e}{2}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3} dz$.

Решение.

Внутри окружности $|z| = 2$ знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z_0 = -1$, тогда применяя интегральную формулу Коши перепишем интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{\operatorname{ch} iz}{(z+3)}}{(z+1)} dz = 2\pi i f(-1) =$$

$$= 2\pi i \frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1,$$

здесь $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$ – аналитическая функция в круге $|z| = 2$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{e^{z^2} dz}{z^2-6z}$, если

1) $C: |z-2| = 1$; 2) $C: |z-2| = 3$; 3) $C: |z-2| = 5$.

Решение.

1) В замкнутой области, ограниченной $|z-2| = 1$, подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши:

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z(z-6)} dz = 0.$$

2) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, находится одна точка $z=0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде:

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\dfrac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz = 2\pi i f(z)\Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6}\Bigg|_{z=0} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

Здесь функция $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области.

3) В области ограниченной окружностью $|z-2|=5$ имеется две точки $z=0$ и $z=6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Разложим дробь $\dfrac{1}{z(z-6)}$ на простейшие, имеем:

$$\frac{1}{z(z-6)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Тогда

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z(z-6)} dz = \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6} dz - \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{6}2\pi i e^{36} - \frac{1}{6}2\pi i = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$.

Решение.

Подынтегральная функция $\dfrac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в области $|z-1| \le 1$ всюду, кроме точки $z_0 = 1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в круге $|z-1| \le 1$. Для этого перепишем подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}, \text{ в качестве } f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}.$$

Полагаем в формуле (1.45) $n = 1$, получим:

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1).$$

Найдем производную:

$$f'(z) = \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{\pi \cos \pi z (z+1) - 2 \sin \pi z}{(z+1)^3}.$$

Отсюда $f'(1) = \dfrac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi^2 i}{2}$.

§ 1.13. Ряды и особые точки

а) Функциональные ряды.

Функциональный ряд, членами которого являются функции комплексной переменной z

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{1.46}$$

может в одних точках сходится, в других расходится.

Сумма такого ряда

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} S_n(z),$$

где $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$ является функцией переменной z, определенной в точках, в которых ряд (1.46) сходится. Множество точек, в которых ряд (1.46) сходится, будем называть областью сходимости этого ряда. Остатком ряда (1.46) называется разность:

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots.$$

В каждой точке сходимости ряда (1.46)

$$\lim_{n \to \infty} R_n(z) = 0.$$

Другими словами, если ряд в данной точке z сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое число N, что при $n > N$ модуль остатка ряда удовлетворяет неравенству

$$|R_n(z)| < \varepsilon. \tag{1.47}$$

Наименьшее число N, определяющее номер n, начиная с которого справедливо неравенство (1.47), зависит не только от ε, но и от z, и не является одинаковым для всех точек области сходимости ряда, т.е. $N(\varepsilon, z)$.

Предположим, что на некотором множестве точек ряд (1.46) не только сходится, но и мажорируется некоторым сходящимся числовым рядом, т.е. существует сходящийся ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.48}$$

с положительными членами, что во всех точках рассматриваемого множества

$$\left|f_0(z)\right| \le a_0, \ \left|f_1(z)\right| \le a_1, \ \left|f_2(z)\right| \le a_2, \ldots .$$

В этом случае говорят, что на данном множестве точек ряд (1.46) сходится правильно, в этом случае:

$$R_n(z) = \left|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots\right| \le \left|f_{n+1}(z)\right| + \left|f_{n+2}(z)\right| + \ldots \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = r_n .$$

Но так как ряд (1.48) сходится, то как бы ни было мало $\varepsilon > 0$, найдется такое $N(\varepsilon)$, что $r_n < \varepsilon$ при $n > N$, поэтому $R_n(z) < \varepsilon$. Таким образом, для рядов, правильно сходящихся на некотором множестве точек, неравенство (1.48) имеет место при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, если $n > N(\varepsilon)$.

Ряды, для которых можно выбрать N не зависящим от z, называются равномерно сходящимися на соответствующем множестве точек.

Можно доказать следующие свойства равномерно сходящихся рядов:

1) Если члены ряда

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots f_n(z) + \ldots \tag{1.49}$$

являются непрерывными функциями в некоторой области D или на некоторой дуге α и ряд сходится в этой области или на этой дуге равномерно, то сумма ряда $f(z)$ непрерывна в области D или на дуге α.

2) Если члены ряда (1.49) непрерывны на некоторой дуге α и ряд сходится на этой дуге равномерно, то его можно почленно интегрировать вдоль дуги α, т.е.

$$\int_{\alpha} f(z)dz = \int_{\alpha} f_0(z)dz + \int_{\alpha} f_1(z)dz + \dots. \qquad (1.50)$$

3) Если члены ряда (1.49) – аналитические в некоторой области D функции и ряд (1.49) сходится в области G равномерно, то его сумма $f(z)$ также является функцией, аналитической в области D.

б) Степенные ряды

Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \qquad (1.51)$$

где c_i – постоянные, называется степенным. Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля: если степенной ряд (1.51) сходится в точке z_0, то он сходится и при том абсолютно во всех точках, лежащих внутри окружности C с центром в точке $z = 0$ и проходящей через точку z_0 (т.е. во всех точках z, для которых $|z| < |z_0|$). При этом во всяком круге $z \le \rho$ радиуса ρ, меньшего, чем $|z_0|$, ряд (1.51) сходится правильно.

Рассмотрим любой луч, выходящий из нулевой точки. Возможны три случая:

1) Ряд (1.51) сходится во всех точках этого луча. Тогда в силу теоремы Абеля ряд (1.51) сходится внутри круга сколь угодно большого радиуса, т.е. сходится во всей плоскости.

2) Ряд расходится во всех точках луча, кроме точки $z = 0$. Следовательно, ряд расходится во всех точках плоскости, кроме точки $z = 0$.

3) На луче имеются как точки сходимости, отличные от $z = 0$, так и точки расходимости ряда (1.51). Из теоремы Абеля следует, что всякая точка сходимости находится ближе к нулевой точке, чем всякая точка расходимости, т.е. на луче найдется точка z^*, отделяющая точки луча, в которых ряд (1.51) сходится, от точек, в которых ряд расходится. Сама же точка z^* может принадлежать как к числу точек сходимости, так и к числу точек расходимости. Ряд (1.51) будет сходится внутри круга с центром в нулевой точке, окружность которого проходит через точку z^*, и расходится вне этого круга.

Данный круг называется кругом сходимости степенного ряда (1.51), а его радиус – радиусом сходимости этого ряда.

Ряд:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \qquad (1.52)$$

где a – любое комплексное число, также называют степенным.

Этот ряд подстановкой $z-a=t$ сводится к ряду (1.51), причем точке $t=0$ соответствует точка $z=a$. Следовательно, областью сходимости ряда (1.52) является круг с центром в точке $z=a$.

в) Ряд Тейлора.

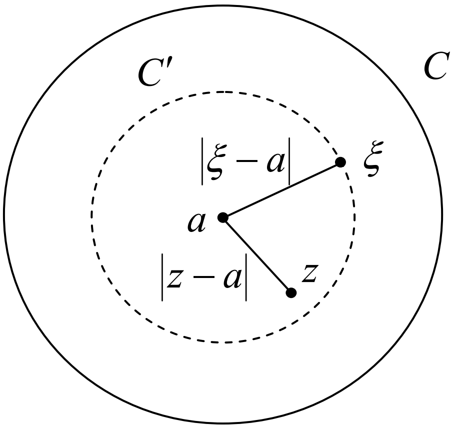

Рис. 8.

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга D, ограниченного окружностью C с центром в точке $z=a$. Разложим эту функцию в степенной ряд вида (1.52). Пусть z – любая внутренняя точка круга D. Проведем внутри круга D окружность C' с центром в точке a так, чтобы точка z оказалась внутри этой окружности. Тогда, если ξ – точка на окружности C', то в соответствии с интегральной формулой Коши имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \qquad (1.53)$$

Преобразуем один из множителей подынтегральной функции:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)}. \qquad (1.54)$$

Модуль разности $|\xi - a|$ равен радиусу окружности C', а так как модуль разности $|z-a|$ равен расстоянию точки z от центра окружности C, то как бы ни перемещалась точка ξ по окружности C', величина $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right|$ сохраняет постоянное значение, меньшее единицы, т.е. функция

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}$$

является суммой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}=1+\frac{z-a}{\xi-a}+\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n+\ldots, \tag{1.55}$$

сходящейся во всякой точке z внутри окружности C'. Эта прогрессия сходится правильно на окружности C' относительно ξ, потому что при фиксированном z величина $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right|=q$ постоянна на этой окружности и, следовательно, модули членов ряда (1.55) совпадают с соответствующими членами сходящегося числового ряда:

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots.$$

Этот ряд является мажорируемым рядом для ряда (1.55). Следовательно, подынтегральную функцию можно представить в виде суммы ряда, сходящегося правильно на окружности C':

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{\xi-a}+\frac{(z-a)}{(\xi-a)^2}f(\xi)+\frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3}f(\xi)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}f(\xi)+\ldots$$

и произвести почленное интегрирование, что приводит к разложению функции $f(z)$ в степенной ряд:

$$\begin{gathered}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-a}+\frac{(z-a)}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^2}+\ldots\\ \ldots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}+\ldots\end{gathered} \tag{1.56}$$

Итак, во всякой точке z, находящейся внутри круга D, функция $f(z)$ представлена с помощью (1.56) в виде суммы степенного ряда:

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots, \tag{1.57}$$

где $\quad c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'} \dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}, \ (n = 0,1,2,...).$

C' – любая окружность с центром в точке $z = a$, лежащая внутри круга D или любой другой замкнутый контур, однократно обходящий точку a в положительном направлении и лежащий внутри круга D, так как в силу теоремы Коши величина интеграла (1.57) не зависит от выбора контура C'. Полученный ряд называется рядом Тейлора.

Пользуясь интегральной формулой Коши можно для коэффициентов ряда Тейлора получить другое представление:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - a} = f(a),\ \ldots,\ c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

и записать разложение в ряд Тейлора в форме:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ... \quad (1.58)$$

Отсюда легко получить разложения элементарных функций:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ...$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - ...$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...$$

Ряд Тейлора можно почленно дифференцировать. Действительно, если $f(z)$ – аналитическая функция, то аналитической является и ее производная $f'(z)$, т.е.

$$f'(z)=f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(z-a)+\frac{f'''(a)}{2!}(z-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+....$$

К этому же равенству приводит почленное дифференцирование равенства (1.58). Полученный после дифференцирования ряд имеет тот же круг сходимости, что и исходный ряд.

В качестве точки a в формуле (1.58) можно взять любую точку, в которой функция $f(z)$ аналитична. Разложение (1.58) называют разложением функции $f(z)$ в окрестности точки a. Если $f(a)=0$, то точка a называется нулем функции $f(z)$. В этом случае разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид:

$$f(z)=c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...,$$

так как $c_0=f(a)=0$.

Если в разложении функции $f(z)$ в окрестности точки a:

$$c_0=c_1=...=c_{n-1}=0, \text{ но } c_n\neq 0,$$

тогда разложение имеет вид:

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+..., \tag{1.59}$$

то точка a называется нулем функции $f(z)$ порядка, или кратности n. Если $n=1$, то нуль называется простым. Если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то

$$f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0, \text{ но } f^{(n)}(a)\neq 0.$$

Разложение (1.59) можно переписать в виде:

$$f(z)=(z-a)^n\left[c_n+c_{n+1}(z-a)+...\right]=(z-a)^n\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+...$.

Для $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a)=c_n\neq 0$. Справедливо и обратное утверждение: всякая функция вида $f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$, где n – целое положительное число, $\varphi(a)\neq 0$, а $\varphi(z)$ аналитична в точке a, имеет в этой точке нуль порядка n.

Действительно, разложив $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a, получим:

$$\varphi(z)=\bar{c}_0+\bar{c}_1(z-a)+...,$$

где $\bar{c}_0=\varphi(a)\neq 0$. Отсюда:

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z)=\bar{c}_0(z-a)^n+\bar{c}_1(z-a)^{n+1}+....$$

Мы пришли к разложению (1.59), следовательно, точка a является нулем порядка n функции $f(z)$.

Имеет место следующая теорема о единственности аналитической функции.

Если значения аналитических в области D функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в некоторой бесконечной последовательности точек $z_1, z_2, ..., z_n, ...$, сходящейся к точке a ($\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$), которая является внутренней точкой области D, то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ тождественны во всей области D: $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$ в окрестности точки $z_0 = 0$

Решение.

Разложим данную функцию на простейшие дроби.

$$\frac{1}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом.

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}}.$$

Используя геометрическую прогрессию, получим:

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - z + z^2 - z^3 + ...\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + ...\right) =$$

$$= -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2} z^2 - \frac{7}{3^3} z^3 + ...$$

Радиус сходимости полученного ряда $R = 1$.

Пример.2 Разложить по степеням разности $z - 3$ функцию $f(z) = \dfrac{1}{3 - 2z}$.

Решение.

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{3 - 2z} = \frac{1}{3 - 2(z - 3 + 3)} = \frac{1}{-3 - 2(z - 3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}(z - 3)}.$$

Используя следующую формулу: $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...$ и заменяя z на $\frac{2}{3}(z-3)$, получим:

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}(z-3)+\frac{2^2}{3^2}(z-3)^2-\frac{2^3}{3^3}(z-3)^3+...\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-....$$

Этот ряд сходится при условии: $\left|\frac{2}{3}(z-3)\right|<1$, т.е. $R=\frac{3}{2}$.

Пример.3. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=\operatorname{tg} z$ и найти радиус сходимости ряда.

Решение.

Пусть искомый ряд имеет вид: $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+...$, где $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=c_n$, $(n=0,1,2,3,...)$, $f^{(0)}(0)=f(0)=0$.

Для нахождения значений производных $f^{(n)}(z)$ в точке $z=0$ продифференцируем функцию. Имеем:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2(z)} \text{ или } f'(z)=1+f^2(z)$$

$$f''(z)=2f(z)f'(z)$$

$$f'''(z)=2\left[(f'(z))^2+f(z)f''(z)\right]$$

$$f^{(4)}(z)=2\left[3f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)\right]$$

……………………..

Полагая $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=2$; $f^{(4)}(0)=0$; $f^{(5)}(0)=16,\ldots$.

Подставляя найденные значения производных в ряд, получим

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+...$$

Ближайшей особой точкой к точке $z = 0$ является точка $\xi = \dfrac{\pi}{2}$, поэтому радиус сходимости $R = \dfrac{\pi}{2}$.

г) Ряд Лорана.

Предположим, что $f(z)$ является однозначной аналитической функцией внутри кольца между концентрическими окружностями C' и C'' с центром в точке $z = a$, и пусть z – произвольная внутренняя точка этого кольца. Проведем окружности Γ' и Γ'' с центром в точке a так, чтобы каждая из них находилась внутри данного кольца, и чтобы точка z оказалась между Γ' и Γ''.

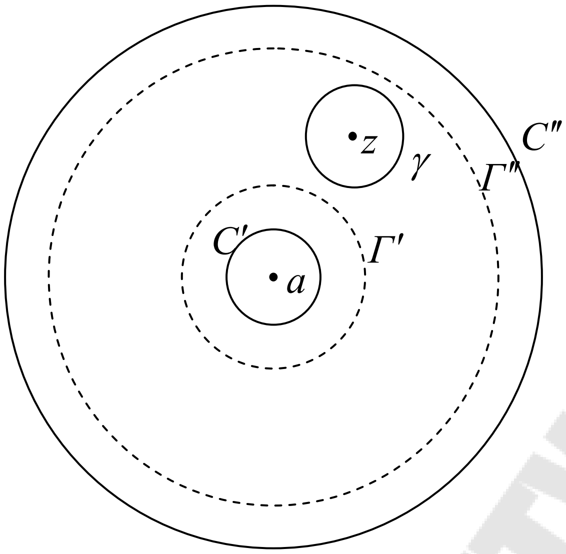

Рис. 9.

Опишем из точки z, как из центра, окружность γ, находящуюся в кольце между Γ' и Γ''. Пользуясь теоремой Коши для составного контура, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}.$$

Но, в силу интегральной формулы Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f(z)$$

и, следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \qquad (1.60)$$

Если ξ – точка на контуре Γ'', то $|\xi - a| > |z - a|$ и

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\xi - a}\left[1 + \frac{z-a}{\xi - a} + \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n + \ldots\right].$$

Ряд в правой части этого равенства сходится на окружности Γ'' правильно, умножив его почленно на $f(\xi)d\xi$ и проинтегрировав вдоль Γ'', получим для первого из интервалов в правой части (1.60) разложение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - a} + \frac{z-a}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\cdot$$
$$\cdot\int_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} + \ldots = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \tag{1.61}$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma''}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$, $n = 0,1,2,\ldots.$

Если же точка ξ находится на контуре Γ', то $|z-a| > |\xi - a|$, и следовательно, $\left|\dfrac{\xi - a}{z-a}\right| < 1$, поэтому для того, чтобы получить ряд, правильно сходящийся на Γ', преобразуем $\dfrac{1}{\xi - z}$ следующим образом:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = -\frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\xi - a}{z-a}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{\xi - a}{z-a} + \left(\frac{\xi - a}{z-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\xi - a}{z-a}\right)^{n-1} + \ldots\right].$$

После такого преобразования для второго интеграла в (1.60) получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{z\text{-}a}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\xi)d\xi + \frac{1}{(z-a)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\xi - a)f(\xi)d\xi +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\xi - a)^{n-1} f(\xi)d\xi + \ldots = \qquad (1.62)$$

$$= \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots$$

где $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\xi)(\xi - a)^{n-1} d\xi$, $n = 1,2,3,\ldots$.

В силу теоремы Коши для составного контура вместо путей интегрирования Γ'' и Γ' в формулах (1.61) и (1.62) можно взять любую окружность Γ с центром в точке a, лежащую в данном кольце между C' и C''.

Заметим также, что при замене a на $-a$ подынтегральное выражение в правой части (1.61) переходит в подынтегральное выражение правой части (1.62), поэтому из (1.60) получаем разложение функции $f(z)$, сходящееся во всякой точке z внутри кольца C' и C''

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots +$$

$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots, \qquad (1.63)$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а Γ – любая расположенная в кольце окружность с центром в точке $z = a$. Полученное разложение называют рядом Лорана.

Пример 1. Рассмотрим разложение в ряд Лорана функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, выбрав $a = 0$.

Решение.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z = 1$, $z = 2$. Следовательно, имеем три круговых кольца с центром в точке $z = 0$, в каждом из которых функция аналитична, а именно:

1. круг $|z| < 1$,
2. кольцо $1 < |z| < 2$,

3. внешность круга $|z|>2$.

Получим разложение в ряд Лорана в каждом из круговых «колец».

1) Разложение в круге $|z|<1$.

Представим функцию $f(z)$ в виде:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Так как $\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$, а функция $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ является суммой геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+...+\frac{z^n}{2^n}+...,$$

модуль знаменателя которой $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, то

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-...-\frac{z^n}{2^{n+1}}-.... \qquad (1.64)$$

Аналогично,

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+...+z^n+..., \qquad (1.65)$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z|<1$. Складывая (1.64) и (1.65) получим:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+...+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+...,$$

т.е. $c_n=1-\frac{1}{2^{n+1}}$, $n=0,1,2,...$, $c_{-n}=0$, $n=1,2,...$.

Полученное разложение является рядом Тейлора.

2) Разложение в кольце $1<|z|<2$.

Ряд (1.64) остается сходящимся, так как $|z|<2$, но ряд (1.65) расходится, потому что $|z|>1$, поэтому разложение (1.65) заменим следующим:

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+...\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-...-\frac{1}{z^n}-.... \quad (1.66)$$

В рассматриваемом кольце ряд (1.66) сходится, так как $|z|>1$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{z}\right|<1$.

Складывая (1.64) и (1.66), получаем:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-...-\frac{z^n}{2^{n+1}}-...-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-...-\frac{1}{z^n}-...,$$

т.е. $c_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$, $(n=0,1,2,...)$, $c_{-n}=-1$, $(n=1,2,...)$

3. Разложим в области $|z|>2$.

Равенство (1.66) сохраняется, так как если $|z|>2$, то тем более $|z|>1$, но ряд (1.64) расходится, тогда равенство (1.64) заменим следующим:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+...\right)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+.... \quad (1.67)$$

Ряд в правой части (1.67) сходится, так как $|z|>2$, и следовательно, $\left|\frac{2}{z}\right|<1$. Складывая (1.66) и (1.67), получим:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+...+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+...,$$

т.е. $c_n=0$, $(n=0,1,2,...)$, $c_{-n}=2^{n-1}-1$, $(n=1,2,...)$

Пример 2. Выбрав $a=1$, найдем разложение в ряд Лорана в различных областях функции $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Решение.

В данном случае имеем два круговых «кольца» с центром $z=1$:

1) круг, из которого удален центр $0<|z-1|<1$;

2) внешность круга $|z-1|>1$.

В каждом «кольце» функция $f(z)$ аналитична, а на границах имеет особые точки. Разложим в каждой области функцию $f(z)$ по степеням $(z-1)$.

1) Разложим в области $0<|z-1|<1$.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Далее:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+...+(z-1)^n+...\right],$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z-1|<1$. Следовательно,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-...-(z-1)^n-...,$$

т.е. $c_n=-1, (n=0,1,2,...)$, $c_{-1}=-1$, $c_{-2}=...=c_{-n}=...=0$

2) Разложение в области $|z-1|>1$

В этой области:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+...\right]=$$

$$=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+...+\frac{1}{(z-1)^n}+...$$

причем ряд в правой части равенства сходится, так как $|z-1|>1$ и, следовательно, $\dfrac{1}{|z-1|}<1$. Итак,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+...+\frac{1}{(z-1)^n}+...,$$

т.е. $c_n=0, (n=0,1,2,3,...)$, $c_{-1}=0$, $c_{-2}=c_{-3}...=c_{-n}=...=1$.

Пример 3. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ в кольце $1<|z|<2$.

Решение.

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}.$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+...$ остается сходящимся в кольце, так как $|z|<2$.

Ряд для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится при $|z|>1$. Поэтому преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...\right).$$

Полученный ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. при $|z|>1$. Тогда

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+...+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}.$$

§ 1.14. Изолированные особые точки

Особая точка $z=a$ функции $f(z)$ называется изолированной, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек, т.е. если в некоторой окрестности точки $z=a$ функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=a$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящейся к этой функции во всех точках круга с центром в данной изолированной особой точке a, кроме самой точки a, называется разложением функции в ряд Лорана в окрестности данной изолированной особой точки.

Будем называть ряд

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^2 + \ldots$$

правильной частью, а ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots$$

главной частью ряда Лорана и выясним, как связано поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$ с разложением функции в ряд Лорана в окрестности данной точки.

Предположим, что в некоторой окрестности точки $z = a$ функция $f(z)$ ограничена, т.е. существует такая постоянная M, что $|f(z)| < M$ во всех точках этой окрестности. Так как в качестве контура Γ можно взять окружность сколь угодно малого радиуса с центром в точке $z = a$, то отсюда следует, что $c_{-1} = 0$, $c_{-2} = 0$, …, $c_{-n} = 0$, …, т.е. главная часть ряда в разложении отсутствует, и разложение имеет вид:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^2 + \ldots. \quad (1.68)$$

Это разложение имеет место во всех точках некоторой окрестности точки $z = a$, кроме самой точки $z = a$. Но правая часть равенства (1.68), будучи суммой степенного ряда, аналитична и при $z = a$. Поэтому, если под $f(a)$ понимать сумму ряда при $z = a$, т.е. положить $f(a) = c_0$, то $z = a$ станет правильной точкой функции $f(z)$ и разложение (1.68) будет разложением $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$.

Вывод: если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности изолированной особой точки $z = a$, то мы можем всегда считать эту точку правильной точкой функции, положив $f(a) = c_0$.

Пусть теперь функция $f(z)$ неограничена в окрестности изолированной особой точки $z = a$. В этом случае либо $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, либо при $z \to a$ функция $f(z)$ вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). В первом случае будем точку $z = a$ называть полюсом функции $f(z)$, во втором – существенно особой точкой.

Если точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$, то в достаточно малой окрестности этой точки $|f(z)| > M$, как бы ни было велико M, и поэтому $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$.

Следовательно, функция $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ будучи отношением двух аналитических функций, является также функцией аналитической в некоторой окрестности точки $z=a$ всюду, кроме самой точки $z=a$. Но, по условию $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, следовательно, $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{1}{f(z)}=0$. Поэтому функция $F(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z=a$ и по доказанному эту точку можно считать правильной для $F(z)$, положив $F(a)=0$. Итак, если точка $z=a$ является полюсом функции $f(z)$, то она является нулем функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Точку $z=a$ называем полюсом порядка n функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

В случае $n=1$ полюс называется простым.

Точка $z=a$ тогда и только тогда является нулем функции $\dfrac{1}{f(z)}$ порядка n, когда

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^n\varphi(z), \tag{1.69}$$

где $\varphi(a)\neq 0$.

Но на основании (1.69) следует, что

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n\varphi(z)},$$

или если положить $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$, то

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}, \tag{1.70}$$

причем функция $\psi(z)$ также аналитична при $z=a$ и $\psi(a)\neq 0$.

Итак, точка $z=a$ тогда и только тогда является полюсом порядка n функции $f(z)$, когда $f(z)$ можно представить в виде (1.70).

Если числитель правой части (1.70) разложить в окрестности точки $z=a$ в ряд Тейлора, то получим:

$$f(z)=\frac{c_0+c_1(z-a)+...+c_n(z-a)^n+...}{(z-a)^n},$$

где $c_0=\psi(a)\neq 0$.

Отсюда произведя почленное деление, будем иметь:

$$f(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+c_{n+2}(z-a)^2+...+\frac{c_{n-1}}{z-a}+\frac{c_{n-2}}{(z-a)^2}+...+\frac{c_0}{(z-a)^n},$$

$c_0\neq 0$.

Таким образом, если точка $z=a$ является полюсом порядка n функции $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ представляет собой конечную сумму, причем порядок полюса равен наивысшему показателю степени выражения ($z-a$) в знаменателях членов главной части разложения.

Итак, главная часть разложения функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является полюсом. Отсюда следует, что главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки содержит бесконечное множество отличных от нуля членов.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки подчиняется следующей теореме Сохоцкого-Вейерштрасса: Если точка a является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого заданного комплексного числа A найдется последовательность точек, сходящаяся к точке a, вдоль которой значения $f(z)$ стремятся к A; для $A=\infty$ теорема также верна.

Классификацию изолированных особых точек можно распространить и на случай, когда изолированной особой точкой является бесконечно удаленная точка. Назовем бесконечно удаленную точку изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса, нет других особых точек функции $f(z)$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке $z=0$ будем называть разложением в окрестности бесконечно удаленной точки.

Запишем члены разложения в следующем порядке:

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+...+\frac{c_{-n}}{z^n}+...+c_1z+c_2z^2+...+c_nz^n+.... \quad (1.71)$$

Назовем ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ правильной частью, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ – главной частью разложения (1.71).

Если в некоторой окрестности точки $z = \infty$ функция $f(z)$ ограничена, то $c_1 = c_2 = ... = c_n = ... = 0$ и разложение (1.71) примет вид:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + ... + \frac{c_{-n}}{z^n} + ...$$

и точку $z = \infty$ можно считать правильной точкой функции $f(z)$, положив $f(\infty) = c_0$.

Если $z = \infty$ – правильная точка функции $f(z)$ и $f(\infty) = 0$, то будем точку $z = \infty$ называть нулем порядка m функции $f(z)$, если точка $z = 0$ является нулем порядка m функции $f(1/z)$.

Если $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$, будем точку $z = \infty$ называть полюсом функции.

Очевидно, что если точка $z = \infty$ – полюс функции $f(z)$, то точка $z = 0$ – полюс функции $f(1/z)$. Назовем точку $z = \infty$ полюсом порядка m функции $f(z)$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ будет иметь вид:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + ... + \frac{c_{-n}}{z^n} + ... + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_m z^m,$$

где $c_m \neq 0$.

Если функция $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ неограниченна и в то же время $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ ни конечный, ни бесконечный, не существует, то точку $z = \infty$ назовем существенно особой для функции $f(z)$. В этом случае главная часть разложения (1.71) содержит бесконечное множество отличных от нуля членов, в поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ определяется теоремой Сохоцкого.

Общие формулы для коэффициентов ряда Лорана мало удобны для вычислений, иногда применяют более простые приемы вычисления.

Для того, чтобы разложить в ряд Лорана рациональную функцию, достаточно воспользоваться представлением правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей. Всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму дробей вида $A/(z-a)^n$, A, a – комплексные числа.

При разложении в ряд Лорана иррациональных и трансцендентных функций можно использовать разложение в ряд Тейлора функций e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln(1+z)$, биномиальный ряд и другие известные разложения. Так, например, в окрестности точки $z=2$

$$\cos\frac{1}{z-2}=1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-2)^{2n}}+\ldots.$$

Иногда следует предварительно преобразовать разлагаемую в ряд функцию.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в окрестности $z=1$ функцию $\sin\frac{z}{z-1}$.

Решение.

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}.$$

Откуда:

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots.$$

Если бесконечно удаленная точка является правильной для функции $f(z)$, то разложение в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки сводится подстановкой $z=1/\xi$ к разложению функции $f(1/\xi)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\xi=0$.

Пример 2. Разложить функцию $f(z)=e^{\frac{z}{z+2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$.

Решение.

Положим $z=1/\xi$, получим $f(1/\xi)=e^{\frac{1/\xi}{1/\xi+2}}=e^{\frac{1}{1+2\xi}}$, причем $\xi=0$ является для этой функции правильной точкой.

Обозначим $f(1/\xi)=\varphi(\xi)$, будем иметь

$$\varphi'(\xi)=-\frac{2}{(1+2\xi)^2}e^{\frac{1}{1+2\xi}},$$

$$\varphi''(\xi) = e^{\frac{1}{1+2\xi}}\left[\frac{8}{(1+2\xi)^3} + \frac{4}{(1+2\xi)^4}\right],$$

и т.д. Следовательно, $\varphi(0) = e$, $\varphi'(0) = -2e$, $\varphi''(0) = 12e$ и т.д.

Отсюда:

$$\varphi(\xi) = e(1 - 2\xi + 6\xi^2 + ...) \quad \text{или} \quad e^{\frac{z}{z+2}} = e\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{6}{z^2} + ...\right).$$

Ряд сходится вне круга радиуса $R = 2$, так как единственной особой точкой функции является точка $z = -2$.

Пример 3. Показать, что $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ являются нулем первого порядка функции $\sin z$.

Решение.

Пользуясь разложением $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - ...$, найдем

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - k\pi) = (-1)^k \left[(z - k\pi) - \frac{(z - k\pi)^3}{3!} + ... + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{(z - k\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...\right]$$

откуда следует, что $z = k\pi$ – нуль первого порядка для $\sin z$.

Пример 4. Показать, что $z = 0$ есть нуль второго порядка для функции $1 - \cos z$.

Решение.

Действительно,

$$1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Пример 5. Найти нули функции $f(z) = 1 + \cos z$ и определить их порядок.

Решение.

Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z = -1$, откуда $z_n = (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ – нули данной функции. Далее

$$f'[(2n+1)\pi] = -\sin(2n+1)\pi = 0,$$

$$f''[(2n+1)\pi] = -\cos(2n+1)\pi = 1 \neq 0\,.$$

Следовательно, точки $z_n = (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются нулями второго порядка данной функции.

Пример 6. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функции $f(z) = \dfrac{z^8}{z - \sin z}$.

Решение.

Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$, получим

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots\right)} = \frac{z^8}{\dfrac{z^3}{3!} - \dfrac{z^5}{5!} + \ldots} =$$

$$= \frac{z^5}{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{z^2}{5!} + \ldots} = z^5 \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{z^2}{5!} + \ldots}\,.$$

Положим $\varphi(z) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{z^2}{5!} + \ldots}$, тогда $f(z) = x^5 \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0 = 0$, причем $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является для данной функции нулем пятого порядка.

Пример 7. Пусть $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$. Показать, что данная особая точка есть устранимая особая точка.

Решение.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1\,.$$

Следовательно, точка $z_0 = 0$ есть устранимая особая точка.

Пример 8. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$.

Решение.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z=-1$, $z=1$. Исследуем точку $z=-1$. Представим $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{\dfrac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}.$$

Здесь $\varphi(z)=\dfrac{\sin z}{z-1}$ – аналитична в окрестности точки $z=-1$, причем $\varphi(-1)=\dfrac{\sin 1}{2}\neq 0$. Следовательно, точка $z=-1$ является двукратным полюсом данной функции. Аналогично, записав функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\dfrac{\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1}$, заключаем, что точка $z=1$ есть простой полюс этой функции.

Пример 9. Показать, что точка $z=0$ является полюсом второго порядка функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$.

Решение.

Для получения разложения $f(z)$ в ряд Лорана воспользуемся разложением $\sin z$ в ряд Тейлора. Тогда

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-...}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-....$$

Главная часть разложения есть $\dfrac{1}{z^2}$, следовательно, $z=0$ для $f(z)$ является полюсом второго порядка.

Пример 10. Показать, что $z=0$ устранимой особой точкой функции $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

Решение.

Воспользуемся разложением функции $\cos z$ в ряд Тейлора, получим:

$$f(z)=\frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)}{z^2}=\frac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\ldots}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots.$$

Так как главная часть в разложении отсутствует, то $z=0$ – устранимая особая точка.

Пример 11. Определить характер особой точки $z=1$ функции $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

Решение.

Используем разложение $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots$ и, полагая $u=\frac{1}{z-1}$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z_0=1$

$$f(z)=(z-1)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\ldots\right]=$$

$$=1+(z-1)+\frac{1}{2!(z-1)}+\frac{1}{3!(z-1)^2}+\ldots.$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-1)$. Следовательно, точка $z_0=1$ – существенно особая точка функции $f(z)$.

Пример 12. Определить характер особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}$.

Решение.

Разлагаем функцию $\cos z$ в ряд Тейлора по степеням z, получаем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля.

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\ldots\right)=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10!}-\ldots.$$

Разложение в окрестности точки $z_0=0$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0=0$ является полюсом пятого порядка, т.к. наибольший показатель степени z, содержащийся в знаменателе членов главной части ряда Лорана равен пяти.

§ 1.15. Теория вычетов

а) Основная теорема о вычетах.

Если точка $z=a$ является правильной точкой или изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, то можно выбрать простой контур *C*, однократно обходящий точку *a* в положительном направлении так, чтобы на контуре *C* и всюду внутри этого контура функция $f(z)$ была аналитической. Величину $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$ будем называть вычетом функции $f(z)$ относительно точки *a* и писать $\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$.

Из теоремы Коши для составного контура следует, что вычет данной функции относительно заданной точки не зависит от формы и размеров контура *C*.

Если точка *a* является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то коэффициент при c_{-1} первого члена главной части разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки *a* равен $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$, и, следовательно, вычет функции $f(z)$ относительно точки *a* совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки *a* $\operatorname{Res}[f(z),a]=c_{-1}$.

Если *a* является правильной точкой функции $f(z)$, то все коэффициенты главной части разложения в окрестности этой точки равны нулю, и, следовательно, вычет функции относительно правильной точки равен нулю.

Если a – полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть отличен от нуля, но может оказаться и равным нулю.

Пусть C_0 – простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением n изолированных особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$. Окружим эти точки лежащими внутри контура C_0 окружностями $C_1, C_2, ..., C_n$ столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек. Тогда в силу теоремы Коши для составного контура имеем:

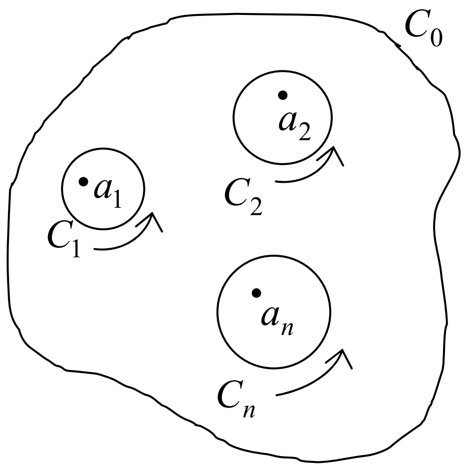

Рис. 10.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(z)dz + ... + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} f(z)dz$$

(обход совершается против часовой стрелки).

Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек этой функции, находящихся внутри контура C_0 (основная теорема о вычетах).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), a_k\right].$$

Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки считаем величину $\frac{1}{2\pi i}\int_{C} f(z)dz$, где C – окружность с центром в начале координат столь большого радиуса, что вне этой окрестности нет особых точек функции $f(z)$, отличных от бесконечно удаленной особой точки, направление обхода контура необходимо установить по часовой стрелке. Отсюда следует, что если c_{-1} является коэффициентом при $1/z$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, то $\mathrm{Res}\left[f(z), \infty\right] = -c_{-1}$.

Если бесконечно удаленная точка функции $f(z)$ правильная, то вычет относительно нее не обязательно равен нулю. Например, для функции $f(z)=2+\frac{3}{z}$ точка $z=\infty$ является правильной, если считать, что $f(\infty)=2$, то $c_{-1}=3$, и, следовательно, $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-3$.

Из сопоставления определения вычета относительно бесконечно удаленной точки с основной теоремой о вычетах следует, что, если функция имеет конечное число особых точек, то вычет относительно бесконечно удаленной точки равен взятой с обратным знаком сумме вычетов относительно всех особых точек, расположенных в конечной части плоскости. Следовательно, сумма вычетов относительно особых точек, включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю.

б) Вычет относительно полюса.

Если точка a является простым полюсом функции $f(z)$, то в окрестности этой точки функция $f(z)$ равна

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{c_{-1}}{z-a}, \qquad (1.72)$$

где $\varphi(z)$ является суммой правильной части разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a, является аналитической функцией. Из (1.72) следует:

$$c_{-1}=(z-a)f(z)-(z-a)\varphi(z).$$

Переходя к пределу при $z\to a$, получим:

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right],$$

т.к. вследствие непрерывности функции $\varphi(z)$ в точке a $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=\varphi(a)$ и $\lim\limits_{z\to a}\left[(z-a)\varphi(z)\right]=0$.

Итак, если a – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]. \qquad (1.73)$$

Пример 1. Вычислить вычет функции $\frac{z^2}{z-2}$ относительно точки $z=2$.

Решение.

Точка $z=2$ является простым полюсом функции $\dfrac{z^2}{z-2}$. Следовательно, в соответствии с формулой (1.73) имеем:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z-2},2\right]=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right]=4\,.$$

Пример 2. Вычислить вычет функции $\dfrac{1}{\sin z}$ относительно точки $z=0$.

Решение.

Точка $z=0$ является простым полюсом для функции $\dfrac{1}{\sin z}$, т.е.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin z},0\right]=\lim_{z\to 0}\left[z\frac{1}{\sin z}\right]=1.$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула. Предположим, что точка $z=a$ является простым полюсом $f(z)$ и что функция $f(z)$ представлена в виде $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$, $f_2(z)$ – функции, аналитические в точке a, причем для функции $f_2(z)$ точка a является нулем первого порядка, а $f_1(a)\neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]=\lim_{z\to a}\frac{f_1(z)}{\dfrac{f_2(z)}{z-a}}=\frac{f_1(a)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f_2(z)}{z-a}}\,.$$

Но так как $f_2(a)=0$, то $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f_2(z)}{z-a}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f_2(z)-f_2(a)}{z-a}=f_2'(a)$.

Следовательно:

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{f_1(a)}{f_2'(a)}\,.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{Res}[\operatorname{ctg} z,0]$.

Решение.

Так как $\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$, а точка $z=0$ является нулем первого порядка для функции $\sin z$, то

$$\mathrm{Res}[\mathrm{ctg}\, z, 0] = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_C \frac{(z+1)}{z^2+4} dz$, где C – окружность $|z| = 3$, обходимая в положительном направлении.

Решение.

Внутри контура C функции $\frac{z+1}{z^2+4}$ имеет особые точки $z = \pm 2i$, являющиеся полюсами первого порядка, так как $z^2 + 4 = (z-2i)(z+2i)$. Тогда

$$\mathrm{Res}[f(z), -2i] = \left.\frac{z+1}{(z^2+4)'}\right|_{z=-2i} = \left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=-2i} = -\frac{1-2i}{4i};$$

$$\mathrm{Res}[f(z), 2i] = \left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{1+2i}{4i}$$

и, следовательно, с помощью основной теоремы о вычетах имеем:

$$\int\limits_C \frac{(z+1)}{z^2+4} dz = 2\pi i\left(\frac{1+2i}{4i} - \frac{1-2i}{4i}\right) = 2\pi i.$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_C \frac{zdz}{1-2\sin^2 z}$, где C – окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

Решение.

Так как $1 - 2\sin^2 z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z\right)$, то внутри контура C подынтегральная функция имеет два простых полюса в точках $z_1 = \pi/4$ и $z_2 = -\pi/4$. В соответствии с основной теоремой о вычетах

$$\int\limits_C \frac{zdz}{1-2\sin^2 z} = 2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}, \frac{\pi}{4}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}, -\frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

Тогда, учитывая что $(1-2\sin^2 z)' = -2\sin 2z$, имеем:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}, \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi/4}{-2\sin(\pi/2)} = -\frac{\pi}{8};$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z}, -\frac{\pi}{4}\right] = \frac{-\pi/4}{-2\sin(-\pi/2)} = -\frac{\pi}{8}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{C2} \frac{zdz}{1-2\sin^2 z} = 2\pi i\left(-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\pi^2 i}{2}.$$

Если точка $z = a$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, то в окрестности этой точки:

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m},$$

где $\varphi(z)$ – сумма правильной части разложения в ряд Лорана и, следовательно, аналитична в точке $z = a$. Тогда вычет определяется следующей формулой:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right].$$

Пример 6. Определить вычет функции $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ относительно точки $z = i$.

Решение.

Точка $z = i$ является полюсом третьего порядка данной функции, так как $\dfrac{1}{(z^2+1)^3} = \dfrac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$, то вычет равен:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^3}, i\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+i)^{-3}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(-3)(-4)(z+i)^{-5}\right] = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16}i.$$

в) Логарифмические вычеты

Если точка a является полюсом порядка m функции $f(z)$, то функция $f(z)$, представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, где $\varphi(z)$ аналитическая функция и отлична от нуля в точке a.

Отсюда:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[\mathrm{Ln}\, f(z)\right]' = \left[\mathrm{Ln}\,\varphi(z) - m\,\mathrm{Ln}(z-a)\right]' = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{m}{z-a}.$$

Функция $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ является аналитической в точке a, следовательно, главная часть разложения функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ в ряд Лорана в окрестности точки a состоит из одного члена $-\dfrac{m}{z-a}$, поэтому

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right] = -m. \qquad (1.74)$$

Если точка a является нулем порядка m функции $f(z)$, то эта же точка является полюсом порядка m функции $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Так как $\mathrm{Ln}\, f(z) = -\,\mathrm{Ln}\, F(z)$, то

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left[\mathrm{Ln}\, f(z)\right]' = -\left[\mathrm{Ln}\, F(z)\right]' = -\frac{F'(z)}{F(z)}. \qquad (1.75)$$

Для функции $F(z)$ точка a – полюс порядка m, тогда

$$\mathrm{Res}\left[\frac{F'(z)}{F(z)}, a\right] = -m,$$

отсюда на основании (1.75) имеем: $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, a\right] = m$, т.е. вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки, являющейся нулем функции $f(z)$ равен порядку нуля, а относительно точки являющейся полюсом функции $f(z)$ – порядку этого полюса с обратным знаком.

Предположим, что функция $f(z)$ аналитична и отлична от нуля во всех точках некоторого контура C, а внутри этого контура имеет конечное число особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$, причем все они являются полюсами. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ нули функции $f(z)$, расположенные внутри контура *C*. При этих условиях особыми точками функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, расположенными внутри контура *C*, будут только точки $a_1, a_2, ..., a_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и, в соответствии с основной теоремой о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \alpha_i\right]. \qquad (1.76)$$

Величину, стоящую в левой части равенства (1.76), называют логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура *C*.

Если каждый нуль считать столько раз, каков его порядок, то сумма: $\sum_{q=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a_q\right] = N$ равна числу нулей функции $f(z)$.

Аналогично, $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \alpha_i\right] = -P$ равна числу полюсов функции $f(z)$.

Тогда равенство (1.76) можно записать в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

Таким образом, приходим к теореме о логарифмическом вычете: при указанных выше условиях логарифмический вычет функции относительно замкнутого контура равен разности между количеством нулей и количеством полюсов функции, расположенных внутри данного контура.

§ 1.16. Вычисление несобственного интеграла с помощью вычетов

Предположим, что бесконечно удаленная точка является нулем второго или более высокого порядка функции $f(z)$, и следовательно, разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots. \qquad (1.77)$$

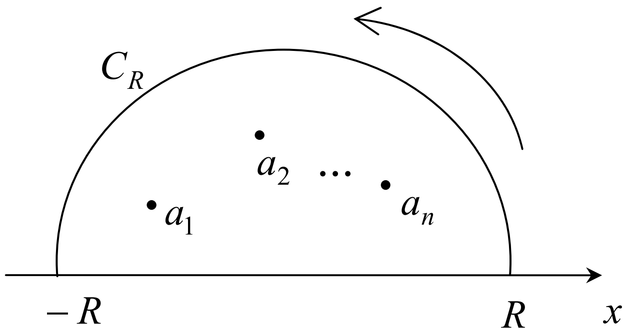

Рис. 11.

Допустим также, что $f(z)$ является аналитической функцией на действительной оси, а в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда все лежащие в верхней полуплоскости особые точки функции $f(z)$ можно заключить внутрь расположенного в верхней полуплоскости полукруга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. В соответствии с основной теоремой о вычетах интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ взятый на границе C этого полукруга, будет равен $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости, причем при дальнейшем увлечении R этот интеграл изменяться не будет, так как никакие новые особые точки при этом внутрь полукруга не попадут.

Пусть C_R – полуокружность, входящая в состав границы C указанного полукруга, тогда

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{R} f(z)dz,$$

но на основании (1.77) имеем $f(z) = \frac{1}{z^2}\varphi(z)$, где $\varphi(z) = c_{-2} + \frac{c_{-3}}{z} + ...$. Для функции $\varphi(z)$ бесконечно удаленная точка является правильной, причем $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z) = c_{-2}$, следовательно, функция $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. во всех точках полуокружности C_R $|\varphi(z)| < M$, где M – некоторое положительное число. Следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. А так как $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то, если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным свойствам, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ равен произведению числа $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение.

Функция $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ имеет в бесконечности нуль четвертого порядка, особыми точками функции являются полюсы второго порядка в точках $z = \pm i$, из них только первый находится в верхней полуплоскости:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right] = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4} i.$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4} i\right) = \frac{\pi}{2}$.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ может быть вычислен с помощью леммы Жордана: пусть C_R – лежащая в верхней полуплоскости дуга окружности радиуса R с центром в фиксированной точке z_0, а функция $f(z)$ имеет вид: $f(z) = e^{itz} F(z)$, причем $t > 0$. Если функция $F(z)$ аналитическая на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек и $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = 0$, то $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

Очевидно, если $a_1, a_2, ..., a_n$ – особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, то при достаточно большом R

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), a_k].$$

Очевидно также, что при $R \to \infty$ имеем $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to \infty$, и по лемме Жордана получим, переходя к пределу при $R \to \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), a_k\right].$$

Пример 2. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

Решение.

Функция $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Здесь $t=1$ и $F(z) = \frac{z}{z^2-2z+10}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы первого порядка $z=1+3i$ и $z=1-3i$. В верхней полуплоскости имеется единственная особая точка $z=1+3i$. Найдем относительно этой точки вычет функции $f(z)$:

$$\mathrm{Res}\left[f(z), 1+3i\right] = \left.\frac{ze^{iz}}{(z^2-2z+10)'}\right|_{z=1+3i} = \frac{1+3i}{6i}e^{-3+i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx = 2\pi i\frac{1+3i}{6i}e^{-3+i} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) =$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1) + \frac{i\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

Сравнивая в обеих частях этого равенства действительные и мнимые части и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10},$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi}{3} e^{-3} (3\cos 1 + \sin 1).$$

Пример 3. Вычислить $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4}$, она удовлетворяет всем условиям леммы Жордана.

Особыми точками $f(z)$ будут два простых полюса $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, причем в верхней полуплоскости лежит первый из них.

$$\mathrm{Res}[f(z_1)] = \left. \frac{ze^{iz}(z - 2i)}{(z + 2i)(z - 2i)} \right|_{z = z_1} = \frac{z_1 e^{iz_1}}{2z_1} = \frac{1}{2e^2}.$$

Тогда имеем $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 4} dx = 2\pi i \frac{1}{2e^2} = \frac{\pi i}{e^2}$.

Отделяя мнимую часть, находим

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{e^2}.$$

Пример 4. Вычислить $I = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} \quad (a > b > 0)$.

Решение.

Применяем подстановку $e^{ix} = z$, получим после преобразований:

$$I = \frac{4}{i} \int_{C} \frac{zdz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, F(z_k).$$

Внутри единичного круга при условии, что $a > b > 0$, находится только один полюс (двукратный)

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Вычет $F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$ относительно этого полюса равен

$$\operatorname{Res} F(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{z(z - z_1)^2}{b^2 (z - z_1)^2 (z - z_2)^2}\right] = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{3/2};$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

ГЛАВА 2

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 2.1. Преобразование Лапласа

Определение оригинала. Оригиналом называется функция $f(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая следующим условиям :

1. Функция $f(t)$ непрерывна за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Кроме того для каждого значения t, при котором функция непрерывна , существуют положительные числа M, α и Δ такие, что

$$\left|f(t+h)-f(t)\right| \le A|h|^{\alpha} \tag{1.1}$$

для всех $|h| \le \Delta$.

2. $f(t)=0$ для всех $t<0$.

Рассмотрим следующую задачу:
дана функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x)=f(x).$$

3. Существуют такие постоянные M и s, что для всех t

$$\left|f(t)\right| \le Me^{st}. \tag{1.2}$$

Число s называется показателем роста функции $f(t)$. Простейшим оригиналом является единичная функция

$$\theta(t)=1 \text{ при } t>0 \text{ и } \theta(t)=0 \text{ при } t<0.$$

Если функция $g(t)$ не удовлетворяет условию 2 , но удовлетворяет условиям 1 и 3, то функция $f(t)=\theta(t)g(t)$ будет оригиналом.В дальнейшем будем опускать множитель $\theta(t)$ и считать , что все функции равны 0 для отрицательных t.

<u>Определение изображения</u>. Изображением функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного $p=x+iy$, задаваемую выражением

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (1.3)$$

Интегральное преобразование (1.3) называется преобразованием Лапласа. Очевидно, что интеграл существует не при всех значениях комплексной переменной p. То, что функция $f(t)$ имеет своим изображением функцию $F(p)$ будем записывать символом

$$f(t) \div F(p).$$

Теорема существования оригинала. Для всякого оригинала $f(t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$, где s - показатель роста функции $f(t)$, существует изображение $F(p)$. Причем $F(p)$ является аналитической функцией в этой полуплоскости.

Доказательство:

Оценим интеграл (1.3) по модулю. Согласно (1.2) при $\operatorname{Re} p = x > s$

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^{\infty} Me^{-(x-s)t}dt = \frac{M}{x-s}. \qquad (1.4)$$

Оценим также интеграл, который получается из интеграла (1.3) дифференцированием по параметру p. Имеем

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)te^{-pt}dt\right| \le \int_0^{\infty} Mte^{-(x-s)t}dt = \frac{M}{(x-s)^2}. \qquad (1.5)$$

Из (15) следует, что функция $F(p)$ в поуплоскости $\operatorname{Re} p > s$ дифференцируема, а следовательно является аналитической функцией .

Из теоремы следует , что изображение $F(p)$ определено лишь в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$.

Из (1.4) следует , что

$$\lim_{x\to+\infty} F(p)=0. \qquad (1.6)$$

Если функция $F(p)$ является аналитической в бесконечно удаленной точке, то $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$ по любому пути.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $f(t)=a$. Найдем изображение этой функции

Имеем

$$\int_0^\infty ae^{-pt}dt = \frac{a}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Отсюда $a \div \frac{a}{p}$

Найдем изображение функции $f(t) = e^{\alpha t}$

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha.$$

Откуда $e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}$.

Найдем еще изображение функции $f(t) = t^n$, где n-натуральное число. Интегрируя n раз по частям , получим

$$\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty nt^{n-1}e^{-pt}dt = ... = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

Следовательно $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$.

§2.2. Свойства преобразования Лапласа

Свойство линейности. Если $f_1(t) = F_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_1$ и $f_2(t) = F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_2$, то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

Теорема смещения. Дадим переменной p приращение α. Тогда преобразование Лапласа примет вид

$$F(p+\alpha) = \int_0^\infty f(t)e^{-(p+\alpha)t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t}e^{-pt}dt.$$

Откуда

$$f(t)e^{\alpha t} \div F(p+\alpha). \qquad (1.7)$$

Теорема запаздывания. Пусть функция $f(t)=0$ при $t<\tau$ И $f(t)>0$ при $t>\tau$. Такую функцию будем называть запаздывающей и обозначать $f_\tau(t)$. Найдем ее изображение

$$f_\tau(t) \div \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-p\tau}e^{-pu}du = e^{-p\tau}F(p). \qquad (1.8)$$

Теорема подобия. В формуле (1.3) сделаем замену $t \to \alpha t$ Получим

$$f(\alpha t) \div \int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt = \{\alpha t = u\} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{pu}{\alpha}}du.$$

Откуда

$$f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \qquad (1.9)$$

Дифференцирование оригинала. Пусть производная функции $f(t)$ является оригиналом. Найдем изображение производной. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$f`(t) \div \int_0^\infty f`(t)e^{-pt}dt = \{dv = f`(t)dt, u = e^{-pt}, v = f(t), du = -pe^{-pt}\} =$$

$$= \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0).$$

Окончательно получим

$$f`(t) \div pF(p) - f(0). \qquad (1.10)$$

Если $f^{(n)}(t)$ является оригиналом , то ее изображение дается выражением

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - \left[f^{(n-1)}(0) + p\ f^{(n-2)}(0) + \ldots + p^{n-1}f(0)\right] . \qquad (1.11)$$

Для изображения второй производной имеет место формула

$$f``(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f`(0) . \qquad (1.12)$$

Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $-t$

$$tf(t) \div -F`(p) \ . \tag{1.13}$$

Действительно, так как функция $F(p)$ является аналитической, то ее можно дифференцировать по p

$$F`(p) = -\int_0^\infty tf(t)dt \ ,$$

что эквивалентно формуле (1.13).

И вообще

$$t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p). \tag{1.14}$$

Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}. \tag{1.15}$$

Так как функция $g(t) = \int f(\tau)d\tau$ является оригиналом , то имеем

$$f(t) = g`(t) \div pG(p).$$

Следовательно , $F(p) = pG(p)$. откуда $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Интегрирование изображения

Если интеграл $\int_p^\infty F(q)dq$ сходится , то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(q)dq. \tag{1.16}$$

Пример. Найдем изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

Так как $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, то $\dfrac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \dfrac{1}{q^2+1}dq = arcctgp$.

Изображение свертки

Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется выражение

$$f(t)\otimes g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Найдем изображение свертки

$$f(t)\otimes g(t)\div\int_0^\infty e^{-pt}dtdt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Изменяя в двойном интеграле порядок интегрирования, получим

$$f(t)\otimes g(t)\div\int_0^\infty f(\tau)d\tau dt\int_\tau^\infty e^{-pt}g(t-\tau)dt=\int f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty g(u)e^{-pu}du=$$

$$=F(p)G(p) \tag{1.17}$$

Часто используют интеграл Дюамеля

$$pF(p)G(p)\div f(0)g(t)+\int_0^t f`(\tau)g(t-\tau)d\tau\,. \tag{1.18}$$

Таблица изображений

Оригинал	**Изображение**
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
$\sin\varpi t$	$\dfrac{\varpi}{p^2+\varpi^2}$
$\cos\varpi t$	$\dfrac{p}{p^2+\varpi^2}$
$sh\,\varpi t$	$\dfrac{\varpi}{p^2-\varpi^2}$
$ch\,\varpi t$	$\dfrac{p}{p^2-\varpi^2}$
$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$
$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+a}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

§2.3. Нахождение оригинала по изображению

Первая теорема разложения. Если функция $F(p)$ является аналитической в бесконечно удаленной точке и ее разложение в ряд Лорана в ее окрестности $|p| \geq R$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} , \tag{1.19}$$

то ее оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} . \tag{1.20}$$

Доказательство

Рассмотрим функцию $G(q) = F(1/q)$. Эта функция является является аналитической в круге $|q| \leq \dfrac{1}{R}$ и ее разложение в ряд Тейлора имеет вид $G(q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ **.** Согласно неравенствам Коши коэффициенты c_n удовлетворяют неравенствам $|c_n| < MR^n$. С учетом этих неравенств имеем

$$|f(t)| \leq MR \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{(R|t|)^n}{n!} = M\,\mathrm{Re}^{R|t|}$$

Из последнего неравенства следует, что ряд (1.20) сходится и функция $f(t)$ является оригиналом. Умножая (1.20) на e^{-pt} и почленно интегрируя, получим (1.19) . что и требовалось доказать.

Пример. Найдем оригинал функции $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{p}$. Раскладывая ее в ряд Лорана , имеем

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{p^{n+1}} .$$

Ее оригинал согласно (1.20) равен

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} = J_0(2\sqrt{t}) ,$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Вторая теорема разложения. Если функция $F(p) = \dfrac{\varphi(p)}{\psi(p)}$ представляет собой правильную рациональную дробь , то ее оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(n_k - j)!} \cdot t^{n_k - j} \cdot e^{p_k t} , \tag{1.21}$$

где

$$A_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[\frac{(p - p_k)^{n^k} \cdot \varphi(p)}{\psi(p)} \right]_{p=p_k} \tag{1.22}$$

p_k – нули многочлена $\psi(p)$, n_k - кратности этих корней, m - число нулей.

Доказательство

Пусть разложение многочлена $\psi(p)$ на множители имеет вид

$$\psi(p) = (p - p_1)^{n_1} \cdot (p - p_2)^{n_2} \cdots (p - p_m)^{n_m} , \tag{1.23}$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$.

Разложим правильную рациональную дробь $F(p) = \dfrac{\varphi(p)}{\psi(p)}$ на сумму простейших дробей

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(p - p_k)^{n_k - j + 1}} . \tag{1.24}$$

Найдем коэффициенты A_{kj}. Для этого умножим (1.24) на $(p - p_k)^{n_k}$, про дифференцируем $j-1$ раз и положим $p = p_k$. В результате получим

$$A_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[\frac{(p - p_k)^{n^k} \cdot \varphi(p)}{\psi(p)} \right]_{p=p_k} .$$

Так как $\dfrac{1}{(p - p_k)^{n_k - j + 1}} \div \dfrac{t^{n_k - j} \cdot e^{p_k t}}{(n_k - j)!}$, то оригинал функции $F(p)$ находится по формуле (1.21).

Если воспользоваться формулой вычета в полюсе , то выражение (1.21) можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re}s\left[F(p) \cdot e^{pt}\right]_{p=p_k} . \qquad (1.25)$$

Пример. Найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{1}{p^2(P-1)}$.

Разложим нашу функцию на сумму простейших дробей

$$F(p) = \frac{1}{p^2(P-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1}.$$

Приравнивая числители слева и справа , получим

$$1 = Ap(p-1) + B(p-1) + Cp^2$$

Полагая $p = 0$ находим $B = -1$.

Полагая $p = 1$ находим $C = 1$.

И наконец полагая $p = -1$ находим $A = -1$.

Имеем

$$F(p) = \frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}.$$

По таблице находим оригинал

$$f(t) = -1 - t + e^t$$

Пример. Найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)}$ используя вычеты.

Функция имеет два полюса : $p = 0$ - полюс 2-его порядка , $p = -1$ - полюс первого порядка

$$\operatorname{Re}s\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=0} = \lim_{p \to 0} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{p+1}\right] = t - 1$$

$$\operatorname{Re}s\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-1} = \lim_{p \to -1}\left[\frac{e^{pt}}{p^2}\right] = e^{-t}$$

Складывая вычеты по формуле (1.25) находим

$$f(t) = t - 1 + e^{-t}.$$

Формула Меллина

Теорема. Если функция $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma$, удовлетворяет условиям :

1) $|F(p)| \to 0$ при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) для всех $\mu > \sigma$

$$\int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} |F(x+iy)| dy \le M$$

то $F(p)$ является изображением оригинала , который находится по формуле Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p) dp \ . \qquad (1.26)$$

§2.4. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линеное неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t) \ ,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_{o}, \qquad x'(0) = x_0' \qquad .$$

Применим к обеим частям преобразование Лапласа

$$x(t) \div X(p) \qquad , x'(t) \div -x_0 + pX(p) \qquad , x''(t) \div -x_0' - px_0 + p^2 X(p),$$
$$f(t) \div F(p).$$

В результате получим

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0' + px_0 + ax_0}{p^2 + ap + b}$$

Далее находя оригинал для $X(p)$, получаем решение уравнения $x(t)$.

Пример. Найти решение уравнения $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 1$, удовлетворяющее начальным условиям : $x(0) = 1 \qquad , x'(0) = 0$.

Пусть $x(t) \div X(p)$, тогда $x'(t) \div pX(p) - 1$, $x''(t) \div -p + p^2 X(p)$, $1 \div \frac{1}{p}$. Откуда

$$X(p) = \frac{1/p + p + 1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{p^2 + p + 1}{p(p-1)(p-2)}$$

Разложим дробь на сумму простейших дробей

$$\frac{p^2 + p + 1}{p(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2}$$

Приравнивая числители, получим

$$p^2 + p + 1 = A(p-1)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-1)$$

Полагая последовательно $p = 0{,}1{,}2$ находим

$A = \frac{1}{2}, \quad B = -3, \quad C = \frac{7}{2}.$

$$X(p) = \frac{1}{2p} - \frac{3}{p-1} + \frac{7}{2(p-2)} .$$

По таблице находим оригинал

$$x(t) = \frac{1}{2} - 3e^t + \frac{7}{2}e^{2t} .$$

Аналогично решаются системы дифференциальных уравнений.

§2.5. Расчет линейных электрических цепей

Рассмотрим электрическую, которую последовательно включены резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Ток и напряжение на канцах элементов цепи связаны соотношениями

$$u_R(t) = Ri(t), \quad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C}\cdot\left[\int_0^t i(\tau)d\tau + q_0\right],$$

где q_0 - начальный заряд на обкладках конденсатора.

Согласно второму закону Киргофа

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) ,$$

где $u(t)$ - напряжение , подаваемое на концах цепи.

Обозначим $i(t) \div I(p), \quad u(t) \div U(p)$, тогда

$$U(p) = U_R(p) + U_L(p) + U_C(p).$$

Где

$$U_R(p) = RI(p), \qquad U_L(p) = L(pI(p) - i_0), \qquad U_C(p) = \frac{1}{Cp}\left[I(p) + q_0\right]$$

Если $i_0 = q_0 = 0$, то

$$U(p) = ZI(p),$$

$Z -$ оператороe сопротивление (импеданц)

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z_R = R, \qquad Z_L = Lp, \qquad Z_C = \frac{1}{Cp}.$$

При последовательном соединении двух элементов с импеданцами Z_1 и Z_2 : $Z = Z_1 + Z_2$ а при параллельном : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$.

Если начальный ток и заряд не равны нулю , то

$$U(p) = ZI(p) - Li_0 + \frac{q_0}{Cp}.$$

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных активного сопротивления R и индуктивности L. На концах цепи подается напряжение $u(t) = u_0 \sin \varpi t,\ i(0) = 0$. Найти ток , текущий в цепи

В нашем случае

$$U(p) = \frac{u_0 \varpi}{p^2 + \varpi^2}, \qquad Z = R + Lp.$$

Следовательно

$$I(p) = \frac{u_0 \varpi}{(p^2 + \varpi^2)(R + Lp)}$$

Оригинал найдем ,используя вычеты

$$\operatorname{Re} s\left[I(p)e^{pt}\right]_{p = i\varpi} = \frac{u_0 \varpi}{2i\varpi L(R + iL\varpi)} \cdot e^{i\varpi t} = \frac{u_0 \cdot e^{i\varpi t}}{2(-L\varpi + iR)}$$

$$\operatorname{Re} s\left[I(p)e^{pt}\right]_{p = -i\varpi} = \frac{u_0 \varpi}{-2i\varpi(R - iL\varpi)} \cdot e^{-i\varpi t} = \frac{u_0 \cdot e^{-i\varpi t}}{2(-L\varpi - iR)}$$

$$\operatorname{Res}\left[I(p)e^{pt}\right]_{p=-\frac{R}{L}} = \frac{u_0\varpi \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}}{L\left[\frac{R^2}{L^2}+\varpi^2\right]} = \frac{u_0\varpi L \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}}{(R^2+L^2\varpi^2)}$$

Складывая вычеты, получим

$$i(t) = \frac{u_0\varpi L}{R^2+L^2\varpi^2}\cdot\left[e^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{R}{\varpi L}\cdot\sin\varpi t-\cos\varpi t\right]=$$

$$=\frac{u_0\varpi L}{R^2+\varpi^2L^2}\cdot\left[e^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{\sqrt{R^2+\varpi^2L^2}}{\varpi L}\sin(\varpi t-\varphi)\right],$$

где $tg\varphi = \dfrac{R}{\varpi L}$.

При $t\to\infty$ вципи установится ток

$$i(t) = \frac{u_0}{\sqrt{R^2+\varpi^2L^2}}\sin(\varpi t+\varphi) .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. – М.: Физ.-мат. изд., 1974, стр. 296.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981, стр 302.
3. Шахно К.И., Ершова В.В. Элементы теории функции комплексной переменной и операционного исчисления. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975, стр.395.

СОДЕРЖАНИЕ

Вальковская Валентина Ивановна
Лашкевич Василий Иванович

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**Учебно-методическое пособие
по курсам «Высшая математика» и «Математика»
для студентов технических специальностей
дневной и заочной форм обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 24.12.13.

Рег. № 19Е.
http://www.gstu.by