Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»**

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплинам «Математика. Математический анализ» и «Математика» для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2021

УДК 517.445(075.8)
ББК 22.161я73
А18

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 10 от 01.06.2020 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Промышленная теплоэнергетика и экология» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *А. В. Шаповалов*

Авакян, Е. З.

А18 Операционное исчисление и его приложения : учеб.-метод. пособие по дисциплинам «Математика. Математический анализ» и «Математика» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2021. – 55 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткий теоретический материал, подробно разобранные типовые задачи и задачи для самостоятельного решения. Предназначено для использования при проведении практических занятий, а также для самостоятельной подготовки студентов по теме «Операционное исчисление».

Для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 517.445(075.8)
ББК 22.161я73

1. Определение и свойства преобразования Лапласа.

Определение. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если

1. Функция $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2. Существуют вещественные положительные числа M, s такие, что $|f(t)| \leq Me^{st}$ $|f(t)| \leq Me^{st}$при $t \geq 0$;

3. $f(t)$ - кусочно непрерывная и интегрируемая на любом конечном отрезке изменения t .

Точная нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых выполняется неравенство $|f(t)| \leq Me^{st}$при $t \geq 0$ называется показателем роста функции $f(t)$.

Если существует несобственный интеграл

Определение.

Пусть несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \qquad (1)$$

сходится. Функция $F(p)$ комплексной переменной $p = a + ib$,Re $p = a > 0$,определенная равенством (1), называется **изображением Лапласа** или просто изображением функции $f(t)$.

Правило (1) получения по заданному оригиналу $f(t)$ изображения $F(p)$ называется **преобразованием Лапласа**.

Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то кратко это записывается в виде

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

Функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ 1 \text{ при } t \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

называется функцией **Хевисайда.** График функции Хевисайда приведен на рисунке 1.

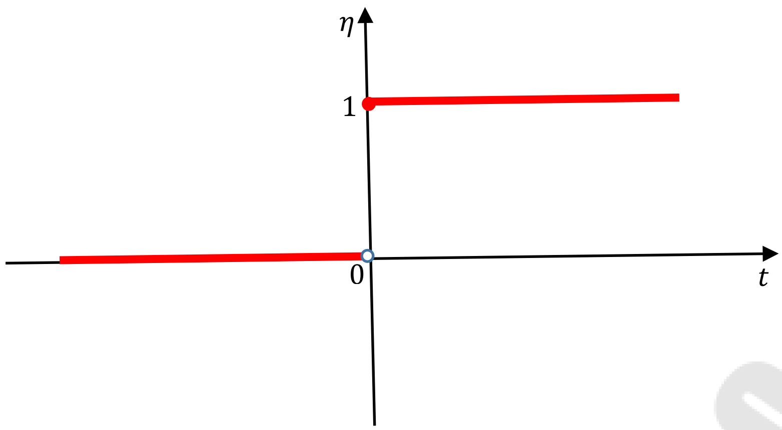


Рисунок 1

Пусть некоторая функция $\varphi(t)$удовлетворяет условиям 1) и 3) определения оригинала, но не удовлетворяет условию 2), т.е. $\varphi(t) \neq 0$для значений $t < 0$. Умножив эту функцию на $\eta(t)$, мы «гасим») $\varphi(t)$ для значений $t < 0$, и не изменяем её для значений $t \geq 0$. Таким образом, произведение

$$\eta(t) \cdot \varphi(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ \varphi(t) \text{ при } t \geq 0 \end{cases}$$

является оригиналом.

Условимся в дальнейшем множитель $\eta(t)$ опускать и произведение $\eta(t) \cdot f(t)$ будем обозначать через $f(t)$.

В таблице приведены изображения основных функций, полученные с помощью формулы (1)

Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$

t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Свойства преобразования Лапласа

Изображения широкого класса функций можно найти, используя таблицу изображений и свойства преобразования Лапласа.

1. ***Линейность***

Если $f(t) \risingdotseq F(p); g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(t) \tag{3}$$

2. ***Теорема подобия***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \tag{4}$$

3. ***Теорема смещения***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0) \tag{5}$$

4. ***Теорема запаздывания***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p) \tag{6}$$

5. ***Изображение производной***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0) \tag{7}$$

Для n –ой производной:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{7a}$$

6. ***Производная от изображения***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$tf(t) \risingdotseq -F'(p) \tag{8}$$

Для n –ой производной:

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p) \tag{8a}$$

7. ***Изображение интеграла***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}F(p) \tag{9}$$

8. ***Интеграл от изображения***

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)dq \tag{10}$$

9. ***Теорема Бореля об изображении свертки***

Пусть две функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны для значений $t > 0$. Свёрткой этих функций $f(t) * g(t)$ называется интеграл

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (11)$$

Вычисление этого интеграла называется «свёртыванием функций».

Если $f(t) \fallingdotseq F(p); g(t) \fallingdotseq G(p)$, то

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \fallingdotseq F(p) \cdot G(p) \qquad (12)$$

10. *Формула Дюамеля*

Если $f(t) \fallingdotseq F(p), g(t) \fallingdotseq \mathrm{G}(p)$, то справедлива формула Дюамеля

$$pF(p)\mathrm{G(p)} \fallingdotseq f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \qquad (13)$$

11. *Изображение периодической функции*

Пусть функция $f(t)$ является периодической с периодом T. Тогда ее изображение может быть найдено по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt}\ f(t)dt \qquad (14)$$

Пример 1.1 Найти изображение функции

$$f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t$$

Решение

Воспользуемся формулой

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

Тогда

$$f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}(\cos 5t + \cos t)$$

По таблице изображений находим:

$$\cos 5t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + 25}$$

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + 1}$$

Изображение заданной функции получим, используя свойство линейности (3):

$$f(t) = \cos 2t \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}(\cos 5t + \cos t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2 + 25} + \frac{p}{p^2 + 1}\right)$$
$$= \frac{p}{2}\frac{p^2 + 1 + p^2 + 25}{(p^2 + 1)(p^2 + 25)} = \frac{p^3 + 13p}{(p^2 + 1)(p^2 + 25)}$$

Ответ: $\cos 2t \cdot \cos 3t \risingdotseq \frac{p^3+13p}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

Пример 1.2 Найти изображение функции

$$f(t) = \operatorname{sh} 2t \cdot \cos t$$

Решение

Преобразуем заданную функцию:

$$f(t) = \operatorname{sh} 2t \cdot \sin 4t = \left\{\operatorname{sh} 2t = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}(e^{2t} \sin 4t - e^{-2t} \sin 4t)$$

По таблице изображений находим:

$$\sin 4t \risingdotseq \frac{1}{p^2 + 16}$$

Согласно теореме смещения (5)

$$e^{2t} \sin 4t \risingdotseq \frac{1}{(p - 2)^2 + 16} = \frac{1}{p^2 - 4p + 4 + 16} = \frac{1}{p^2 - 4p + 20}$$

$$e^{-2t}\sin 4t \risingdotseq \frac{1}{(p+2)^2+16} = \frac{1}{p^2+4p+4+16} = \frac{1}{p^2+4p+20}$$

Воспользуемся свойством линейности (3):

$$\frac{1}{2}(e^{2t}\sin 4t - e^{-2t}\sin 4t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-4p+20} - \frac{1}{p^2+4p+20}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+4p+20-(p^2-4p+20)}{(p^2-4p+20)(p^2+4p+20)}$$

$$= \frac{4p}{(p^2-4p+20)(p^2+4p+20)}$$

Ответ: $\operatorname{sh} 2t \cdot \sin 4t \risingdotseq \frac{4p}{(p^2-4p+20)(p^2+4p+20)}$

Пример 1.3 Найти изображение функции

$$f(t) = t^2 \operatorname{ch} 3t$$

Решение

1 способ

По таблице находим

$$\operatorname{ch} 3t \risingdotseq \frac{p}{p^2-9}$$

Воспользуемся формулой (8a)-n-я производная от изображения.

$$t^2 \operatorname{ch} 3t \risingdotseq (-1)^2\left(\frac{p}{p^2-9}\right)''$$

Вычислим необходимую производную

$$\left(\frac{p}{p^2-9}\right)' = \frac{(p^2-9)-p\cdot 2p}{(p^2-9)^2} = -\frac{p^2+9}{(p^2-9)^2}$$

$$\left(\frac{p}{p^2-9}\right)'' = \left(-\frac{p^2+9}{(p^2-9)^2}\right)'$$

$$= -\frac{2p\cdot(p^2-9)^2-(p^2+9)\cdot 2(p^2-9)\cdot 2p}{(p^2-9)^4} =$$

$$= -\frac{2p\cdot(p^2-9)-(p^2+9)\cdot 4p}{(p^2-9)^3} = -\frac{2p(p^2-9-2p^2-18)}{(p^2-9)^3}$$
$$= \frac{2p^3+54p}{(p^2-9)^3}$$

Подставив полученную вторую производную в формулу для производной от изображения, получаем

$$t^2\operatorname{ch}3t \risingdotseq \frac{2p^3+54p}{(p^2-9)^3}$$

2 способ

Преобразуем заданную функцию

$$t^2\operatorname{ch}3t = t^2\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$$

По таблице найдем изображение $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$

По теореме смещения (5)

$$t^2e^{3t} \risingdotseq \frac{2}{(p-3)^3};\, t^2e^{-3t} \risingdotseq \frac{2}{(p+3)^3}$$

Воспользуемся свойством линейности (3)

$$t^2\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(p-3)^3}+\frac{2}{(p+3)^3}\right) = \frac{(p+3)^3+(p-3)^3}{(p-3)^3(p+3)^3} =$$
$$= \frac{(p+3+p-3)((p+3)^2-(p+3)(p-3)+(p-3)^2)}{(p^2-9)^3} =$$

$$= \frac{2p(p^2+6p+9-p^2+9+p^2-6p+9)}{(p^2-9)^3} = \frac{2p(p^2+27)}{(p^2-9)^3} = \frac{2p^3+54p}{(p^2-9)^3}$$

Ответ:

$$t^2\operatorname{ch}3t \risingdotseq \frac{2p^3+54p}{(p^2-9)^3}.$$

Пример 1.4 Найти изображение функции

$$f(t) = (t + \sin 2t)^2$$

Решение

Преобразуем заданную функцию

$$f(t) = (t + \sin 2t)^2 = t^2 + 2t \sin 2t + \sin^2 2t$$

По таблице находим:

$$t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$$

$$\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2 + 4}$$

Изображение $2t \sin 2t$ найдем с помощью формулы для производной от изображения (8)

$$2t \sin 2t \risingdotseq -2\left(\frac{2}{p^2 + 4}\right)' = -4\frac{-2p}{(p^2 + 4)^2} = \frac{8}{(p^2 + 4)^2}$$

Изображение $\sin^2 2t$ может быть найдено двумя способами:

1 способ. Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\sin^2 2t = \frac{1 - \cos 4t}{2}$$

По таблице находим:

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}$$

$$\cos 4t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + 16}$$

Воспользуемся свойством линейности (3)

$$\sin^2 2t = \frac{1 - \cos 4t}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 + 16 - p^2}{p(p^2 + 16)} = \frac{8}{p(p^2 + 16)}$$

2 способ. Введем обозначение: $\sin^2 2t \risingdotseq F(p)$

Вычислим производную:

$$(\sin^2 2t)' = 2\sin 2t \cdot \cos 2t \cdot 2 = 2\sin 4t$$

Воспользуемся (7) формулой для изображения производной

$$(\sin^2 2t)' \risingdotseq pF(p) - \sin^2(0) = pF(p)$$

Вычислим производную:

$$(\sin^2 2t)' = 2\sin 2t \cdot \cos 2t \cdot 2 = 2\sin 4t$$

По таблице находим:

$$(\sin^2 2t)' = 2\sin 4t \risingdotseq \frac{8}{p^2+16}$$

Приравниваем полученные изображения:

$$pF(p) = \frac{8}{p^2+16}$$

Получаем

$$\sin^2 2t \risingdotseq F(p) = \frac{8}{p(p^2+16)}$$

Изображение заданной функции найдем, используя свойство линейности (3):

$$t^2 + 2t\sin 2t + \sin^2 2t \risingdotseq \frac{2}{p^3} + \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{8}{p(p^2+16)}$$

Ответ:

$$(t+\sin 2t)^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3} + \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{8}{p(p^2+16)}.$$

Пример 1.5 Найти изображение функции

$$f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$$

Решение

Воспользуемся формулой (10) для интеграла от изображения

Изображения $\cos t$ и $\cos 2t$

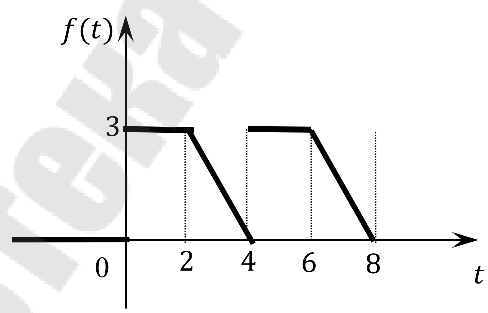
$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}; \cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$$

$$\frac{\cos t - \cos 2t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{q}{q^2+1} - \frac{q}{q^2+4}\right) dq = \frac{1}{2}\int_p^\infty \left(\frac{1}{q^2+1} - \frac{1}{q^2+4}\right) dq^2$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} (\ln|q^2+1| - \ln|q^2+4|)|_p^b$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{q^2+1}{q^2+4}\right|\Bigg|_p^b$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b^2+1}{b^2+4}\right| - \ln\left|\frac{p^2+1}{p^2+4}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p^2+4}{p^2+1}\right|$$

Ответ:

$$\frac{\cos t - \cos 2t}{t} \risingdotseq \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p^2+4}{p^2+1}\right|.$$

Пример 1.6 Найти изображение функции



Решение. Заданная функция является периодической, с периодом $T = 4$.

Найдем аналитическое выражение для $f(t)$. На промежутке $[0,2]$ $f(t) = 3$. Аналитическое выражение для $f(t)$ на промежутке $[2,4]$ найдем, используя уравнение прямой, проходящей через точки $(2; 3)$ и $(4; 0)$

$$\frac{t-2}{4-2}=\frac{f-3}{0-3};\ -3t+6=2f-6$$

$$f(t)=-\frac{3}{2}t+6$$

Таким образом,

$$f(t)=\begin{cases} 3, t\in[0;2] \\ -\frac{3}{2}t+6, t\in[2;4] \end{cases}$$

Для нахождения изображения, воспользуемся формулой (14)

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4p}}\int_0^4 e^{-pt}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left(\int_0^2 e^{-pt}3dt+\int_2^4 e^{-pt}\left(-\frac{3}{2}t+6\right)dt\right)$$

$$=\begin{Bmatrix} u=-\frac{3}{2}t+6 & du=-\frac{3}{2}dt \\ dv=e^{-pt}dt & v=-\frac{1}{p}e^{-pt} \end{Bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left(-\frac{3}{p}e^{-pt}\Big|_0^2-\left(-\frac{3}{2}t+6\right)\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_2^4-\frac{3}{2p}\int_2^4 e^{-pt}dt\right)$$

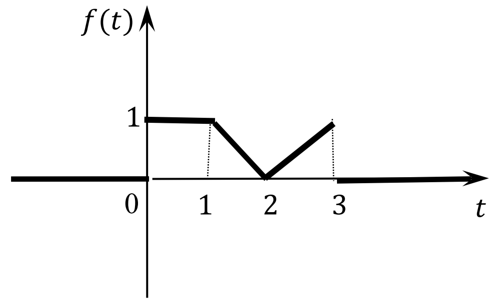
$$=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left(-\frac{3}{p}e^{-2p}+\frac{3}{p}+\frac{3}{p}e^{-2p}+\frac{3}{2p^2}e^{-pt}\Big|_2^4\right)$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left(\frac{3}{p}+\frac{3}{2p^2}e^{-4p}-\frac{3}{2p^2}e^{-2p}\right)=\frac{3(2p+e^{-4p}-e^{-2p})}{p^2(1-e^{-4p})}$$

Ответ:

$$F(p)=\frac{3(2p+e^{-4p}-e^{-2p})}{p^2(1-e^{-4p})}.$$

Пример 1.7 Найти изображение функции



Решение. Найдем аналитическое выражение для $f(t)$.

На промежутке $[0,1]$ $f(t) = 1$

Аналитическое выражение для $f(t)$ на промежутке $[1,2]$ найдем, используя уравнение прямой, проходящей через точки $(1;1)$ и $(2;0)$

$$\frac{t-1}{2-1} = \frac{f-2}{0-2}; f - 2 = -2t + 2$$

$$f(t) = 4 - 2t$$

Аналитическое выражение для $f(t)$ на промежутке $[2,3]$ найдем, используя уравнение прямой, проходящей через точки $(2;0)$ и $(3;1)$

$$\frac{t-2}{3-2} = \frac{f-0}{1-0}; f = t - 2$$

$$f(t) = t - 2$$

Таким образом,

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, 0 \le t \le 1 \\ 4 - 2t, 1 \le t \le 2 \\ t - 2{,}2 \le t \le 3 \\ 0, t > 3 \end{cases}$$

Заметим, что если функция $f(t)$ отлична от нуля только на промежутке $[a, b]$, то ее можно представить в виде

$$f(t) = f(t)\big(\eta(t-a) - \eta(t-b)\big),$$

где $\eta(t)$- функция Хевисайда, определенная формулой (2).

Тогда, заданная функция может быть записана в виде:

$$f(t) = t \cdot \big(\eta(t) - \eta(t-1)\big) + (4-2t)\big(\eta(t-1) - \eta(t-2)\big) + (t-2)\big(\eta(t-2) - \eta(t-3)\big)$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми аргументами функции Хевисайда:

$$f(t) = \eta(t) \cdot t + \eta(t-1) \cdot (-t + 4 - 2t) + \eta(t-2) \cdot (2t - 4 + t - 2) - \eta(t-3)(t-2) =$$

$$= \eta(t) \cdot t + \eta(t-1) \cdot (-3t + 4) + \eta(t-2) \cdot (3t - 6) - \eta(t-3)(t-2)$$

Выделим в каждой из скобок аргумент соответствующей функции η:

$$\eta(t) \cdot t + \eta(t-1) \cdot (-3t + 4) + \eta(t-2) \cdot (3t - 6) - \eta(t-3)(t-2) =$$

$$= \eta(t) \cdot t + \eta(t-1) \cdot (-3(t-1) + 1) + 3\eta(t-2) \cdot (t-2) - \eta(t-3)(t-3+1) =$$

$$= \eta(t) \cdot t - 3\eta(t-1)(t-1) + \eta(t-1) + 3\eta(t-2) \cdot (t-2) - \eta(t-3)(t-3) - \eta(t-3)$$

Итак, нам необходимо найти изображение функции:

$$f(t) = \eta(t-1) - \eta(t-3) + \eta(t) \cdot t - 3\big(\eta(t-1)(t-1) - \eta(t-2)(t-2)\big) - \eta(t-3)(t-3)$$

По таблице находим: $\eta(t) = 1 \risingdotseq \frac{1}{p}$

Воспользуемся теоремой запаздывания (6)

$$\eta(t-1) \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p}; \eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p}$$

По таблице находим: $\eta(t)t = t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$

По теореме запаздывания (6)

$$\eta(t-1)(t-1) \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p^2}; \eta(t-2)(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p^2}; \eta(t-3)(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p^2}$$

Согласно свойству линейности (3) находим:

$$f(t) \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p} + \frac{1}{p^2} - 3\left(\frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2}\right) - \frac{e^{-3p}}{p^2}$$
$$= \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p} + \frac{(1-e^{-p})^3}{p^2}$$

Ответ:

$$f(t) \risingdotseq \frac{e^{-p} - e^{-3p}}{p} + \frac{(1-e^{-p})^3}{p^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. *Найти изображение функции используя свойства преобразований Лапласа.*

1. $f(t) = sin^2 t$ 2. $f(t) = cos3t\ sin2t$ 3. $f(t) = 2t\ sin2t$

4. $f(t) = 5t^2 e^{3t}$ 5. $f(t) = ch3t\ cos2t$ 6. $f(t) = t^2 sin3t$

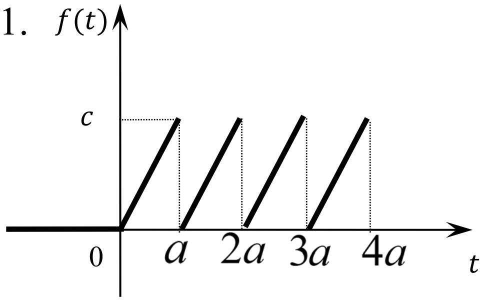
7. $f(t) = e^{2t}(sht + t)$ 8. $f(t) = sh5t\ sin3t$ 9. $f(t) = e^{-t} t sin^2 3t$

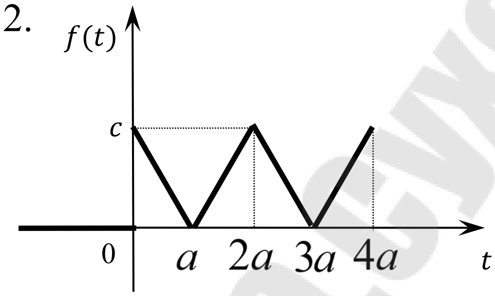
10. $f(t) = (3 + e^t)^2$ 11. $f(t) = (2 + sint)^2$ 12. $f(t) = (1 + cht)^2$

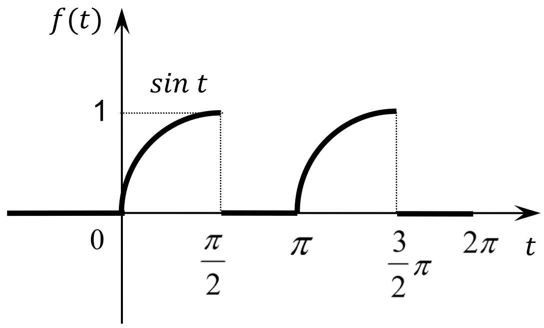
13. $f(t) = e^t\ sin2t/t$ 14. $f(t) = (1 - cos2t)/t$ 15. $f(t) = \left(sint - \sqrt{t}\right)/t$

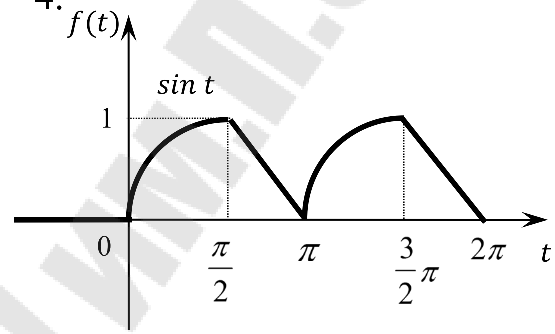
Ответы: 1. $\frac{1}{p(p^2+1)}$; ***2.*** $\frac{2p^2-10}{p(p^2+1)}$; ***3.*** $\frac{8p}{(p^2+4)^2}$; ***4.*** $\frac{10}{(p-3)^3}$; ***5.*** $\frac{p^3-5p}{(p^2-6p+13)(p^2+6p+13)}$; ***6.*** $\frac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}$; ***7.*** $\frac{p^2-3p+1}{(p-1)(p-2)(p-3)}$; ***8.*** $\frac{-10p}{(p^2-10p+34)(p^2+10p+34)}$; ***9.*** $\frac{54(p^2+2p+13)}{(p+1)^2(p^2+2p+37)}$; ***10.*** $\frac{12p^2-29p+17}{p(p-1)(p-2)}$; ***11.*** $\frac{2(2p^4+p^3+p^2+p+1)}{p(p^2+1)(p^2+4)}$; ***12.*** $\frac{3(p^4-4p^2+2)}{p(p^2+1)(p^2+4)}$; ***13.*** $\frac{\pi}{2} - arctg\frac{p-2}{p}$; ***14.*** $\frac{1}{2}ln\frac{p^2+1}{p^2}$; ***15.*** $\frac{\pi}{2} - arctg\frac{p}{3} - \frac{2\Gamma(1/2)}{\sqrt{p}}$.

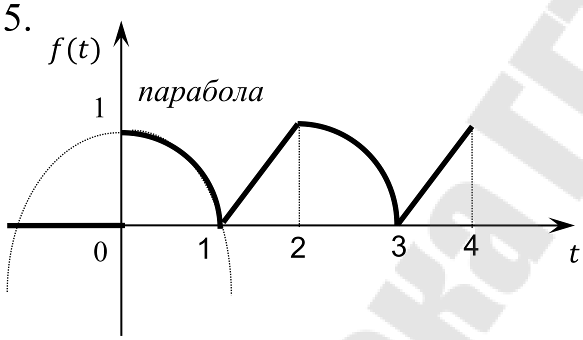
Задание 2. *Найти изображение периодической функции.*

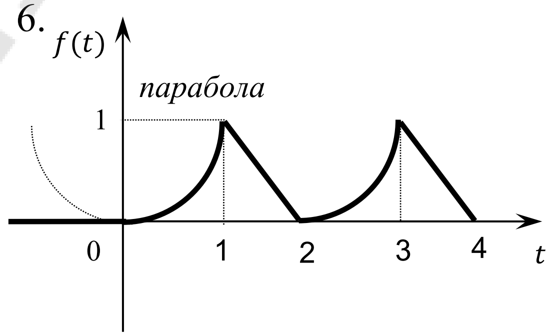
1.


2.


3.


4.


5.


6.


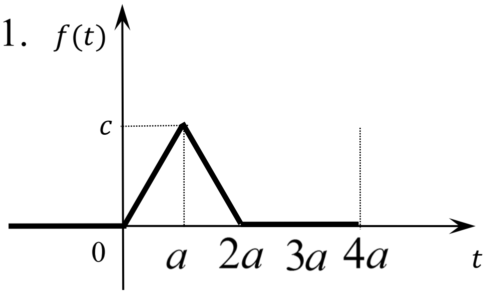
Ответы: 1. $\frac{c}{p}\frac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}+\frac{c}{p^2}$; ***2.*** $\frac{c}{p}+\frac{c}{ap^2}\frac{e^{-ap}-1}{e^{-ap}+1}$; ***3.*** $\frac{1-pe^{-\pi p/2}}{1-e^{-\pi p}}\frac{1}{p^2+1}$;

4. $\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\left(\frac{1-pe^{-\pi p/2}}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p/2}}{p}+\frac{2}{\pi p^2}\left(e^{-\pi p}-e^{-\pi p/2}\right)\right)$;

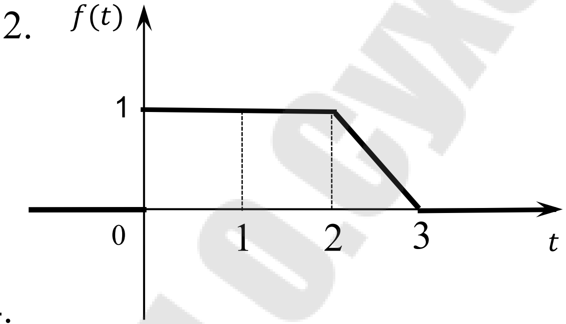
5. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\frac{3e^{-p}-e^{-2p}}{1-e^{-2p}}-\frac{2}{p^3}\frac{1}{1+e^{-p}}$; ***6.*** $\frac{1}{p^2}\frac{e^{-2p}-3e^{-p}}{1-e^{-2p}}+\frac{1}{p^3}\frac{2-p^2}{1+e^{-p}}$.

Задание 3. *Найти изображение функции, заданной графически.*

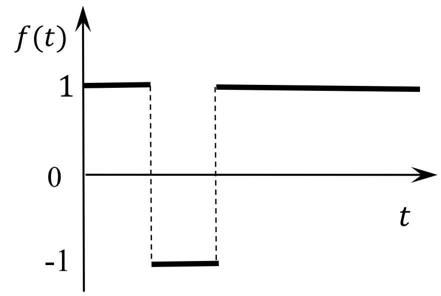
1.



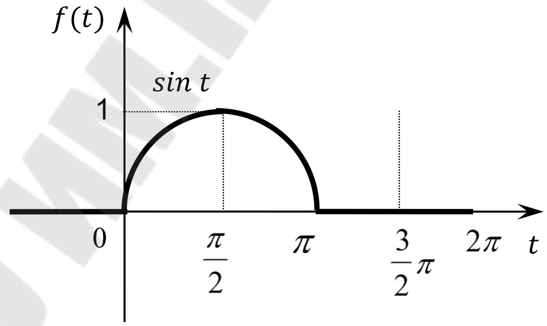
2.



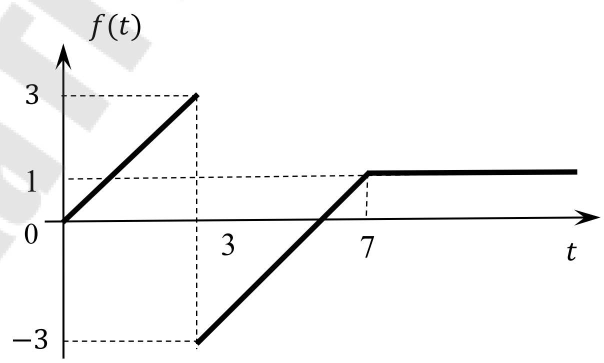
3.



4.



5.



Ответы: 1. $\frac{c}{a}\frac{1-e^{-2ap}}{p^2}+\frac{2c}{p}$; ***2.*** $\frac{1}{p}-\frac{e^{-2p}+e^{-3p}}{p^2}$; ***3.*** $\frac{1}{p}-\frac{2\left(e^{-p}+e^{-2p}\right)}{p^2}$; ***4.*** $\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$;

5. $\frac{1-e^{-7p}}{p^2}-\frac{6e^{-3p}}{p}$.

2.Нахождение оригиналов по изображениям.

Для того, чтобы функция $F(p)$ была изображением функции $f(t)$ достаточно выполнения следующих условий:

1. $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = a > s_0$.
2. $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$, если $\operatorname{Re} p > s_0$.
3. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|dy$ сходится.

   <u>*Теорема.*</u> Если функция $F(p)$ является изображением оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы равны во всех точках t, где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны.

Способы отыскания оригиналов:

Метод разложения на простейшие дроби.

Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений.

Простейшие дроби:

I. $\frac{A}{p-a} \risingdotseq \{\text{таблица изображений}\} \risingdotseq Ae^{at}$

II. $\frac{B}{(p-a)^n} \risingdotseq \left\{\frac{1}{p^n} \risingdotseq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \text{теорема смещения}\right\} \risingdotseq Be^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

III. $\frac{Mp+N}{p^2+bp+c} = \frac{Mp+N}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}} = \left\{\frac{4c-b^2}{4} = \omega^2,\right\} = \frac{M\left(p+\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)+N}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+\omega^2} =$

$$= M\frac{\left(p+\frac{b}{2}\right)}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+\omega^2} + \left(N-\frac{b}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{b}{2}\right)^2+\omega^2} \risingdotseq \{\text{таблица изображений,}$$

$$\text{теорема смещения}\} \risingdotseq e^{-\frac{b}{2}t}\left(M\cos\omega t + \left(N-\frac{b}{2}\right)\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

Для отыскания оригинала для функции $F(p) = e^{-p\tau}\frac{Q(p)}{R(p)}$ следует сначала найти оригинал для $\frac{Q(p)}{R(p)}$, а затем воспользоваться теоремой запаздывания.

Пример 2.1 Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p) = \frac{p+2}{(p-1)^2(p+3)}$$

Решение

Разложим заданную дробь на простейшие:

$$\frac{p+2}{(p-1)^2(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+3} =$$

$$= \frac{A(p-1)(p+3) + B(p+3) + C(p-1)^2}{(p-1)^2(p+3)}$$

$$A(p^2+2p-3) + B(p+3) + C(p^2-2p+1) = p+2$$

$$\begin{aligned} p^2: &\quad A + C = 0 \\ p^1: &\quad 2A + B - 2C = 1 \\ p^0: &\quad -3A + 3B + C = 2 \end{aligned}$$

Решая систему $\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B - 2C = 1 \\ -3A + 3B + C = 2 \end{cases}$, получаем $\begin{cases} A = \frac{1}{16} \\ B = \frac{3}{4} \\ C = -\frac{1}{16} \end{cases}$.

Таким образом, $F(p)$ может быть представлена в виде:

$$F(p) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p+3}$$

Воспользуемся таблицей изображений:

$$\frac{1}{p-1} \risingdotseq e^t; \frac{1}{p+3} \risingdotseq e^{-3t}$$

$$\frac{1}{p^2} \risingdotseq t$$

Согласно теореме смещения (5)

$$\frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t$$

По свойству линейности (3):

$$F(p) \risingdotseq f(t) = \frac{1}{16}e^t + \frac{3}{4}te^t - \frac{1}{16}e^{-3t}$$

Ответ: $\frac{p+2}{(p-1)^2(p+3)} \risingdotseq \frac{1}{16}e^t + \frac{3}{4}te^t - \frac{1}{16}e^{-3t}$

Пример 2.2 Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p) = \frac{2p-1}{(p-2)(p^2+4p+5)}$$

Решение

Разложим заданную дробь на простейшие:

$$\frac{p^2+2p-1}{(p-2)(p^2+4p+5)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Mp+N}{p^2+4p+5} =$$

$$= \frac{A(p^2+4p+5) + (Mp+N)\cdot(p-2)}{(p-2)(p^2+4p+5)}$$

$$A(p^2+4p+5) + M(p^2-2p) + N(p-2) = 2p-1$$

$$\begin{aligned} p^2&: \quad A+M=0 \\ p^1&: \quad 4A-2M+N=2 \\ p^0&: \quad 5A-2N=-1 \end{aligned}$$

Решая систему $\begin{cases} A+M=0 \\ 4A-2M+N=2 \\ 5A-2N=-1 \end{cases}$, получаем $\begin{cases} A=\frac{3}{17} \\ M=-\frac{3}{17} \\ N=\frac{16}{17} \end{cases}$

Таким образом, $F(p)$ можно переписать в виде:

$$F(p)=\frac{3}{17}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{17}\cdot\frac{-3p+16}{p^2+4p+5}$$

По таблице изображений находим:

$$\frac{1}{p-2}\risingdotseq e^{2t}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе дроби $\frac{-3p+16}{p^2+4p+5}$:

$$\frac{-3p+16}{p^2+4p+5}=\frac{-3p+16}{p^2+4p+4+1}=\frac{-3p+16}{(p+2)^2+1}$$

Выделим $(p+2)$ в числителе дроби:

$$\frac{-3p+16}{(p+2)^2+1}=\frac{-3(p+2-2)+16}{(p+2)^2+1}=\frac{-3(p+2)+10}{(p+2)^2+1}$$
$$=-3\frac{(p+2)}{(p+2)^2+1}+10\frac{1}{(p+2)^2+1}$$

Воспользуемся таблицей изображений и теоремой смещения (5):

$$\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq\cos t\,;\ \frac{(p+2)}{(p+2)^2+1}\risingdotseq e^{-2t}\cos t$$

$$\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t\,;\frac{1}{(p+2)^2+1}\risingdotseq e^{-2t}\sin t$$

Применяя свойство линейности (3), получаем:

$$F(p)\risingdotseq f(t)=\frac{1}{17}\left(3e^{2t}+e^{-2t}(-3\cos t+10\sin t)\right)$$

Ответ: $\frac{2p-1}{(p-2)(p^2+4p+5)}\risingdotseq\frac{1}{17}\left(3e^{2t}+e^{-2t}(-3\cos t+10\sin t)\right)$

Пример 2.3 Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p)=\frac{(e^{3p}+1)^2}{(p+2)(p+5)}$$

Решение

$$\frac{(e^{3p}+1)^2}{(p+2)(p+5)} = \frac{e^{6p}+2e^{3p}+1}{(p+2)(p+5)}$$

Найдем оригинал для функции $F_1(p) = \frac{1}{(p+2)(p+5)}$

$$\frac{1}{(p+2)(p+5)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+5} = \frac{A(p+2)+B(p+5)}{(p+2)(p+5)}$$

$$A(p+2) + B(p+5) = 1$$

$$p^1: \quad A + B = 0$$
$$p^0: \quad 2A + 5B = 1$$

Решая систему $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 5B = 1 \end{cases}$, получаем $\begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$F_1(p) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+5} - \frac{1}{p+2}\right)$$

Используя таблицу изображений и свойство линейности (3) получаем:

$$\frac{1}{(p+2)(p+5)} \risingdotseq f_1(t) = \frac{1}{3}(e^{-5t} - e^{-2t})$$

Для нахождения оригинала заданной функции применим теорему запаздывания (6)

$$\frac{e^{6p}+2e^{3p}+1}{(p+2)(p+5)} \risingdotseq f_1(t+6) + 2f_1(t+3) + f_1(t) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{-5(t+6)} - e^{-2(t+6)} + 2e^{-5(t+3)} - 2e^{-2(t+3)} + e^{-5t} - e^{-2t}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{-5t}(e^{-30} + 2e^{-15} + 1) - e^{-2t}(e^{-12} + 2e^{-6} + 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(e^{-5t}(e^{-15} + 1)^2 - e^{-2t}(e^{-6} + 1)^2)$$

Ответ:

$$\frac{(e^{3p}+1)^2}{(p+2)(p+5)} \risingdotseq \frac{1}{3}(e^{-5t}(e^{-15}+1)^2 - e^{-2t}(e^{-6}+1)^2).$$

Использование теоремы о свертке.

Если $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}$ можно представить в виде произведения изображений $F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p)$, то можно найти отдельно оригиналы для $F_1(p)$ и $F_2(p)$, а затем воспользоваться теоремой о свертке.

Пример 2.4 Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p)=\frac{p+3}{p^3(p^2+4)}$$

Решение

В данном случае разложение на простейшие дроби является довольно громоздким. Воспользуемся теоремой Бореля о свертке (12). Для этого представим заданное изображение как произведение двух изображений.

$$\frac{p+3}{p^3(p^2+4)}=\frac{1}{p^3}\cdot\frac{p+3}{p^2+4}$$

Используя таблицу, находим

$$\frac{1}{p^3}\risingdotseq\frac{1}{2}t^2$$

$$\frac{p+3}{p^2+4}=\frac{p}{p^2+4}+\frac{3}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t+\frac{3}{2}\sin 2t$$

Тогда по формуле (12) находим:

$$\frac{1}{p^3}\cdot\frac{p+3}{p^2+4}\risingdotseq\int_0^t\frac{1}{2}(t-\tau)^2\left(\cos 2\tau+\frac{3}{2}\sin 2\tau\right)d\tau=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=\frac{1}{2}(t-\tau)^2 & du=-(t-\tau)d\tau \\ dv=\left(\cos 2\tau+\frac{3}{2}\sin 2\tau\right)d\tau & v=\frac{1}{2}\sin 2\tau-\frac{3}{4}\cos 2\tau \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}(t-\tau)^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\tau-\frac{3}{4}\cos 2\tau\right)\Big|_0^t+\int_0^t\left(\frac{1}{2}\sin 2\tau-\frac{3}{4}\cos 2\tau\right)(t-\tau)d\tau=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=t-\tau & du=-d\tau \\ dv=\left(\frac{1}{2}\sin 2\tau-\frac{3}{4}\cos 2\tau\right)d\tau & v=-\frac{1}{4}\cos 2\tau-\frac{3}{8}\sin 2\tau \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{3}{8}t^2+(t-\tau)\left(-\frac{1}{4}\cos 2\tau-\frac{3}{8}\sin 2\tau\right)\Big|_0^t-\int_0^t\left(\frac{1}{4}\cos 2\tau+\frac{3}{8}\sin 2\tau\right)d\tau=$$

$$=\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{4}t-\left(\frac{1}{8}\sin 2\tau-\frac{3}{16}\cos 2\tau\right)\Big|_0^t=$$

$$=\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{3}{16}\cos 2t-\frac{3}{16}$$

Ответ:

$$\frac{p+3}{p^3(p^2+4)}\doteqdot\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{3}{16}\cos 2t-\frac{3}{16}.$$

Вторая теорема разложения

Теорема. Если функция $f(t)$– оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ – её изображение, то в любой точке непрерывности) $f(t)$ имеет место формула

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp \tag{14}$$

Формула (14) называется *формулой обращения преобразования Лапласа.*

Пусть изображение $F(p)$есть аналитическая функция всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек: $p_1, p_2, \cdots, p_N$ и $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$,тогда для любых $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}[F(p)e^{pt}, p_n]$$

Таким образом, **вторая теорема разложения** гласит:

Если $f(t)$ является оригиналом и изображение $F(p)$есть аналитическая функция всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек: $p_1, p_2, \cdots, p_N$ и $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$,тогда оригинал может быть найден по формуле:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}[F(p)e^{pt}, p_n] \tag{15}$$

В частности, если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то все ее особые точки являются корнями знаменателя $R(p)$.Поэтому все они являются ***полюсами***.

Вычет в полюсе k −ого порядка вычисляется по формуле:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}, p_n\right] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{p\to p_n}\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}\left[(p-p_n)^k\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right] \tag{16}$$

В случае, если p_n-простой корень знаменателя $R(p)$, причем $Q(p_i) \neq 0$, то

$$\mathrm{Res}\left[\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}, p_n\right] = \left.\frac{Q(p)e^{pt}}{R'(p)}\right|_{p=p_n} \tag{17}$$

Пример 2.5

Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$$

Решение

Найдем оригинал с помощью второй теоремы разложения по формуле (15). Особыми точкам точками $F(p)$ являются нули знаменателя:

$$p_1 = 0; p_2 = 1; p_3 = 2; p_4 = 3$$

Все они являются простыми корнями знаменателя, поэтому это полюсы первого порядка

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt}, 0\right] = \lim_{p\to 0} p \frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt}, 1\right] =$$

$$= \lim_{p\to 1}(p-1) \frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt} = 3e^{t}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt}, 2\right] =$$

$$= \lim_{p\to 2}(p-2) \frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt} = -\frac{11}{2} e^{2t}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt}, 3\right] =$$

$$= \lim_{p\to 3}(p-3) \frac{p^2 + 2p + 3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} e^{pt} = 3e^{3t}$$

Таким образом, согласно (15) получаем

$$f(t) = -\frac{1}{2} + 3e^{t} - \frac{11}{2}e^{2t} + 3e^{3t}$$

Ответ:

$$\frac{p^2+2p+3}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \risingdotseq -\frac{1}{2} + 3e^{t} - \frac{11}{2}e^{2t} + 3e^{3t}.$$

Пример 2.6

Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p) = \frac{p^2+2p+3}{p^2(p^2+p-2)}$$

Решение

Найдем оригинал с помощью второй теоремы разложения по формуле (15). Особыми точкам точками $F(p)$ являются нули знаменателя:

$$p^2(p^2+p-2) = 0$$

$p_1 = 0$-корень кратности 2$\Longrightarrow$ полюс второго порядка $F(p)$.

$$p^2+p-2=0$$

$p_2 = 1, p_3 = -2$ – простые корни$\Longrightarrow$ полюсы первого порядка $F(p)$.

Вычет в точке $p_1 = 0$ найдем по формуле (16) ($k = 2$)

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2+2p+3}{p^2(p^2+p-2)}e^{pt}, 0\right] =$$

$$= \lim_{p\to 0}\left(p^2\frac{p^2+2p+3}{p^2(p^2+p-2)}e^{pt}\right)' = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^2+2p+3}{(p^2+p-2)}e^{pt}\right)' =$$

$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{(2p+2)(p^2+p-2) - (p^2+2p+3)(2p+1)}{(p^2+p-2)^2} e^{pt} + te^{pt} \frac{p^2+2p+3}{p^2+p-2} \right) = -\frac{7}{4} - \frac{3}{2}t$$

Вычеты в точках $p_2 = 1, p_3 = -2$ найдем с помощью формулы (17)

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2+2p+3}{p^2(p^2+p-2)} e^{pt}, 1\right] = \left.\frac{\frac{p^2+2p+3}{p^2} e^{pt}}{(p^2+p-2)'}\right|_{p=1} =$$

$$= \left.\frac{(p^2+2p+3)e^{pt}}{p^2(2p+1)}\right|_{p=1} = 2e^t$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p^2+2p+3}{p^2(p^2+p-2)} e^{pt}, -2\right] = \left.\frac{(p^2+2p+3)e^{pt}}{p^2(2p+1)}\right|_{p=-2} = -\frac{1}{4} e^{-2t}$$

Таким образом, согласно (15) получаем

$$f(t) = -\frac{7}{4} - \frac{3}{2}t + 2e^t - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

Ответ:

$$\frac{p^2+2p+3}{p^2(p^2+p-2)} \risingdotseq -\frac{7}{4} - \frac{3}{2}t + 2e^t - \frac{1}{4} e^{-2t}.$$

Пример 2.7 Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p) = \frac{e^{-p}(p+1)}{p^2+6p+10}$$

Решение

Найдем оригинал с помощью второй теоремы разложения по формуле (15). Особыми точкам точками $F(p)$ являются нули знаменателя:

$$p^2 + 6p + 10 = 0$$

$$D = 36 - 40 = -4$$

$$p_{1,2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$$

Точки $p_{1,2} = -3 \pm i$ являются простыми корнями. Для вычисления вычетов воспользуемся формулой (17)

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2+6p+10}e^{pt}, -3+i\right] = \left.\frac{e^{p(t-1)}(p+1)}{(p^2+6p+10)'}\right|_{-3+i} =$$

$$= \left.\frac{e^{p(t-1)}(p+1)}{2p+6}\right|_{-3+i} = \frac{e^{(-3+i)(t-1)}(-3+i+1)}{2(-3+i)+6} = \frac{e^{(-3+i)(t-1)}(-2+i)}{2i}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2+6p+10}e^{pt}, -3-i\right] = \left.\frac{e^{p(t-1)}(p+1)}{(p^2+6p+10)'}\right|_{-3-i} =$$

$$= \left.\frac{e^{p(t-1)}(p+1)}{2p+6}\right|_{-3-i} = \frac{e^{(-3+i)(t-1)}(-3-i+1)}{2(-3-i)+6} = \frac{e^{(-3-i)(t-1)}(-2-i)}{-2i}$$

$$f(t) = \frac{e^{(-3+i)(t-1)}(-2+i)}{2i} + \frac{e^{(-3-i)(t-1)}(-2-i)}{-2i} =$$

$$= e^{-3(t-1)}\frac{e^{i(t-1)}(-2+i) - e^{-i(t-1)}(-2-i)}{2i} =$$

$$= e^{-3(t-1)}\frac{-2\left(e^{i(t-1)} - e^{-i(t-1)}\right) + i\left(e^{i(t-1)} + e^{-i(t-1)}\right)}{2i} =$$

$$= e^{-3(t-1)}\left(-2\frac{e^{i(t-1)} - e^{-i(t-1)}}{2i} + \frac{e^{i(t-1)} + e^{-i(t-1)}}{2}\right)$$

Воспользуемся формулами:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Тогда оригинал можно записать в виде:

$$f(t) = e^{-3(t-1)}(-2\sin(t-1) + \cos(t-1))$$

Ответ:

$$\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2+6p+10} \risingdotseq e^{-3(t-1)}(-2\sin(t-1) + \cos(t-1)).$$

Первая теорема разложения:

Если функция $F(p)$аналитическая в бесконечно удалённой точке $(p=\infty)$, и разложение её в ряд Лорана в окрестности указанной точки имеет вид:

$$F(p) = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p^2} + \frac{C_2}{p^3} + \cdots + \frac{C_n}{p^{n+1}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{p^{n+1}} \qquad (18)$$

то $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого степенным рядом

$$f(t) = C_0 + \frac{C_1}{1!}t + \frac{C_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{C_n}{n!}t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!}t^n, \qquad (19)$$

Сходящимся для всех $t > 0$.

Пример 2.8 Найти оригинал для заданного изображения

$$F(p) = \ln\left(\frac{p}{p+3}\right)$$

Решение

Для нахождения оригинала воспользуемся первой теоремой разложения. Для этого разложим $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

$$F(p) = \ln\left(\frac{p}{p+3}\right) = -\ln\left(\frac{p+3}{p}\right) = -\ln\left(1+\frac{3}{p}\right)$$

Воспользуемся стандартной формулой разложения $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Тогда:

$$-\ln\left(1+\frac{3}{p}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{3}{p}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}}{n+1}\frac{1}{p^{n+1}}$$

Таким образом, коэффициенты разложения функции $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид:

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}}{n+1}$$

Воспользовавшись формулой (19), получаем разложение в степенной ряд оригинала:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}}{n+1}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}}{(n+1)!} t^n$$

Найдем сумму полученного ряда.

Сделаем замену $n+1 = k, n = k-1$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{k!} t^{k-1} = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{k!} t^k = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3t)^k}{k!}$$

Вспомним разложение в ряд Маклорена функции e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

Воспользовавшись полученной формулой, получаем

$$f(t) = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3t)^k}{k!} = \frac{1}{t}(e^{-3t} - 1)$$

Ответ:

$$\ln\left(\frac{p}{p+3}\right) \risingdotseq \frac{e^{-3t} - 1}{t}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 4. *Найти оригиналы функций*

1. $\dfrac{3p-1}{p^2+3p-4}$ 2. $\dfrac{2}{p^2+4p+6}$ 3. $\dfrac{p^2+2p+4}{p(p^2+12p+36)}$

4. $\dfrac{3p^2+2p+8}{p(p^2+6p+9)}$ 5. $\dfrac{2p}{p^3+8}$ 6. $\dfrac{p+4}{(p-1)(p^2+1)}$

7. $\dfrac{p+4}{(p-1)^2}$ 8. $\dfrac{5p}{(p^2+4)(p^2+9)} + \dfrac{1}{p^2+2p-3}$

9. $\dfrac{7p}{(p^2+36)(p^2+49)} + \dfrac{1}{p^2+5p-6}$ 10. $\dfrac{p^2}{p^3-1}$

11. $\dfrac{e^{-p}}{p(p-4)}$ 12. $\dfrac{e^{-2p}}{p(p+2)(p^2+9)}$

Ответы: 1. $\frac{1}{5}(13e^{-4t} + 2e^t)$ *;* ***2.***$\sqrt{2}sin(\sqrt{2}\,t)e^{-2t}$*; 3.* $\frac{1}{9}$ $(1 +$ $+8e^{-6t}$— $42te^{-6t})$*;* ***4.*** $\frac{1}{9}$ $(8 + 19e^{-3t} - 87te^{-3t})$*;* ***5.*** $\frac{1}{3}\Big(e^{-2t} +$ $e^t\left(cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{2}{\sqrt{3}}sin(\sqrt{3}\,t)\right)\Big)$*;* ***6.***$\frac{1}{2}(5e^t - 5cost - 3sint)$*; 7.* $e^t + 5t$ *;*

8. $cos2t — cos3t + \frac{1}{4}(e^{t} - e^{-3t})$; ***9.***$cos6t - cos7t + \frac{1}{7}(e^{t} - e^{-6t})$;

10. $\frac{2}{3}e^{t} + e^{-t/2}\left(\frac{5}{6}cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{t}sin\left(\sqrt{3}\,t\right)\right)$; ***11.*** $\frac{1}{4}(e^{4t-4} - 1)$;

12. $\frac{1}{18} - \frac{1}{26}e^{4-2t} + \frac{1}{117}\left(2cos(3t-6) + 3sin(3t-6)\right)$.

3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом.

Операционное исчисление является удобным инструментом для решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0; x'(0) = x_1; \cdots; x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \end{cases} \qquad (20)$$

Алгоритм решения состоит из следующих шагов:

Шаг 1: перейти к изображениям $x(t)$,всех необходимых производных (используя формулы (7) и (7а)) и функции $f(t)$(используя таблицу производных и свойства преобразования Лапласа):

$$x(t) \risingdotseq X(p)$$
$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - px_0 - x_1$$
$$\vdots$$
$$x^{(n)}(t) \risingdotseq p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \cdots - x_{n-1}$$
$$f(t) \risingdotseq F(P)$$

Шаг 2: подставить в уравнение (20) полученные оригиналы.

$$p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \cdots - x_{n-1} +$$
$$+a_1(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-2}x_1 - \cdots - x_{n-2}) + \cdots +$$
$$+a_nX(p) = F(p)$$

Группируем слагаемые относительно $X(p)$:

$$A(p)X(p) - R(p) = F(p),$$

Где введены обозначения:

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

$$R(p) = p^{n-1} x_0 + p^{n-2}(x_1 + a_1 x_0) + \dots + x_{n-1} + a_1 x_{n-2} + \dots + a_{n-1} x_0$$

Шаг 3: решить полученное на предыдущем этапе линейное алгебраическое уравнение. Получаем операторное решение заданного дифференциального уравнения

$$X(p) = \frac{F(p) + R(p)}{A(p)}$$

Шаг 4: найти оригинал для полученного операторного решения $X(p)$

$$X(p) \fallingdotseq x(t)$$

Пример 3.1 Методом операционного исчисления решить задачу Коши

$$x'' + 2x' + x = \sin t$$
$$x(0) = 0; x'(0) = -1$$

Решение

Шаг 1: Перейдем к изображениям Лапласа функций $x(t), x'(t), x''(t), \sin t$.

$$x(t) \risingdotseq X(p)$$

По формуле (7)

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$$

По формуле (7а)

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1$$

Из таблицы изображений

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2 + 1}$$

Шаг 2: Подставим изображения в заданное уравнение:

$$p^2X(p) + 1 + 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Группируем слагаемые относительно $X(p)$:

$$X(p)(p^2 + 2p + 1) + 1 = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Шаг 3: Решаем полученное линейное алгебраическое уравнение.

$$X(p)(p^2 + 2p + 1) = \frac{1}{p^2 + 1} - 1$$

$$(p^2 + 2p + 1) = (p + 1)^2$$

$$X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} - \frac{1}{(p + 1)^2} = \frac{-p^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$$

Нами получено операторное решение заданного дифференциального уравнения.

Шаг 4: Найдем оригинал для полученного операторного решения $X(p)$

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{-p^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{Mp + N}{p^2 + 1} =$$

$$= \frac{A(p + 1)(p^2 + 1) + B(p^2 + 1) + (Mp + N)(p + 1)^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$$

Приравняем числители исходной и полученной дробей:

$$A(p^3 + p^2 + p + 1) + B(p^2 + 1) + M(p^3 + 2p^2 + p) + N(p^2 + 2p + 1) = -p^2$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p

$$\begin{aligned} p^3&: \quad A+M=0 \\ p^2&: \quad A+B+2M+N=-1 \\ p^1&: \quad A+M+2N=0 \\ p^0&: \quad A+B+N=0 \end{aligned}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A+M=0 \\ A+B+2M+N=-1 \\ A+M+2N=0 \\ A+B+N=0 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} A+M=0 \\ B+M+N=-1 \\ -2M+N=1 \\ N=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+M=0 \\ B+M=-1 \\ -2M=1 \\ N=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ M=-\dfrac{1}{2} \\ N=0 \end{cases}$$

Таким образом $X(p)$ принимает вид:

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}$$

По таблице изображений Лапласа находим:

$$\frac{1}{(p+1)} \risingdotseq e^{-t}$$

$$\frac{1}{p^2} \risingdotseq t$$

Тогда по теореме смещения (5)

$$\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t}$$

По таблице изображений Лапласа находим:

$$\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t$$

Таким образом, использовав свойство линейности (3), получаем искомое решение задачи Коши:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t}(1-t) - \cos t\right)$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t}(1-t) - \cos t\right).$$

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения может быть получено приведенным выше методом, если вместо частных значений $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ взять произвольные постоянные $C_1, C_2, \cdots, C_n$

Пример 3.2 Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x'' + 4x' + 3x = e^{-3t}$$

Решение

Шаг 1: Найдем изображения искомой функции и ее производных, положив $x(0) = C_1, x'(0) = C_2$

$$x(t) \fallingdotseq X(p)$$

По формуле (7)

$$x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - C_1$$

По формуле (7а)

$$x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - pC_1 - C_2$$

По таблице изображений находим

$$e^{-3t} \risingdotseq \frac{1}{p+3}$$

Шаг 2: Подставим изображения в заданное уравнение:

$$p^2X(p) - pC_1 - C_2 + 4(pX(p) - C_1) + 3X(p) = \frac{1}{p+3}$$

Группируем слагаемые относительно $X(p)$:

$$X(p)(p^2 + 4p + 3) - pC_1 - C_2 - 4C_1 = \frac{1}{p+3}$$

Шаг 3: Решаем полученное линейное алгебраическое уравнение.

$$X(p)(p^2 + 4p + 3) = \frac{1}{p+3} + pC_1 + C_2 + 4C_1 =$$

$$= \frac{1 + C_1p(p+3) + (p+3)(C_2 + 4C_1)}{p+3}$$

$$(p^2 + 4p + 3) = (p+1)(p+3)$$

$$X(p) = \frac{1 + C_1p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2(p+1)}$$

Шаг 4: Найдем оригинал для полученного операторного решения $X(p)$.

Воспользуемся второй теоремой разложения.

Особыми точками $X(p)$ являются

$p_1 = -1$ полюс первого порядка
$p_2 = -3$ полюс второго порядка

Тогда

$$x(t) = \operatorname{Res}\left[\frac{1 + C_1p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2(p+1)}e^{pt}, -1\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1 + C_1p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2(p+1)}e^{pt}, -3\right]$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2(p+1)} e^{pt}, -1\right] =$$

$$= \left.\frac{\dfrac{1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2} e^{pt}}{(p+1)'}\right|_{p=-1} =$$

$$\frac{1 + C_1 - (C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(-p+3)^2} e^{-t} = \frac{1 + 6C_1 + 2C_2}{4} e^{-t}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2(p+1)} e^{pt}, -3\right] =$$

$$= \lim_{p \to -3}\left((p+3)^2 \frac{1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+3)^2(p+1)} e^{pt}\right)' =$$

$$= \lim_{p \to -3}\left(\frac{1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+1)} e^{pt}\right)' =$$

$$= \lim_{p \to -3}\left(\frac{(2pC_1 + C_2 + 7C_1)(p+1) - \left(1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)\right)}{(p+1)^2} e^{pt}\right.$$

$$\left. + \frac{1 + C_1 p^2 + p(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(p+1)} t e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{(-6C_1 + C_2 + 7C_1)(-3+1) - \left(1 + 9C_1 - 3(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)\right)}{(-3+1)^2} e^{-3t}$$

$$+ \frac{1 + 9C_1 - 3(C_2 + 7C_1) + 3(C_2 + 4C_1)}{(-3+1)} t e^{-3t}$$

$$= \frac{-2(C_1 + C_2) - 1}{4} e^{-3t} - \frac{t e^{-3t}}{2}$$

Введем обозначения:

$$\frac{1 + 6C_1 + 2C_2}{4} = \tilde{C}_1$$

$$-\frac{(C_1+C_2)-1}{2}=\tilde{C}_2$$

Тогда общее решение заданного уравнения может быть записано в виде:

$$x(t)=\tilde{C}_1e^{-t}+\tilde{C}_2e^{-3t}-\frac{te^{-3t}}{2}$$

Ответ:

$$x(t)=\tilde{C}_1e^{-t}+\tilde{C}_2e^{-3t}-\frac{te^{-3t}}{2}.$$

Для решения линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами с помощью, приведенного выше алгоритма существенным, является задание начальных условий при $t=0$.

Однако, задача Коши в случае начальных условий, заданных при произвольном значении t

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nx(t)=f(t) \\ x(t_0)=x_0; x'(t_0)=x_1; \cdots; x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1} \end{cases} \quad (21)$$

может быть сведена к решению задачи Коши (20) с помощью замены

$$t=\tau+t_0 \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$x(t)=x(\tau+t_0)=\tilde{x}(\tau)$$
$$f(t)=f(\tau+t_0)=\tilde{f}(\tau)$$

Тогда задача Коши примет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(n)}(\tau)+a_1\tilde{x}^{(n-1)}(\tau)+\cdots+a_n\tilde{x}(\tau)=\tilde{f}(\tau) \\ \tilde{x}(0)=x_0; \tilde{x}'(0)=x_1; \cdots; \tilde{x}^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \end{cases} \quad (22)$$

Решение задачи Коши (22) может быть получено с помощью приведенного выше алгоритма.

$$\tilde{X}(p)\risingdotseq\tilde{x}(\tau)$$

Шаг 5: вернуться к исходной переменой

Для получения решения исходной задачи необходимо вернуться к исходной переменной t

$$\tilde{x}(t - t_0) = x(t)$$

Пример 3.3 Методом операционного исчисления решить задачу Коши

$$x''' + x' = t$$
$$x(1) = 1; x'(1) = 0; x''(1) = -1$$

Решение

В данном случае начальные условия заданы не в нуле. Сделаем замену (21)

$$t = \tau + 1$$

Обозначим

$$x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$$

Для функции $\tilde{x}(\tau)$ получаем задачу Коши с начальными условиями заданными при $\tau = 0$

$$\tilde{x}''' + \tilde{x}' = \tau + 1$$
$$\tilde{x}(0) = 1; \tilde{x}'(0) = 0; \tilde{x}''(0) = -1$$

Шаг 1: Найдем изображения функции $\tilde{x}(\tau)$ и ее производных:

$$\tilde{x}(\tau) \risingdotseq \tilde{X}(p)$$

По формуле (7)

$$\tilde{x}'(\tau) \risingdotseq p\tilde{X}(p) - 1$$

По формуле (7а)

$$\tilde{x}'''(\tau) \risingdotseq p^3\tilde{X}(p) - p^2 + 1$$

По таблице находим

$$\tau + 1 \risingdotseq \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p^2}$$

Шаг 2: Подставим изображения в заданное уравнение:

$$p^3\tilde{X}(p) - p^2 + 1 + p\tilde{X}(p) - 1 = \frac{p+1}{p^2}$$

Группируем слагаемые относительно $X(p)$:

$$\tilde{X}(p)(p^3 + p) - p^2 = \frac{p+1}{p^2}$$

Шаг 3: Решаем полученное линейное алгебраическое уравнение.

$$\begin{aligned}\tilde{X}(p)(p^3 + p) &= \frac{p+1}{p^3(p^2+1)} + \frac{p^2}{p(p^2+1)} \\ &= \frac{1}{p^2(p^2+1)} + \frac{1}{p^3(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1}\end{aligned}$$

Разложим первую дробь на простейшие относительно p^2:

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2+1} = \frac{A(p^2+1) + Bp^2}{p^2(p^2+1)}$$

$$A(p^2+1) + Bp^2 = 1$$

$$\begin{matrix} p^2: & A + B = 0 \\ p^0: & A = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}$$

Используя таблицу производных находим:

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \tau - \sin\tau$$

$$\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos\tau$$

Оригинал для второго слагаемого найдем, используя теорему о свертке (12). По таблице изображений находим:

$$\frac{1}{p^3} \risingdotseq \frac{\tau^2}{2}$$

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \risingdotseq \int_0^\tau \frac{z^2}{2}\sin(\tau - z)\,dz =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \dfrac{z^2}{2} & du = zdz \\ dv = \sin(\tau - z)\,dz & v = \cos(\tau - z) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{z^2}{2}\cos(\tau - z)\Big|_0^\tau - \int_0^\tau \cos(\tau - z)zdz = \frac{\tau^2}{2} - \int_0^\tau \cos(\tau - z)zdz =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = z & du = dz \\ dv = -\cos(\tau - z)\,dz & v = \sin(\tau - z) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{\tau^2}{2} + z\sin(\tau - z)|_0^\tau - \int_0^\tau \sin(\tau - z)\,dz = \frac{\tau^2}{2} + \cos(\tau - z)|_0^\tau =$$

$$= \frac{\tau^2}{2} + 1 - \cos\tau$$

Складывая полученные результаты, получаем:

$$\tilde{x}(\tau) = \tau - \sin\tau + \frac{\tau^2}{2} + 1 - \cos\tau + \cos\tau = \frac{\tau^2}{2} + \tau + 1 - \sin\tau$$

Возвращаясь к исходной переменной t получаем:

$$x(t) = \tilde{x}(t-1) = \frac{(t-1)^2}{2} + (t-1) + 1 - \sin(t-1)$$

$$x(t) = \frac{t^2+1}{2} - \sin(t-1)$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{2} - \sin(t - 1)$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 5. *Методом операционного исчисления решить задачу Коши.*

1. $x'' + 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$
2. $x'' - 2x' = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$
3. $x'' + 4x = 4sint$, $x(0) = 4, x'(0) = 0$
4. $x'' - 4x = 4t$, $x(0) = -1, x'(0) = 0$
5. $x'' + 2x' = t\,sint$, $x(0) = x'(0) = 0$
6. $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0) = 1, x'(0) = 0$
7. $x'' - x = 4sint + 5cos2t$, $x(0) = x'(0) = 0$
8. $x'' + 4x = 2cost \cdot cos3t$, $x(0) = x'(0) = 0$
9. $x''' + x'' = 1$; $x(0) = 1, x'(0) = x''(0) = 0$
10. $x''' + x'' - 2x' = 6e^{-t}$; $x(0) = 0, x'(0) = -2, x''(0) = 0$
11. $x'' + x = 1$; $x(\pi) = 1, x'(\pi) = 0$
12. $x'' + x = -2sint$; $x(\pi/2) = 0, x'(\pi/2) = 1$

Ответы: 1. $x = 2e^{-2t} - e^{-t}$; ***2.*** $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}$;***3***. $x = \frac{4}{3}sin2t + \frac{4}{3}sint$; ***4***. $x = -t$;***5***. $x = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}sint - \frac{1}{5}cost$; ***6***. $x = t^2 - 4t + 6 - te^{-t} - 5e^{-t}$; *7*. $x = \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} - 2sint - cos2t$; ***8***. $x = \frac{1}{4}tsin2t + \frac{1}{12}cos2t - \frac{1}{12}cos4t$; ***9***. $x = 2 - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}$; ***10***. $x = -2 + e^{t} + 3e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t}$; ***11***. $x = 1 + cost$; ***12***. $x = cost\left(t - 1 - \frac{\pi}{2}\right)$

3.1. Решение задачи Коши с помощью формулы Дюамеля.

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = f(t) \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \qquad (23)$$

Использование приведенного выше алгоритма требует нахождения изображения функции $f(t)$, что, довольно часто, является весьма сложной задачей. В этом случае задача может быть решена следующим образом:

Шаг 1: решаем вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x_1^{(n)}(t) + a_1 x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x_1(t) = 1 \\ x_1(0) = x_1'(0) = \cdots = x_1^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Решение уравнения (24) является функция $x_1(t)$, которая может быть найдена с помощью приведенного выше алгоритма.

В данном случае, в силу нулевых начальных условий, учитывая, что $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$

$$X_1(p) = \frac{1}{pA(p)}$$

Тогда $X_1(p)$- операторное решение вспомогательной задачи и $X(p)$- операторное решение поставленной задачи связаны соотношением:

$$X(p) = pF(p)X_1(p)$$

Шаг 2: Пользуемся формулой Дюамеля (13). Учитывая, что $x_1(0) = 0$, получаем

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau \tag{25}$$

Пример 3.4 Методом операционного исчисления решить задачу Коши

$$x'' - x = \operatorname{th} t$$
$$x(0) = 0; x'(0) = 0$$

Решение

Нахождение изображения функции th t является сложной задачей, поэтому воспользуемся формулой Дюамеля.

Составим вспомогательное уравнение

$$x_1'' - x_1 = 1$$
$$x_1(0) = 0; x_1'(0) = 0$$

Перейдем к изображениям:

$$x_1(t) \risingdotseq X_1(p)$$
$$x_1''(t) \risingdotseq p^2 X_1(p)$$
$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}$$

Подставим найденные изображения в уравнение:

$$p^2 X_1(p) - X_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$X_1(p)(p^2 - 1) = \frac{1}{p}$$

Найдем операторное решение

$$X_1(p)(p^2 - 1) = \frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{1}{p(p - 1)(p + 1)}$$

Найдем оригинал, используя вторую теорему разложения (15).

Особыми точками $X_1(p)$ являются простые полюсы

$p = 0; p = 1; p = -1$

$$x_1(t) = \mathrm{Res}\left[\frac{e^{pt}}{p(p-1)(p+1)} e^{pt}, 0)\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{e^{pt}}{p(p-1)(p+1)} e^{pt}, 1)\right] +$$

$$+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{pt}}{p(p-1)(p+1)} e^{pt}, -1)\right] =$$

$$= \left.\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+1)}\right|_{p=0} + \left.\frac{e^{pt}}{p(p+1)}\right|_{p=1} + \left.\frac{e^{pt}}{p(p-1)}\right|_{p=-1} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Вспомогательная функция

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1$$

Тогда

$$x_1'(t) = \operatorname{sh} t$$

Тогда, согласно (15)

$$x(t) = \int_0^t \operatorname{th}\tau \cdot \operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau = \{\operatorname{sh}(t-\tau) = (\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh}\tau)\} =$$

$$= \int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau} \cdot \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}\tau\,d\tau - \int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau} \cdot \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh}\tau\,d\tau =$$

$$= \operatorname{sh} t \int_0^t \operatorname{sh}\tau\,d\tau - \operatorname{ch} t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^2\tau}{\operatorname{ch}\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch}\tau\Big|_0^t - \operatorname{ch} t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^2\tau \operatorname{ch}\tau}{\operatorname{ch}^2\tau}\,d\tau =$$

$$= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^2\tau}{\operatorname{ch}^2\tau}\,d\operatorname{sh}\tau =$$

$$= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^2\tau}{\operatorname{sh}^2\tau + 1}\,d\operatorname{sh}\tau =$$

$$= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \int_0^t \frac{\operatorname{sh}^2\tau + 1 - 1}{\operatorname{sh}^2\tau + 1}\,d\operatorname{sh}\tau =$$

$$= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \int_0^t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau + 1}\right) d \operatorname{sh} \tau =$$

$$= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \left(\operatorname{sh} \tau - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \tau)\right)\Big|_0^t =$$

$$= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) = \operatorname{ch} t \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) - \operatorname{sh} t$$

Ответ: $x(t) = \operatorname{ch} t \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} t) - \operatorname{sh} t$

В случае ненулевых начальных условий задача Коши (20) может быть сведена к задаче (24) с помощью замены

$$y(t) = x(t) - x_0 - t x_1 - \cdots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x_{n-1} \tag{26}$$

Тогда задача (20) примет вид

$$\begin{gathered} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = f_1(t) \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{gathered} \tag{27}$$

где

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_{n-1} - a_2 (x_{n-2} + t x_{n-1}) - \cdots - a_n \left(x_0 + t x_1 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x_{n-1}\right)$$

Пример 3.5 Методом операционного исчисления решить задачу Коши

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t+1}$$
$$x(0) = 1; x'(0) = -1$$

Решение

Нахождение изображения функции $\frac{e^{-t}}{t+1}$ затруднительно, поэтому необходимо воспользоваться формулой Дюамеля. Однако, для использования формулы (15) необходимы нулевые начальные условия.

Сделаем замену (26)

$$y(t) = x(t) - 1 + t$$

Заданное уравнение примет вид:

$$y'' + 2(y' - 1) + y + 1 - t = \frac{e^{-t}}{t + 1}$$

Тогда получаем задачу Коши с нулевыми начальными условиями:

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t + 1} + t + 1$$
$$y(0) = 0; y'(0) = 0$$

Составим вспомогательное уравнение

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 1$$
$$y_1(0) = 0; y_1'(0) = 0$$

Перейдем к изображениям:

$$y_1(t) \risingdotseq Y_1(p)$$
$$y_1'(t) \risingdotseq pY_1(p)$$
$$y_1''(t) \risingdotseq p^2Y_1(p)$$
$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}$$

Подставим найденные изображения в уравнение:

$$p^2Y_1(p) + 2pY_1(p) + Y_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y_1(p)(p^2 + 2p + 1) = \frac{1}{p}$$

Получаем операторное решение вспомогательного уравнения:

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$$

Для нахождения оригинала $y_1(t)$ разложим полученную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} = \frac{A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp}{p(p+1)^2}$$

$$A(p^2 + 2p + 1) + B(p^2 + p) + Cp = 1$$

$$\begin{aligned} p^2&: \quad A + B = 0 \\ p^1&: \quad 2A + B + C = 0 \\ p^0&: \quad A = 1 \end{aligned}$$

Решая систему $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$, получаем $\begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{matrix}$

Получаем:

$$Y_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$$

Воспользовавшись таблицей и теоремой смещения (5), получаем

$$y_1(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

Найдем производную:

$$y_1' = e^{-t} - e^{-t} + te^{-t} = te^{-t}$$

$y(t)$ найдем с помощью формулы (25):

$$y(t) = \int_0^t \left(\frac{e^{-\tau}}{\tau+1} + \tau + 1\right)(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau =$$

$$= e^{-t}\left(\int_0^t \frac{t-\tau}{\tau+1}d\tau + \int_0^t (-\tau^2 + \tau(t-1) + t)e^{\tau}\, d\tau\right)$$

$$I_1 = \int_0^t \frac{t-\tau}{\tau+1} d\tau = \int_0^t \frac{t+1-(\tau+1)}{\tau+1} d\tau = (t+1)\int_0^t \frac{d\tau}{\tau+1} - \int_0^t d\tau =$$

$$= (t+1)\ln|\tau+1|\big|_0^t - \tau|_0^t = (t+1)\ln|t+1| - t$$

$$I_2 = \int_0^t (-\tau^2 + \tau(t-1) + t)e^\tau\, d\tau =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = (-\tau^2 + \tau(t-1) + t) & du = (-2\tau + t - 1)d\tau \\ dv = e^\tau d\tau & v = e^\tau \end{Bmatrix} =$$

$$= (-\tau^2 + \tau(t-1) + t)e^\tau|_0^t - \int_0^t e^\tau\,(-2\tau + t - 1)d\tau =$$

$$= -t - \int_0^t e^\tau\,(-2\tau + t - 1)d\tau = \begin{Bmatrix} u = (-2\tau + t - 1) & du = -2d\tau \\ dv = e^\tau d\tau & v = e^\tau \end{Bmatrix} =$$

$$= -t - (-2\tau + t - 1)e^\tau|_0^t - 2\int_0^t e^\tau\, d\tau = -t + (t+1)e^t + t - 1 - 2e^\tau|_0^t$$

$$= (t+1)e^t - 1 - 2e^t + 2 = (t-1)e^t + 1$$

Таким образом, получаем

$$y(t) = e^{-t}\big((t+1)\ln|t+1| - t + (t-1)e^t + 1\big) =$$

$$= e^{-t}\big((t+1)\ln|t+1| - t + 1\big) + t - 1$$

Вернемся к функции $x(t)$:

$$x(t) = y(t) + 1 - t = e^{-t}\big((t+1)\ln|t+1| - t + 1\big) + t - 1 + 1 - t$$

$$x(t) = e^{-t}\big((t+1)\ln|t+1| - t + 1\big)$$

Ответ:

$$x(t) = e^{-t}\big((t+1)\ln|t+1| - t + 1\big)$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 6. *Решить задачу Коши с помощью формулы Дюамеля.*

1. $x'' - 2x' + x = 2e^t cost$	2. $x'' + 3x' - 4x = t^3 e^{-4t}$
$x(0) = x'(0) = 0$	$x(0) = x'(0) = 0$
3. $x'' - x = 1/cht$	4. $x'' - x' = e^t/(1+e^t)$
$x(0) = x'(0) = 0$	$x(0) = x'(0) = 0$
5. $x'' + 5x' + 6x = e^{-3t}(1+t^2)$	6. $x'' - x' = sht/ch^2 t$
$x(0) = 1, x'(0) = -1$	$x(0) = 1, x'(0) = 0$

Ответы: 1. $x = 2e^t(1 - cost)$; ***2.*** $x = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{625}e^t - \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{5} + \frac{3t^2}{25} + \frac{6t}{125} - \frac{6}{625}\right)e^{-4t}\right)$; ***3***. $x = t\,sht - cht \cdot ln(cht)$; ***4***. $x = te^t - (1+e^t)ln(1+e^t) + e^t ln2$; ***5.*** $x = 5e^{-2t} - e^{-3t}\left(\frac{t^3}{3} + t^2 - 3t + 4\right)$; ***6***. $x = e^t(ln(cht) - t + 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости – М. Л. Краснов, А. И. Кисилев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 303 с.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – Ч. 4. – 367 с.
3. Свешников, А. Г. Теория функции комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н.Тихонов. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
4. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей атематике / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш/ шк/, 1990. – Ч. 2. –367 с.
5. Шахно, К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К. У. Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975. – 432 с.
6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрон-пресс, 2013. –Ч. 2. – 252 с.

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по дисциплинам «Математика. Математический анализ» и «Математика» для студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 16.11.21.

Рег. № 50Е.
http://www.gstu.by