

УДК 621.9.02

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДИСКОВОГО  
ЛИСТОВОГО МАТЕРИАЛА В ПРОЦЕССЕ  
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЕГО РОБОТОМ**

**Ю. М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ**

*Белорусский национальный технический университет,  
г. Минск*

**М. И. МИХАЙЛОВ, К. В. ЛУКЪЯНЧИК**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

*Получены соотношения, позволяющие моделировать динамические процессы при транспортировке листовых материалов и воздействии на них как внешней распределенной нагрузки, так и импульсных нагрузок.*

*Для обеспечения устойчивости робота разработана методика анализа частот перемещений листового материала при действии на него внешней динамической нагрузки.*

**Ключевые слова:** роботы, моделирование колебаний, перемещение, дисковый листовой материал.

**SIMULATION OF VIBRATIONS OF DISK SHEET  
MATERIAL IN THE PROCESS OF ITS MOVEMENT  
BY A ROBOT**

**U. M. PLESKACHEVSKY**

*Belarusian National Technical University, Minsk*

**M. I. MIKHAILOV, K. V. LUKYANCHIK**

*Educational Institution "Sukhoi State Technical University  
of Gomel", the Republic of Belarus*

*Ratios are obtained that allow modeling of dynamic processes during transportation of the materials and their effects both external distributed load and pulse loads.*

*To ensure stability of the robot, the method has been developed for analyzing the displacement frequencies of sheet material under the action of external dynamic load on it.*

**Keywords:** robots, vibration modelling, displacement, disk sheeting.

**Введение**

Автоматизация складирования и сборки изделий из листовых материалов чаще всего производится с помощью роботов [1], [2]. При перемещении сочленений робота 1 возникают вынужденные колебания транспортируемых изделий 2 (рис. 1). Наиболее активно на вынужденные колебания транспортируемых листовых материалов влияют не только перемещения сочленений самого робота, но и действие внешней среды.

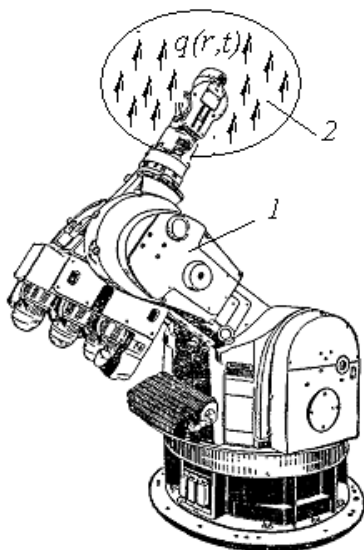


Рис. 1. Расчетная схема транспортировки листового материала:  
1 – робот; 2 – транспортируемые изделия

Целью работы является повышение виброустойчивости робототехнических систем.

#### Методика исследований

Для описания вынужденных колебаний листового материала использовалась система дифференциальных уравнений:

$$L_2(a_1u + a_2\Psi - a_3w_r) = 0, \quad L_2(a_2u + a_4\Psi - a_5w_r) = 0, \quad (1)$$

$$L_3(a_3u + a_5\Psi - a_6w_r) - M_0\ddot{w} = -q,$$

где  $u(r, t)$  – радиальное перемещение;  $\Psi(r, t)$  – относительный сдвиг;  $w(r, t)$  – прогиб листового материала;  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы (операторы Бесселя);  $a_1, a_2, a_3$  – коэффициенты [3], [4].

Внешняя нагрузка  $q(r, t)$  и неизвестные перемещения  $u(r, t)$ ,  $\Psi(r, t)$  и  $w(r, t)$  были разложены в ряды по системам фундаментальных собственных ортонормированных функций  $v_n \equiv v(\beta_n, r)$ :

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t);$$

$$\Psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad w(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \quad (2)$$

Равномерная сходимость рядов (2) обеспечена полнотой используемых систем фундаментальных функций. Выражения для коэффициентов  $q_n(t)$  разложения нагрузки в ряд по системе функций  $v(\beta_n, r)$  получим, умножив первое из соотношений в (2) на  $v_n$  и проинтегрировав по радиусу листового материала:

$$\int_{r_0}^1 q(r, t) v_n r dr = M_0 \int_{r_0}^1 \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n r dr = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_{r_0}^1 v_m v_n r dr.$$

В силу ортонормированности функций  $v_n$ :

$$\int_{r_0}^1 v_m v_n r dr = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n r dr. \quad (3)$$

Уравнение для определения неизвестной функции  $T_n(t)$  в этом случае можно получить из третьего соотношения системы (1) после подстановки в него выражений (2) и использования линейной связи функций  $v_n, \varphi_n$ :

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Таким образом, неизвестные параметры в круговом листе вычисляются по формулам (2). Функции  $v_n$  и  $\varphi_n$ , входящие в (2), определяются в зависимости от граничных условий.

Во всех случаях функция  $T_n(t)$  определяется выражением (5), где коэффициенты  $A_n, B_n$  находятся из граничных условий, так как интегральное слагаемое в (5) и его производная в начальный момент времени обращаются в ноль.

В случае действия атмосферной динамической равномерно распределенной поверхностной нагрузки на листовый материал

$$q(r, t) = q_0(t) \quad (6)$$

получаем интегральное выражение для вычисления параметров  $q_n(t)$ :

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (7)$$

После этого решение задачи о вынужденных колебаниях листовых материалов определяется соотношениями (2), а функция времени  $T_n(t)$  вычисляется по формуле (5) с учетом (7).

Начальные условия движения принимались нулевыми, что позволяет допустить константы интегрирования  $A_n = B_n = 0$ . Тогда при  $q_0 = \text{const}$  получим:

$$T_n(t) = \frac{q_0(1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 \omega_n^2} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (8)$$

Вид функции  $v_n$ , входящей в (7) и (8), зависит от условий закрепления листа в схвате робота. Для случая закрепления по обоим контурам интеграл функции имеет вид:

$$\int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr = \frac{1}{\beta_n} (J_1(\beta_n) + k_{1n} I_1(\beta_n) + k_{2n} Y_1(\beta_n) - k_{3n} K_1(\beta_n)) - r_0 [(J_1(\beta_n r_0) + k_{1n} I_1(\beta_n r_0) + k_{2n} Y_1(\beta_n r_0) - k_{3n} K_1(\beta_n r_0))]. \quad (9)$$

Если внешняя нагрузка воздействует в течение малого промежутка времени (не превышающего четверти наибольшего из периодов собственных колебаний  $t_0 = 2\pi/\omega_0$ ) импульсно, то для описания нагрузки использовалась дельта-функция Дирака  $\delta(t)$ :

$$q(r, t) = q_1 \delta(t), \quad q_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Задача, как правило, сводится к отысканию параметров  $q_n(t)$  разложения в ряд заданной нагрузки и определению функции времени  $T_n(t)$ .

Подставив (10) в (3), получим параметры разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций  $v_n$ :

$$q_n(t) = \frac{q_1 \delta(t)}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (11)$$

С учетом (11) искомая функция времени  $T_n(t)$  будет иметь вид:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{q_1 \sin(\omega_n t)}{M_0 \omega_n} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr. \quad (12)$$

Интегралы в выражениях (11) и (12) вычисляются по формулам (9) в зависимости от способа закрепления листового материала.

Для управления роботом при транспортировке листового материала, находящегося под действием периодических внешних нагрузок, часто важнейшей из задач является отстройка от резонанса. Это достигается обеспечением достаточного различия между частотой возмущающей силы  $\varphi$  и частотой основного тона собственных колебаний  $\omega_0$ . Однако при  $\varphi > \omega_0$  возможно совпадение частоты нагрузки с одной из более высоких частот собственных колебаний  $\varphi = \omega_k$ . Подобный случай может представлять угрозу для прочности конструкции робота. В связи с этим рассматриваются поперечные колебания листа под действием гармонических резонансных нагрузок, т. е. нагрузок, частота которых совпадает с одной из собственных частот колебаний системы робота.

Пусть на всю внешнюю поверхность рассматриваемого листа действует распределенная гармоническая резонансная нагрузка:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)). \quad (13)$$

Здесь частота внешней возмущающей силы  $\omega_k$  совпадает с одной из собственных частот  $\omega_n$  колебаний листа;  $t$  – время;  $q_0, D, E, k$  – const.

Разложение в ряд нагрузки  $q_n(t)$  (13) по собственным функциям  $v_n$  будет иметь вид:

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n(\beta_n, r) r dr = D_n \cos(\omega_n t) + E_n \sin(\omega_n t); \quad (14)$$

$$D_n = \frac{Dq_0}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr, \quad E_n = \frac{Eq_0}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr.$$

Интегралы, входящие в (14), определяются в зависимости от условий закрепления листов по формулам (9).

Дифференциальное уравнение (4) для нахождения неизвестной функции времени  $T_n(t)$  с учетом (14) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t). \quad (15)$$

Его решение можно представить так:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (16)$$

где частные решения  $y_n(t)$  уравнения (15) будут иметь вид:

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k, \\ -\frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t), & n = k. \end{cases} \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражение для прогиба (2) с учетом функции времени (16) и ортонормированности фундаментальной системы  $v_n$ , получаем:

$$A_n = \int_{r_0}^1 f(r) v_n r dr - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ 0, & n = k \end{cases};$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_{r_0}^1 g(r) v_n r dr - \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, & n = k \end{cases}. \quad (18)$$

Таким образом, поперечные колебания листа под действием резонансной нагрузки (13) описываются перемещениями (2), в которых функция времени  $T_n(t)$  и константы интегрирования определяются выражениями (16) и (18).

Начальные условия движения предполагаются однородными, что в соответствии с (18) позволяет упростить константы интегрирования  $A_n, B_n$  и в дальнейшем принимать:

$$A_n = \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, \quad n \neq k; \quad B_n = -\frac{1}{\omega_n} \begin{bmatrix} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, \quad n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, \quad n = k \end{bmatrix} \\ A_n = 0, \quad n = k.$$

### Анализ результатов

Расчет проводился для листа единичного радиуса. Рассматривались два вида граничных условий: лист жестко закреплен за внешний и внутренний контуры; лист жестко закреплен за внутренний контур. Собственные частоты колебаний  $\omega_n$  вычислялись с использованием собственных чисел. Для слоистого материала принималось соотношение толщин слоев в листе  $h_3 = 20h_1 = 20h_2 = 0,1$ . Момент времени расчета принят  $t_1 = \pi / \omega_0$ , с.

На графиках (рис. 2) видно, что максимальный прогиб листа, закрепленного по обоим контурам 1, меньше в 7,2 раза соответственно листа, закрепленного за внутренний контур 2.

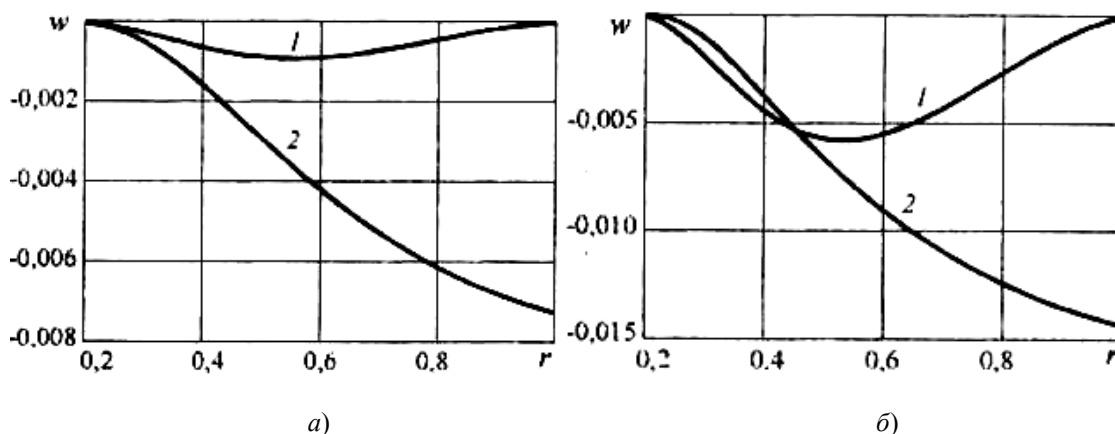


Рис. 2. Графики распределения прогиба листового материала:  
а – максимальный прогиб листа; б – изменение прогиба вдоль радиуса

На рис. 2, б показано изменение прогиба вдоль радиуса листа при импульсе  $q_1 = -100$  Па · с в момент времени  $t = \pi / 2\omega_0$ , с. Максимальный прогиб закрепленного по обоим контурам листа 1 в 2,4 раза меньше прогиба на свободном краю 2.

Полученный результат позволяет заключить, что при импульсном нагружении жесткость листа в зависимости от способа закрепления играет меньшую роль, чем при динамическом воздействии поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности.

На рис. 3 показано нарастание амплитуды резонансных колебаний (максимального значения прогиба) во времени. Амплитуда интенсивности поверхностной нагрузки  $q_0 = -50$  Па. Лист закреплен по внешнему и внутреннему контурам.

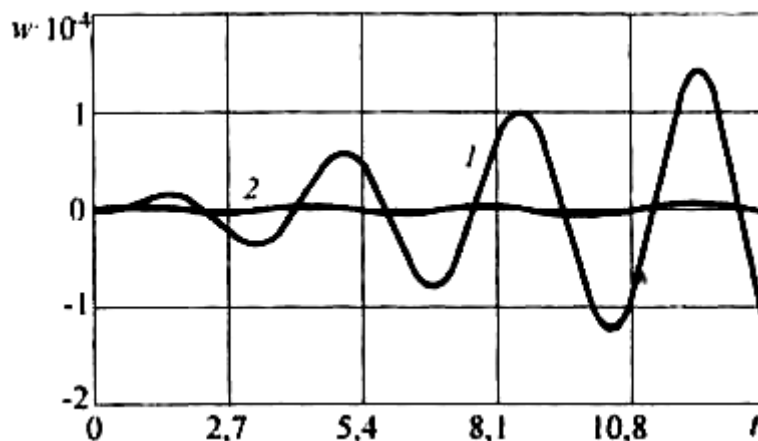


Рис. 3. Графики изменения амплитуды колебаний:  
1 – для листового материала, закрепленного по внутреннему контуру;  
2 – для листового материала, закрепленного по внешнему контуру

При совпадении частоты возмущающей силы с более высокими частотами амплитуда колебаний продолжает нарастать, но с меньшей скоростью. Причем чем с более высокой собственной совпадает возмущающая частота, тем меньше скорость нарастания амплитуды колебаний за принятый интервал времени. Например, отношение максимального прогиба при совпадении с первой частотой к соответствующим прогибам при  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  составляет примерно 76, 78 и 522.

На рис. 3 наблюдается нарастание амплитуды колебаний с существенным опережением в первом случае.

### Заключение

Полученные соотношения позволяют моделировать динамические процессы при транспортировке листовых материалов и воздействии на них как внешней распределенной нагрузки, так и импульсной нагрузки.

Кроме этого для обеспечения устойчивости работа разработана методика анализа частот листового материала при действии внешней динамической нагрузки.

### Литература

1. Промышленные роботы: Конструирование, управление, эксплуатация / В. И. Костюк [и др.]. – Киев : Вища школа, 1985. – 359 с.
2. Коловский, М. З. Основы динамики промышленных роботов / М. З. Коловский, А. В. Слоущ. – М. : Наука, 1988. – 240 с.
3. Плескачевский, Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Белорус. наука, 2004. – 386 с.
4. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.

Получено 19.09.2020 г.