Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»**

Кафедра «Высшая математика»

Н. Н. Бородин, В. И. Гойко, Е. А. Дегтярева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине «Математика»
для студентов всех специальностей
заочной формы обучения**

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Б83

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого*
(*протокол № 5 от 07.06.2012 г.*)

Рецензенты: зав. каф. «Высшая математика» БТЭУ ПК
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. И. Тютин*

Бородин, Н. Н.

Б83 Неопределенный и определенный интеграл. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения : учеб.-метод. пособие по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей заоч. формы обучения / Н. Н. Бородин, В. И. Гойко, Е. А. Дегтярева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 61 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-143-7.

Предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочного отделения к тестированию и экзамену по математике.

Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-535-143-7

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если:

а) $F(x)$ дифференцируема на $(a; b)$;

б) $F'(x) = f(x),\ x \in (a;b)$.

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $(a; b)$, то и любая функция $F_1(x) = F(x) + C$ также является первообразной для $f(x)$ на $(a; b)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на $(a; b)$ называется множество всех первообразных функции $f(x)$ на этом интервале. Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$. Неопределенный интеграл записывают в виде формулы

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ – любая из первообразных для функции $f(x)$ на $(a; b)$, C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;

4) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов:

I. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$.

III. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

IV. $\int e^x dx = e^x + C$.

V. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

VI. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

VII. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C.$

IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$

X. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Метод непосредственного интегрирования состоит в сведении заданного интеграла к сумме или разности табличных интегралов путем тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример 1.1. Найти $\int \frac{(3-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{(3-x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{9-6x+x^2}{\sqrt{x}} = \frac{9}{\sqrt{x}} - \frac{6x}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 9x^{-1/2} - 6x^{1/2} + x^{3/2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\int \frac{(3-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(9x^{-1/2} - 6x^{1/2} + x^{3/2}\right)dx =$$

$$= 9\int x^{-1/2}dx - 6\int x^{1/2}dx + \int x^{3/2}dx = 9\frac{x^{1/2}}{1/2} - 6\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + C =$$

$$= 18\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

Ответ: $18\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$

1.2. Метод занесения под знак дифференциала

Метод занесения под знак дифференциала основан на определении дифференциала функции одной переменной:

$$f'(x)dx = df(x) \tag{1.2}$$

и свойстве инвариантности дифференциала первого порядка: если $y = f(x)$, а $x = g(z)$, то

$$dy = f'(x)dx = f'(g(z))g'(z)dz. \tag{1.3}$$

В силу этого свойства таблица интегралов оказывается справедливой, независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Пример 1.2. Найти $\int x^3 \sin(x^4 + 8)dx$.

Решение. Применим метод занесения под знак дифференциала, воспользовавшись формулой (1.3):

$$\int \sin(x^4 + 8)x^3\, dx = \frac{1}{4}\int \sin(x^4 + 8)d(x^4 + 8) = -\frac{1}{4}\cos(x^4 + 8) + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}\cos(x^4 + 8) + C$.

1.3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной заключается в том, что в интеграле $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную *t*. При этом необходимо, чтобы полученный интеграл $\int f_1(t)dt$ стал табличным или, по крайней мере, был бы ясен способ его нахождения. После вычисления $\int f_1(t)dt$ следует вернуться к исходной переменной.

Пример 1.3. Найти $\int \frac{xdx}{(x+4)^4}$.

Решение. Подстановкой $t = x + 4$ знаменатель упрощается, и интеграл приводится к табличным интегралам:

$$\int \frac{xdx}{(x+4)^4} = \left\{\begin{matrix} x = t - 4 \\ dx = dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{t-4}{t^4}dt = \int\left(\frac{t}{t^4} - \frac{4}{t^4}\right)dt =$$

$$= \int \left(t^{-3} - 4t^{-4}\right) dt = \frac{t^{-2}}{-2} - 4\frac{t^{-3}}{-3} + C = \{t = x + 4\} =$$

$$= -\frac{1}{2(x+4)^2} + \frac{4}{3(x+4)^3} + C.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2(x+4)^2} + \dfrac{4}{3(x+4)^3} + C.$

Тригонометрические и гиперболические подстановки

Часто для вычисления интегралов, содержащих радикалы вида $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, применяются тригонометрические и гиперболические подстановки.

1. Если интеграл содержит $\sqrt{a^2 - x^2}$, то используем следующую замену:

$$x = a \sin t. \qquad (1.4)$$

Пример 1.4. Найти $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Решение. После применения тригонометрической подстановки $x = a\sin t$ получим:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left\{\begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{a^2 \sin^2 t a \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} =$$

$$= a^3 \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{a\sqrt{1 - \sin^2 t}} = a^2 \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = a^2 \int \sin^2 t dt.$$

Для вычисления полученного интеграла воспользуемся формулой

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}.$$

Тогда

$$a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt - \int \cos 2t dt\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Для того чтобы вернуться к исходной переменной, необходимо провести следующие преобразования:

$$\frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2}2\sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}.$$

Учитывая, что $x = a\sin t$; $\sin t = \frac{x}{a}$; $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$, окончательно получаем:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2. Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то полагают

$$x = \frac{a}{\cos t}. \qquad (1.5)$$

Следует отметить, что часто полученный в результате указанной подстановки интеграл, в свою очередь, оказывается довольно сложным. В таком случае можно вместо подстановки (1.5) воспользоваться гиперболической подстановкой

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t. \qquad (1.6)$$

При использовании гиперболических подстановок надлежит помнить, что

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1,\ (\mathrm{ch}\,t)' = \mathrm{sh}\,t,\ (\mathrm{sh}\,t)' = \mathrm{ch}\,t.$$

3. Интеграл, содержащий радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, может быть упрощен путем замен $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{sh}\,t$.

1.4. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на применении формулы

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (1.7)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции.

К интегралам, которые находят методом интегрирования по частям, относятся интегралы следующих видов:

1. $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x dx$, где $P_n(x)$ – полином n-й степени от x.

В данном случае за $u(x)$ следует выбрать $P_n(x)$, а за $dv(x)$ – $\cos\alpha x dx$ или $\sin\alpha x dx$.

Таким образом, в результате применения формулы (1.7) мы пришли к интегралу более простому по отношению к исходному. Следует подчеркнуть, что формула интегрирования по частям может быть применена несколько раз, до тех пор, пока мы не придем к $P_0(x)$, т. е. не придем к интегралу $\int \sin\alpha x dx$ или $\int \cos\alpha x dx$.

2. $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, где $P_n(x)$ – полином степени n от x.

В данном случае за $u(x)$ обозначают $P_n(x)$, за $dv(x) - e^{\alpha x}dx$. Формула интегрирования по частям применяется до тех пор, пока не останется $\int e^{\alpha x}dx$.

3. $\int P_n(x)\ln x dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x dx$; $\int P_n(x)\arcsin x dx$.

В данном случае за $u(x)$ следует выбирать $\ln x$; $\operatorname{arctg} x$; $\arcsin x$, за $dv(x)$ – $P_n(x)dx$. Тогда в результате применения формулы интегрирования по частям мы приходим к интегралам, содержащим только рациональные функции и радикалы.

4. Интегралы вида $\int \sin\alpha x e^{ax}dx$, $\int \cos\alpha x e^{bx}dx$ вычисляются с помощью двукратного применения формулы интегрирования по частям и последующего решения полученного уравнения относительно исходного интеграла. Следует отметить, что в данном случае безразлично, что изначально принимать за $u(x)$, а что за $dv(x)$.

Пример 1.5. Найти $\int (2x+1)\cos 3x dx$.

Решение

$$\int (2x+1)\cos 3x dx = \left\{\begin{matrix} u = (2x+1), & du = 2dx, \\ dv = \cos 3x dx, & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right\} =$$

$$= (2x+1)\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x \cdot 2dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

Пример 1.6. Найти $\int x^2 \ln x dx$.

Решение

$$\int x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = x^2 dx, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

1.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$ после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене сводятся к одному из табличных интегралов вида VII, VIII, IX или X.

Пример 1.7. Найти $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 7} = \int \frac{dx}{\left(x^2 + 2 \cdot 2x + 4\right) - 4 - 7} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 11} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 - \left(\sqrt{11}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{11}} \ln\left(\frac{x + 2 - \sqrt{11}}{x + 2 + \sqrt{11}} \right) + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{11}} \ln\left(\frac{x + 2 - \sqrt{11}}{x + 2 + \sqrt{11}} \right) + C.$

Для вычисления *интеграла вида* $\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx$ необходимо выделить производную знаменателя в числителе подынтегральной функции:

$$\left(x^2 + px + q\right)' = 2x + p, \; mx + n = \frac{m}{2}(2x + p) - \frac{mp}{2} + n.$$

Тогда исходный интеграл преобразуется в сумму двух интегралов:

$$\frac{m}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(n-\frac{mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=I_1+I_2.$$

Интеграл I_1 найдем методом занесения под знак дифференциала $(2x+p)dx=d\left(x^2+px+q\right)$, интеграл I_2 сводится к табличным интегралам (предварительно выделяя полный квадрат в знаменателе).

Таким образом,

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\frac{m}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(n-\frac{mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}. \quad (1.8)$$

Пример 1.8. Найти $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$

Решение. Найдем $\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4$. Выделим $2x-4$ в числителе функции: $3x-2=\frac{3}{2}(2x-4)+6-2=\frac{3}{2}(2x-4)+4$.

Таким образом,

$$\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx+4\int\frac{dx}{x^2-4x+5}=\frac{3}{2}I_1+4I_2,$$

$$I_1=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{d\left(x^2-4x+5\right)}{x^2-4x+5}=\ln\left|x^2-4x+5\right|+C_1,$$

$I_2=\int\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int\frac{dx}{x^2-4x+4+1}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=${табличный интеграл типа VII}$=\operatorname{arctg}(x-2)+C_2$.

Ответ: $\ln\left|x^2-4x+5\right|+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$

1.6. Интегрирование рациональных функций

Функция, заданная в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+b_m},\ \begin{cases}a_0\neq 0;\\ b_0\neq 0,\end{cases}$$

называется *рациональной функцией*.

Если $n<m$, то *дробь правильная*, при $n\geq m$ – *дробь неправильная*.

Метод интегрирования правильной рациональной дроби состоит в разложении этой дроби на простейшие. При этом следует пользоваться следующим правилом:

а) если множитель $(x-a)$ входит в разложение $Q_m(x)$ только в первой степени, мы поставим ему в соответствие единственную простую дробь:

$$(x-a) \to \frac{A}{x-a};$$

б) если в разложение $Q_m(x)$ входит множитель $(x-a)^k$, т. е. показатель степени $k>1$, то ему соответствует сумма из k простых дробей:

$$(x-a)^k \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k};$$

в) если в разложение $Q_m(x)$ входит множитель (x^2+px+q) только в первой степени, то в соответствие ему ставится единственная простая дробь:

$$(x^2+px+q) \to \frac{Mx+N}{x^2+px+q};$$

г) если в разложение $Q_m(x)$ входит множитель $(x^2+px+q)^k$, показатель которого $k>1$, то ему соответствует сумма из k простых дробей:

$$(x^2+px+q)^k \to \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Итак, ***общее правило интегрирования рациональных дробей***:

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители.
3. Представить дробь в виде суммы простейших рациональных дробей.
4. Найти неизвестные коэффициенты способом сравнения соответствующих коэффициентов или способом частных значений (см. пример ниже).
5. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 1.9. Разложить дробь $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}$ на простейшие.

Решение. $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{2x+1}=\dfrac{A(2x+1)+B(x+1)}{(x+1)(2x+1)}$.

Найдем коэффициенты A и B.

1 способ – *метод неопределенных коэффициентов*:

$$A(2x+1)+B(x+1)=x.$$

Приравняем коэффициенты при x^1 и x^0 в обеих частях полученного равенства:

$$\begin{array}{l} x^1: 2A+B=1, \\ x^0: A+B=0. \end{array} \Rightarrow\ A=1, B=-1.$$

2 способ – *метод частных значений*:

$$\begin{array}{l} x=-1:\ -A=-1, \\ x=-\dfrac{1}{2}:\ \dfrac{1}{2}B=-\dfrac{1}{2}. \end{array} \Rightarrow A=1, B=-1.$$

Ответ: $\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2x+1}$.

Пример 1.10. Найти $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4+8}{x^3-4x}\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция есть неправильная рациональная дробь (степень числителя больше степени знаменателя), которую сначала представим в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, разделив числитель и знаменатель по правилу «деления углом»:

$$\begin{array}{r|l}
x^5+x^4+8 & x^3-4x \\ \cline{2-2}
-\ \ x^5-4x^3 & x^2+x+4 \\ \cline{1-1}
x^4+4x^3+8 & \\
-\ \ x^4-4x^2 & \\ \cline{1-1}
4x^3+4x^2+8 & \\
-\ \ 4x^3-16x & \\ \cline{1-1}
4x^2+16x+8 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^5+x^4+8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x+8}{x^3-4x}.$$

Для представления правильной дроби $\frac{4x^2+16x+8}{x^3-4x}$ в виде суммы простейших дробей преобразуем ее знаменатель следующим образом:

$$x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=x(x-2)(x+2).$$

Таким образом, полученную правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{4x^2+16x+8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Отсюда получаем:

$$A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)=4x^2+16x+8.$$

Найдем коэффициенты A, B, C методом частных значений. Подставляя поочередно значения $x=2$, $x=-2$, $x=0$, получаем:

$$\begin{aligned}&x=2:\ 8B=56,\\&x=-2:\ 8C=-8,\Rightarrow A=-2, B=7,\ C=-1.\\&x=0:-4A=8.\end{aligned}$$

Итак,

$$\int\frac{x^5+x^4+8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{-2}{x}+\frac{7}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\int x^2dx+\int xdx+4\int dx-2\int\frac{dx}{x}+7\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x-2\ln|x|+7\ln|x-2|-\ln|x+2|+C.$$

Ответ: $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x-2\ln|x|+7\ln|x-2|-\ln|x+2|+C.$

1.7. Интегрирование иррациональных выражений

I. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_s]{x^{m_s}}\right)dx$ сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$.

II. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_l]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ рационализируются подстановкой: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$.

Пример 1.11. Найти $\int \dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$

Решение. Наименьшее общее кратное чисел 4 и 2 равно числу 4, поэтому делаем подстановку $x=t^4$, $dx=4t^3dt$,
откуда

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int \frac{\sqrt[4]{t^4}}{1+\sqrt{t^4}}4t^3dt=4\int \frac{t^4dt}{1+t^2}=$$

$$=4\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=4\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\right)+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}+\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right)\right)+C.$$

Ответ: $4\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}+\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right)\right)+C.$

1.8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

I. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \tag{1.9}$$

находят, применяя различные тригонометрические формулы в зависимости от значений m и n.

1. Хотя бы одно из чисел m и n положительно и нечетно. Пусть $n = 2l + 1$, тогда интеграл (1.9) можно преобразовать следующим образом:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2l} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \left(\cos^2 x\right)^l d(\sin x) = \int t^m \left(1 - t^2\right)^l dt.$$

Аналогично поступают в случае $m = 2l + 1$.

2. Оба числа m и n – четные и положительные (или нуль). В этом случае степени в подынтегральной функции понижают с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

3. Если $m + n = -2k \quad (k \in N)$. В этом случае подынтегральная функция записывается в виде дроби, в знаменателе которой выделяется множитель $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$). Выражение $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\left(\dfrac{dx}{\sin^2 x}\right)$ заменяем на $d(\operatorname{tg} x)$ $(-d(\operatorname{ctg} x))$ и делаем замену $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 1.12. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx.$

Решение. По условию одна из степеней нечетная, поэтому можно записать

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} d(\cos x) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\cos x = t \\ &\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{aligned} \right\} = -\int \frac{1 - t^2}{\sqrt[3]{t^2}} dt = -\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} - \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^2}} \right) dt =$$

$$= -\int t^{-2/3}dt + \int t^{4/3}dt = -\frac{t^{1/3}}{1/3} + \frac{t^{7/3}}{7/3} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x} + C.$$

Ответ: $-3\sqrt[3]{\cos x} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{\cos^7 x} + C.$

Пример 1.13. Найти $\int \cos^2 5x dx.$

Решение. Для вычисления интеграла применим формулу понижения степени:

$$\int \cos^2 5x dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

Ответ: $\frac{x}{2} + \frac{1}{20}\sin 10x + C.$

Пример 1.14. Найти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Решение. Здесь $m + n = 4 - 6 = -2$, поэтому полагаем:

$$\operatorname{tg} x = t, \ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2, \ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}d\operatorname{tg} x = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}d\operatorname{tg} x =$$

$$= \int t^2(1 + t^2)dt = \int (t^2 + t^4)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

Ответ: $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$

II. Интегралы вида

$$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx; \int \cos(ax)\sin(\beta x)dx; \int \sin(ax)\sin(\beta x)dx$$

преобразуются с помощью тригонометрических формул:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Пример 1.15. Найти $\int \cos 3x \cos\frac{x}{2}\,dx$.

Решение. $\int \cos 3x \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\int\left(\cos\left(3x-\frac{x}{2}\right)+\cos\left(3x+\frac{x}{2}\right)\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{7x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\sin\frac{5x}{2}+\frac{2}{7}\sin\frac{7x}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{2}+\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{2}+C.$$

Ответ: $\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{2}+\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{2}+C.$

III. В интегралах вида $\int \mathrm{tg}^m x dx$ (или $\int \mathrm{ctg}^m x dx$), где m – целое положительное число, применяется подстановка $\mathrm{tg}x = t$ (или $\mathrm{ctg}x = t$).

Пример 1.16. Найти $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

Решение. Сделаем подстановку $\mathrm{tg}x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \mathrm{tg}^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|+C =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\mathrm{tg}^2 x\right|+C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos^2 x}\right|+C =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$$

Ответ: $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$

1.9. Универсальная тригонометрическая подстановка

Интегралы вида $\int R(\cos x, \sin x)dx$, где R – рациональная функция, аргументами которой являются $\sin x$ и $\cos x$, в общем случае приводятся к интегралам от рациональных функций с аргументом t с помощью *универсальной подстановки* $t = \mathrm{tg}(x/2)$. При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ x = 2\mathrm{arctg}\, t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если подынтегральная функция $R(\cos x, \sin x)$ является четной по обоим аргументам, т. е. $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, то целесообразно использовать подстановку $t = \mathrm{tg}\, x$.

Пример 1.17. Найти $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Решение. Сделаем замену: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $x = \mathrm{arctg}\, t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно, получим

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{1}{3+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{3+3t^2+5-5t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C.$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем этот отрезок произвольным образом точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частей длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем внутри каждого отрезка точку ξ_i. Найдем значение функции $y = f(x)$ в точках ξ_i.

Интегральной суммой функции $y = f(x)$на отрезке $[a;b]$ называется сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2.1}$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы (2.1), найденный при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков стремится к нулю:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Некоторые свойства определенного интеграла:

$$1)\ \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx; \tag{2.2}$$

$$2)\ \int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx; \tag{2.3}$$

$$3)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \tag{2.4}$$

$$4)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \tag{2.5}$$

$$5)\ \text{если } f(x) \geq 0\ \ \forall x \in [a;b],\ a < b, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq 0; \tag{2.6}$$

6) если $f(x)$ непрерывна и $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство:

$$\Phi'(x)=f(x); \qquad (2.7)$$

7) если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) называется формулой *Ньютона–Лейбница*.

Пример 2.1. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{1/2}^{2}\frac{dx}{x^4}$.

Решение. По формуле (2.8):

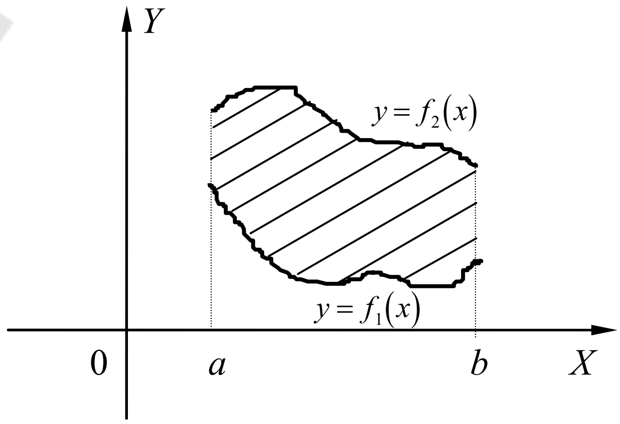
$$\int\limits_{1/2}^{2}\frac{dx}{x^4}=\int\limits_{1/2}^{2}x^{-4}dx=\frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_{1/2}^{2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{(1/2)^3}\right)=\frac{63}{24}.$$

2.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площади плоской фигуры

Если данная фигура ограничена двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и двумя вертикальными линиями $x=a$ и $x=b$, причем $f_1(x)\le f_2(x)$ $\forall x\in[a;b]$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$



Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad (2.9)$$

где α и β определяются из условий $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, $\psi(t) \geq 0$, $t \in [\alpha;\beta]$.

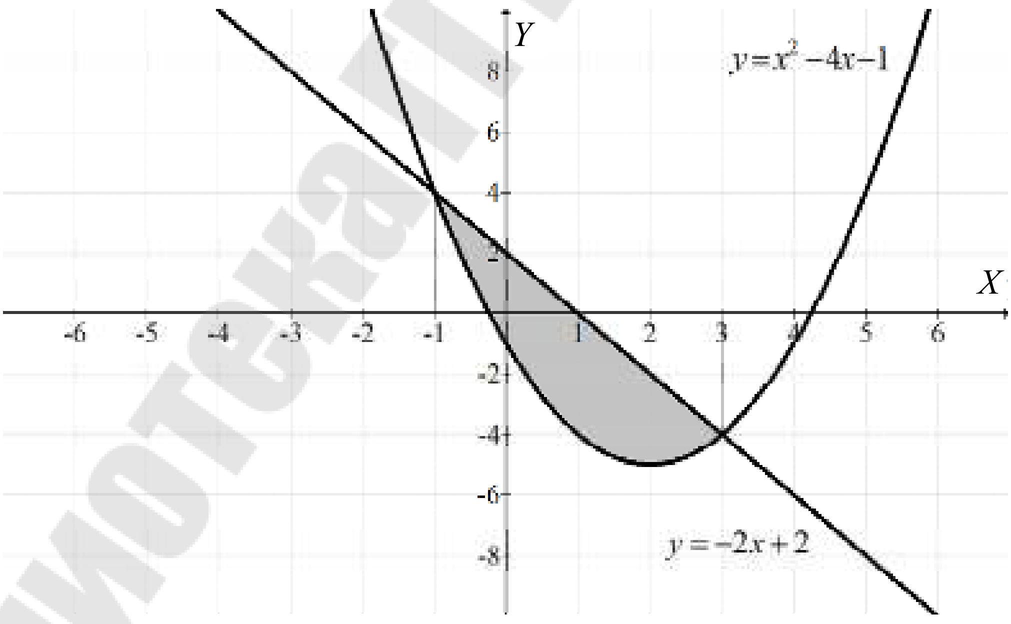
Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой кривой и полярными радиусами, соответствующими углам φ_1 и φ_2, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (2.10)$$

Пример 2.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x - 1, \quad y = -2x + 2.$$

Решение. Изобразим заданную фигуру:



Найдем абсциссы точек пересечения заданных кривых:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x - 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \; x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Решив последнее уравнение, получим:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Тогда площадь заштрихованной фигуры равна:

$$S = \int_{-1}^{3}\left(-2x + 2 - (x^2 - 4x - 1)\right)dx = \int_{-1}^{3}\left(-x^2 + 2x + 3\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Пример 2.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $y = 2(1 - \cos t),\ x = 2(t - \sin t)$ и осью OX.

Решение. Первая арка циклоиды определяется из условия:

$$y = 0,\ 2(1 - \cos t) = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi.$$

Таким образом, площадь найдем по формуле (2.9):

$$S = \int_{0}^{2\pi} 4(1 - \cos t)^2\, dt = 4\int_{0}^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 12\pi.$$

Пример 2.4. Вычислить площадь фигуры, заключенной между первым и вторым витками спирали Архимеда $\rho = a\varphi,\ a > 0$.

Решение. Область между первым и вторым витками спирали соответствует $\varphi_1 = 2\pi,\ \varphi_2 = 4\pi$.

Площадь найдем по формуле (2.10):

$$S = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}(a\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{4\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_{2\pi}^{4\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{6}\left((4\pi)^3 - (2\pi)^3\right) = \frac{28a^2\pi^3}{3}.$$

Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая задана уравнением $y = y(x)$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, тогда длина дуги может быть найдена по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

где a и b – абсциссы концов данной дуги ($a < b$).

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда длина дуги L кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, тогда длина дуги кривой выражается интегралом $L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\, d\varphi$, где φ_1 и φ_2 – значения полярного угла φ в концах дуги ($\varphi_1 < \varphi_2$).

Пример 2.5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками (0; 0) и (4; 8).

Решение. Функция $y(x)$ определена для $x \geq 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти, $y = x^{3/2}$. Отсюда $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ и $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$. Следовательно,

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

Пример 2.6. Вычислить длину дуги линии $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$.

Решение. Дифференцируя по t, получим:

$$x_t' = a\left(-\sin t + \sin t + t\cos t\right) = at\cos t,$$

$$y_t' = a\left(\cos t - \cos t + t\sin t\right) = at\sin t,$$

откуда $\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2} = \sqrt{a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = at.$

Следовательно, $L = \int\limits_0^{2\pi} atdt = a\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2a\pi^2.$

Пример 2.7. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

Решение. Кривая задана уравнением в полярных координатах, Найдем $\rho_\varphi' = \left(a(1-\cos\varphi)\right)' = a\sin\varphi$.

$$\rho^2 + \left(\rho_\varphi'\right)^2 = a^2\left(1-\cos\varphi\right)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2\left(1 - 2\cos\varphi + \sin^2\varphi\right) =$$

$$= a^2\left(2 - 2\cos\varphi\right) = 2a^2\left(1-\cos\varphi\right) = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$L = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2 + \left(\rho_\varphi'\right)^2}\,d\varphi = 2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\left.\vphantom{\frac{\varphi}{2}}\right|_0^{2\pi} = 8a.$$

Вычисление объемов тел вращения

Пусть в пространстве задано тело, образованное вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью OX. Объем этого тела вычисляется по формуле $V = \pi\int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$

3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Основные понятия функции двух и более переменных

Рассмотрим функции двух переменных, так как все основные понятия и теоремы, сформулированные для функций двух переменных, легко обобщаются на случай большего числа переменных.

Пусть $\{M\}$ – множество упорядоченных пар действительных чисел (x, y). Если каждой упорядоченной паре чисел $(x, y) \in \{M\}$ по некоторому закону f поставлено в соответствие единственное действительное число z, то говорят, что задана *функция двух переменных* $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$. Числа x, y называются при этом *независимыми переменными* или *аргументами* функции, а число z – *зависимой переменной*.

Например, формула $V = \pi R^2 h$, выражающая объем цилиндра, является функцией двух переменных: R – радиуса основания и h – высоты.

Пару чисел (x, y) иногда называют точкой $M(x, y)$, а функцию двух переменных – функцией точки $f(M)$.

Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют *частным значением функции двух переменных*.

Совокупность всех точек $M(x, y)$, в которых определена функция $z = f(x, y)$, называется *областью определения* этой функции. Для функции двух переменных область определения представляет собой всю координатную плоскость или ее часть, ограниченную одной или несколькими линиями.

Например, область определения функции $z = x^2 + y^2$ – вся плоскость, а функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – единичный круг с центром в начале координат ($1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$).

Понятия предела и непрерывности функции двух переменных аналогичны случаю одной переменной.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка плоскости. δ*-окрестностью* точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром в точке M_0 и радиусом δ.

Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ (или в точке $M_0(x_0, y_0)$), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$.

Обозначается предел следующим образом:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{M\to M_0} f(x, y) = A.$$

Пример 3.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

Решение. Введем обозначение $r=\sqrt{x^2+y^2}$, откуда $r^2=x^2+y^2$. При $x\to 0,\ y\to 0$ имеем, что $r\to 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{\ln(1-r^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{r\to 0}\frac{r'}{(\ln(1-r^2))'} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{1-r^2}\right)\cdot(-2r)} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2-1}{2r} = \infty.$$

Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0, y_0)$ и ее окрестности, имеет конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$, который равен значению функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, т. е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точки, в которых условие непрерывности не выполняется, называются *точками разрыва* этой функции.

3.2. Частные производные первого порядка. Полный дифференциал

Пусть задана функция двух переменных $z=f(x,y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргумент y оставим неизменным. Тогда функция z получит приращение $f(x+\Delta x, y)-f(x,y)$, которое называется *частным приращением* z по переменной x и обозначается $\Delta_x z$. Аналогично, фиксируя аргумент x и придавая аргументу y

приращение Δy, получим *частное приращение* функции z по переменной y: $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

Величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется *полным приращением* функции z в точке $M(x, y)$.

Частной производной функции двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю (если этот предел существует). Обозначается частная производная так: z'_x, z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

Таким образом, по определению имеем:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по тем же правилам и формулам, что и функция одной переменной, при этом учитывается, что при дифференцировании по переменной x y считается постоянной, а при дифференцировании по переменной y постоянной считается x.

Пример 3.2. Найти частные производные функций:

а) $z = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3$; б) $z = \dfrac{x}{y} + e^{x-2y}$;

в) $z = \arccos\dfrac{x}{y}$ $(y > 0)$; г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Решение

а) Чтобы найти z'_x, считаем y постоянной величиной и дифференцируем z как функцию одной переменной x:

$$z'_x = (x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3)'_x = (x^3)'_x - (5x^2y)'_x + (3xy^2)'_x - (y^3)'_x =$$

$$= 3x^2 - 5\cdot 2x\cdot y + 3\cdot 1\cdot y^2 - 0 = 3x^2 - 10xy + 3y^2.$$

Аналогично, считая x постоянной величиной, находим z'_y:

$$z'_y = (x^3)'_y - (5x^2 y)'_y + (3xy^2)'_y - (y^3)'_y =$$

$$= 0 - 5x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 2y - 3y^2 = -5x^2 + 6xy - 3y^2;$$

б) $z'_x = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_x + \left(e^{x-2y}\right)'_x = \dfrac{1}{y} \cdot x'_x + e^{x-2y} \cdot (x-2y)'_x = \dfrac{1}{y} + e^{x-2y};$

$z'_y = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_y + (e^{x-2y})'_y = x \cdot \left(\dfrac{1}{y}\right)'_y + e^{x-2y} \cdot (x-2y)'_y =$

$= x \cdot \left(-\dfrac{1}{y^2}\right) + e^{x-2y} \cdot (-2) = -\dfrac{x}{y^2} - 2e^{x-2y};$

в) $z'_x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}};$

$z'_y = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$

г) $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}};$

$z'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т. е.

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

Учитывая, что дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$, формулу полного дифференциала можно записать в виде

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \text{ или } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Пример 3.3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение. Так как $z'_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$, то по формуле полного дифференциала находим: $dz = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{2y}{x^2 + y^2}dy$.

3.3. Частные производные высших порядков

Частные производные z'_x и z'_y называют *частными производными первого порядка* или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка.

Частных производных второго порядка четыре. Они обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \; z''_{xy} = (z'_x)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \; z''_{yy} = (z'_y)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и более высоких порядков. Например, для функции $z = f(x, y)$ имеем:

$$z'''_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \; z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Частные производные второго или более высокого порядка, взятые по различным переменным, называются *смешанными частными производными*. Для функции $z = f(x, y)$ таковыми являются производные z''_{xy} и z''_{yx}. Заметим, что в случае, когда смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} непрерывны, то имеет место равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Пример 3.4. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 - 5x^2 y + 3xy^2 - y^3$.

Решение. Частные производные первого порядка для данной функции:

$$z'_x = 3x^2 - 10xy + 3y^2; \quad z'_y = -5x^2 + 6xy - 3y^2.$$

Дифференцируя z'_x и z'_y по переменным x и y, получим:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 - 10xy + 3y^2)'_x = 6x - 10y;$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 - 10xy + 3y^2)'_y = -10x + 6y;$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-5x^2 + 6xy - 3y^2)'_x = -10x + 6y;$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (-5x^2 + 6xy - 3y^2)'_y = 6x - 6y.$$

Пример 3.5. Найти частную производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ от функции $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + \sin y + x \sin y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = e^x(\cos y - \sin y + x \cos y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = e^x(2\cos y - \sin y + x \cos y).$$

3.4. Дифференцирование сложных функций

1. Случай одной независимой переменной

Пусть $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция двух переменных x и y, причем аргументы этой функции сами являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t: $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Тогда *сложная функция* $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ дифференцируема, и ее производная $\dfrac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Пусть теперь $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$. Тогда $z = f(x, \varphi(x))$, т. е. функция z есть функция одной переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, где роль переменной t играет x. *Полная производная* функции z по x равна

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Пример 3.6. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{2x+5y}$, где $x=\sin t$, $y=t^3$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+5y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5e^{2x+5y}$, $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$;

$$\frac{dz}{dt}=2e^{2x+5y}\cdot\cos t+5e^{2x+5y}\cdot 3t^2=e^{2\sin t+5t^3}(2\cos t+15t^2).$$

Пример 3.7. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=e^{3xy}$, а $y=\sqrt{x^2+4}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=3y\cdot e^{3xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3xe^{3xy}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$;

$$\frac{dz}{dx}=3y\cdot e^{3xy}+3x\cdot e^{3xy}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=3e^{3x\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{(2x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}.$$

2. Случай нескольких независимых переменных

Предположим теперь, что $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$. Тогда z есть *сложная функция двух независимых переменных u* и v. Частные производные этой сложной функции находят по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Эти формулы обобщаются на случай сложной функции любого конечного числа аргументов. Во всех случаях справедлива формула

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

(свойство инвариантности формы полного дифференциала).

Пример 3.8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=y^x$, $x=\frac{u}{v}$, $y=uv$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \cdot \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot y^{x-1};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = y^x \cdot \ln y \cdot \frac{1}{v} + x \cdot y^{x-1} \cdot v = \frac{(1+\ln(uv))}{v}(uv)^{\frac{u}{v}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = y^x \cdot \ln y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + x \cdot y^{x-1} \cdot u = \frac{u \cdot (1-\ln(uv))}{v^2}(uv)^{\frac{u}{v}}.$$

3.5. Неявные функции и их дифференцирование

Пусть F – дифференцируемая функция трех переменных x, y и z, и пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет z как функцию независимых переменных x и y. Частные производные этой *неявной функции* $z=z(x,y)$ в точке (x,y) вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},$$

при условии, что $F'_z(x,y,z) \neq 0$, где $z=z(x,y)$ и $F(x,y,z)=0$.

Пример 3.9. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если z определяется, как функция от x и y, из уравнения $z^3-4xy^2-2z^2+1=0$.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y,z)$. Тогда $F'_x(x,y,z)=-4y^2$, $F'_y(x,y,z)=-8xy$, $F'_z(x,y,z)=3z^2-4z$.

Отсюда получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{4y^2}{3z^2-4z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{8xy}{3z^2-4z}.$$

3.6. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, ($f(x_0, y_0) > f(x, y)$).

Точки минимума и максимума функции $z = f(x, y)$ называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции* (минимумом и максимумом соответственно).

Заметим, что минимум и максимум функции имеют локальный характер, так как значение функции в точке M_0 сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к M_0.

Теорема 1 (*необходимые условия экстремума*). Если (x_0, y_0) – точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, то ее частные производные z'_x и z'_y в этой точке равны нулю: $z'_x(x_0, y_0) = 0$, $z'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называются *критическими* или *стационарными*. В критических точках функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь.

Теорема 2 (*достаточное условие экстремума*). Пусть функция $z = f(x, y)$: а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $z'_x(x_0, y_0) = 0$ и $z'_y(x_0, y_0) = 0$; б) имеет непрерывные частные производные второго порядка $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $z''_{xy}(x_0, y_0) = B$; $z''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Тогда, если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$; если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет. В случае $\Delta = AC - B^2 = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым.

При исследовании функции двух переменных на экстремум рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти частные производные первого порядка: z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти критические точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка: z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

4. Вычислить значения частных производных второго порядка в каждой критической точке и, используя достаточные условия, сделать вывод о наличии экстремума.

5. Найти экстремумы функции.

Пример 3.10. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

Решение. 1. Находим частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = 3x^2 - 6y,\ z'_y = 3y^2 - 6x.$$

2. Для определения критических точек решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0; \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2 - 2y = 0; \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим: $y = \dfrac{x^2}{2}$. Подставляя найденное выражение для y во второе уравнение, получим:

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0,\ x^4 - 8x = 0,\ x(x^3 - 8) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Находим значения y, соответствующие значениям $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Подставляя значения $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ в уравнение $y = \dfrac{x^2}{2}$, получим: $y_1 = 0,\ y_2 = 2.$

Таким образом, имеем две критические точки: $M_1(0,0)$ и $M_2(2,2)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x;\ z''_{xy} = (3x^2 - 6y)'_y = -6;$$

$$z''_{yy} = (3y^2 - 6x)'_y = 6y.$$

4. Вычисляем значения частных производных второго порядка в каждой критической точке. Для точки $M_1(0,0)$ имеем:

$$A = z''_{xx}(0,0) = 0,\ B = z''_{xy}(0,0) = -6,\ C = z''_{yy}(0,0) = 0.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0$, то в точке M_1 экстремума нет.

В точке $M_2(2,2)$:

$$A = z''_{xx}(2,2) = 12,\ B = z''_{xy}(2,2) = -6,\ C = z''_{yy}(2,2) = 12.$$

Следовательно, $\Delta = AC - B^2 = 12 \cdot 12 - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$

Значит, в силу достаточного условия экстремума в точке M_2 функция имеет минимум, так как в этой точке $\Delta > 0$ и $A > 0$.

5. Находим значение функции в точке M_2:

$$z_{\min} = z(M_2) = z(2,2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = -8.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию этой переменной и ее производную. В общем случае эти уравнения представляют собой соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то

$$y' = f(x, y). \tag{4.1}$$

Функция $y = \varphi(x, C)$, которая обращает данное уравнение в тождество, называется *общим решением* дифференциального уравнения (4.1), где C – произвольная постоянная.

Общее решение $\Phi(x, y, C) = 0$, заданное в неявном виде, называется *общим интегралом* уравнения.

Придавая C различные численные значения, мы будем получать различные частные решения дифференциального уравнения.

4.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx = g(y)dy$$

называется *уравнением с разделенными переменными*, для решения которого достаточно проинтегрировать обе части уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{4.2}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Представим y' в виде отношения дифференциалов $\frac{dy}{dx}$. Затем умножим обе части уравнения на dx и разделим на $f_2(y)$, тогда $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$

Далее, интегрируя, получим общий интеграл уравнения (4.2) в виде

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, записанное в виде

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) также является *уравнением с разделяющимися переменными*. Перенесем второе слагаемое в левую часть равенства. Разделим обе части равенства на $N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy.$$

Далее, интегрируя, получим общий интеграл уравнения (4.3) в виде

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy + C.$$

Пример 4.1. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = (y+5)\cos x.$$

Решение. Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx}=(y+5)\cos x.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy=(y+5)\cos x\,dx,$$

затем разделим обе части уравнения на $(y+5)$:

$$\frac{dy}{y+5}=\cos x\,dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируя обе части уравнения, находим общий интеграл:

$$\int\frac{dy}{y+5}=\int\cos x\,dx,\ \ln|y+5|=\sin x+C.$$

Ответ: $\ln|y+5|=\sin x+C$.

Пример 4.2. Решить дифференциальное уравнение:

$$3e^x\sin y dx+\left(1-e^x\right)\cos y dy=0.$$

Решение. Перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$3e^x\sin y dx=-\left(1-e^x\right)\cos y dy.$$

Далее разделим обе части равенства на $\sin y\cdot\left(1-e^x\right)$:

$$\frac{3e^x}{1-e^x}dx=-\frac{\cos y}{\sin y}dy.$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int\frac{3e^x}{1-e^x}dx=-\int\frac{\cos y}{\sin y}dy.$$

Интегралы вычисляем методом подведения под знак дифференциала:

$$-\int\frac{3d(1-e^x)}{1-e^x}=-\int\frac{d(\sin y)}{\sin y},\ -3\ln\left|1-e^x\right|=-\ln|\sin y|+\ln C,$$

$$\ln\left(1-e^x\right)^{-3} = \ln\left(\frac{C}{\sin y}\right), \text{ отсюда } \frac{1}{\left(1-e^x\right)^3} = \frac{C}{\sin y}, \text{ или } C = \frac{\sin y}{\left(1-e^x\right)^3}.$$

Ответ: $C = \dfrac{\sin y}{\left(1-e^x\right)^3}$.

4.2. Однородные уравнения первого порядка

По определению, $f(x, y)$ есть *однородная функция* n*-го измерения*, если выполняется тождество $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

Уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения.

Пусть уравнение задано в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Оно будет однородным, если $M(x, y)$, $N(x, y)$ являются однородными функциями одного измерения.

Однородное дифференциальное уравнение с помощью подстановки $u = \dfrac{y}{x}$ (откуда $y' = u'x + u$) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4.3. Решить уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$.

Решение. Введем подстановку $u = \dfrac{y}{x}$, отсюда $y' = u'x + u$. Подставляем в данное уравнение:

$$u'x + u - u = e^u,\ u'x = e^u.$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{du}{dx}x = e^u,\ \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{e^u} = \int\frac{dx}{x},\ -e^{-u} = \ln|x| + C.$$

В последнее выражение вместо u подставим значение $\dfrac{y}{x}$. Получим общий интеграл: $-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$.

Ответ: $-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$.

Пример 4.4. Решить дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$$

Решение. Убедимся, что данное уравнение является однородным. Для этого числитель и знаменатель дроби в правой части разделим на x^2:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 + \frac{y}{x}}.$$

Введем подстановку $u = \frac{y}{x}$, отсюда $y' = u'x + u$. Подставляем в уравнение:

$$u'x + u = \frac{u + u^2}{2 + u},\ u'x = \frac{u + u^2}{2 + u} - u,\ u'x = -\frac{u}{2 + u}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{u}{2 + u},\ \frac{2 + u}{u}du = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{2 + u}{u}du = \int\left(\frac{2}{u} + \frac{u}{u}\right)du = 2\int\frac{du}{u} + \int du = 2\ln|u| + u + C,$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Таким образом, получаем:

$$2\ln|u| + u = -\ln|x| + \ln C,\ \ln u^2 + u = \ln\frac{C}{x},\ u = \ln\frac{C}{u^2 x}.$$

С учетом $u = \frac{y}{x}$ получаем общий интеграл уравнения $\frac{y}{x} = \ln\frac{Cx}{y^2}$.

Ответ: $\frac{y}{x} = \ln\frac{Cx}{y^2}$.

4.3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется *линейным*, а уравнение $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ (где $n \neq 0$, $n \neq 1$) называется *уравнением Бернулли.* В обоих случаях общее решение может быть найдено в виде $y = u(x) \cdot v(x)$. Выбор функций $u(x)$ и $v(x)$ поясним на следующих примерах.

Пример 4.5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + \dfrac{3y}{x} = x^2$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Решение ищем в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя выражения для y и y' в уравнение, получим

$$u'v + uv' + \frac{3uv}{x} = x^2 \text{ или } u'v + u\left(v' + \frac{3v}{x}\right) = x^2.$$

Выберем такое частное решение для v, чтобы выражение, стоящее в скобках, обратилось в нуль. Тогда уравнение примет вид $u' \cdot v = x^2$.

Решаем последовательно два уравнения:

$$\text{а) } v' + \frac{3v}{x} = 0, \frac{dv}{dx} = -\frac{3v}{x}, \ \frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x}, \ \int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -3\ln|x|, \text{ отсюда } v = x^{-3};$$

$$\text{б) } u' \cdot v = x^2 \text{ или } \frac{du}{dx} \cdot x^{-3} = x^2;$$

значит, $du = x^5 dx$, $u = \int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$.

Так как $y = u \cdot v$, то ответ записываем в виде $y = \left(\dfrac{x^6}{6} + C\right) \cdot x^{-3}$.

Ответ: $y = \left(\dfrac{x^6}{6} + C\right) \cdot x^{-3}$.

Пример 4.6. Найти общее решение уравнения $y' - 4x^3 y = 2x \cdot e^{x^4}$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Будем искать общее решение в виде $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u'v + uv' - 4x^3uv = 2xe^{x^4}, \; u'v + u\left(v' - 4x^3v\right) = 2xe^{x^4}.$$

Выберем функцию $v = v(x)$ из условия $v' - 4x^3v = 0$. Найдем частное решение этого уравнения:

$$\frac{dv}{dx} - 4x^3v = 0, \; \frac{dv}{dx} = 4x^3v, \; \frac{dv}{v} = 4x^3dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int 4x^3dx, \; \ln|v| = x^4, \text{ тогда } v = e^{x^4}.$$

Найдем функцию $u(x)$:

$$u'e^{x^4} = 2xe^{x^4}, \; u' = 2x, \; u = \int 2x\,dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v = \left(x^2 + C\right)e^{x^4}.$$

Ответ: $y = \left(x^2 + C\right)e^{x^4}$.

Пример 4.7. Найти решение задачи Коши:

$$y' - \frac{4y}{x} = x \cdot \sqrt{y}, \; y(1) = 1.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Будем решать его с помощью подстановки $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x \cdot \sqrt{uv}, \; u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x \cdot \sqrt{uv}.$$

Функцию v найдем из уравнения:

$$v' - \frac{4v}{x} = 0, \; \frac{dv}{dx} = \frac{4v}{x}, \; \frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx, \; \int \frac{dv}{v} = 4\int \frac{1}{x}dx,$$

$$\ln|v| = 4\ln|x|, \text{ тогда } v = x^4.$$

Найдем функцию u:

$$u'v = x \cdot \sqrt{uv}\,,\ u' \cdot x^4 = x \cdot \sqrt{u \cdot x^4}\,,\ \frac{du}{dx} \cdot x^4 = x \cdot \sqrt{u} \cdot x^2,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x},\ 2\sqrt{u} = \ln|x| + C,\ u = \frac{1}{4}\left(\ln|x| + C\right)^2.$$

Подставляя найденные значения u и v в $y = u \cdot v$, получим общее решение данного уравнения: $y = \frac{1}{4}x^4\left(\ln|x| + C\right)^2$.

Найдем теперь решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$. Подставляя в общее решение $x = 1$, $y = 1$, получим $C = 2$. Таким образом, решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, имеет вид $y = \frac{1}{4}x^4\left(\ln|x| + 2\right)^2$.

Ответ: $y = \frac{1}{4}x^4\left(\ln|x| + 2\right)^2$.

4.4. Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (4.4)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. левая часть (4.4) представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$. Эту функцию можно найти, решив систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y); \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Так как в силу (4.4) $dU(x, y) = 0$, то общий интеграл уравнения равен $U(x, y) = C$.

Пример 4.8. Решить уравнение

$$\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Решение. Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y+\sin x,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y+\sin x.\ \text{Итак, } \frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{dx}.$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=P=\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x};\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q=x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}.\end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы:

$$U=\int\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx=x\sin y-y\cos x+\ln|x|+\varphi(y).$$

Продифференцируем полученную функцию U по переменной y и сравним со вторым уравнением системы:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x\cos y-\cos x+\varphi'(y)=x\cos y-\cos x+\frac{1}{y},$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y},\ \varphi(y)=\int\frac{1}{y}dy=\ln|y|+C.$$

Таким образом, $U=x\sin y-y\cos x+\ln|x|+\ln|y|+C$.

Поэтому общий интеграл дифференциального уравнения согласно (4.4) равен

$$x\sin y-y\cos x+\ln|x|+\ln|y|=C.$$

Ответ: $x\sin y-y\cos x+\ln|x|+\ln|y|=C$.

4.5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Понижение порядка

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решают путем n-кратного интегрирования.

2. Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$, явно не содержащее искомой функции $y(x)$, решают с помощью замены $y' = p$. Тогда $y'' = p'$, где $p = p(x)$.

3. Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, явно не содержащее независимой переменной x, интегрируют с помощью подстановки $y' = p$, где $p = p(y)$. Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Пример 4.9. Решить уравнение $y'' = x^2$.

Решение. Правая часть данного уравнения есть функция только переменной x, поэтому оно решается двукратным интегрированием:

$$y' = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx = \frac{1}{3}\int x^3 dx + C_1\int dx = \frac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + C_2$.

Пример 4.10. Решить уравнение $(x-3)y'' + y' = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Делаем замену $y' = p$. Тогда $y'' = p'$. Подставляем выражения для y' и y'' в данное уравнение:

$$(x-3)p' + p = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$(x-3)\frac{dp}{dx} + p = 0,\ (x-3)\frac{dp}{dx} = -p,\ \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x-3},$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dx}{x},\ \ln|p| = -\ln|x| + \ln C_1, \text{ отсюда } \ln|p| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|,\ p = \frac{C_1}{x}.$$

Возвращаясь к первоначальной переменной y, получим уравнение

$$y' = \frac{C_1}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$y = \int \frac{C_1}{x} dx = C_1 \ln|x| + C_2.$$

Ответ: $y = C_1 \ln|x| + C_2$.

Пример 4.11. Решить задачу Коши для уравнения $y'' = 2y^3$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение не содержит явно x. Полагая $y' = p$, получаем $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, где $p = p(y)$. Тогда уравнение принимает вид $p\dfrac{dp}{dy} = 2y^3$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$pdp = 2y^3 dy, \ \int pdp = \int 2y^3 dy,$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^4}{2} + \frac{C_1}{2}, \ p^2 = y^4 + C_1 \text{ или } p = y' = \sqrt{y^4 + C_1}.$$

Для определения C_1 воспользуемся начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Тогда $1 = \sqrt{1 + C_1}$ и $C_1 = 0$. Получаем:

$$y' = \sqrt{y^4}, \ \frac{dy}{dx} = y^2, \ \frac{dy}{y^2} = dx, \ \int \frac{dy}{y^2} = \int dx.$$

Отсюда: $-\dfrac{1}{y} = x + C_2$.

При заданных начальных условиях $C_2 = -1$ и искомое частное решение будет $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

4.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (4.5)$$

где a, b, c – const ($a \neq 0$), называется дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным* дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами: $ay'' + by' + cy = 0$.

Последнее уравнение можно привести к виду

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (4.6)$$

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется характеристическим уравнением для (4.6). В зависимости от корней характеристического уравнения получаем общее решение уравнения (4.6) в виде (табл. 1).

Таблица 1

Корни характеристического уравнения	**Общее решение однородного линейного уравнения**
1. $k_1 \neq k_2$ – действительные	$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $k_1 = k_2 = k$	$y_0 = e^{kx}(C_1 + C_2 \cdot x)$
3. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексные	$y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример 4.12. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 3y' - 10y = 0.$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 3k - 10 = 0$, $D = 9 + 40 = 49 > 0$, тогда $k_{1,2} = \dfrac{3 \pm 7}{2}$ или $k_1 = -2$, $k_2 = 5$. Так как корни характеристического уравнения действительные различные, то общее решение уравнения: $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$.

Ответ: $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$.

Пример 4.13. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 9 = 0$, $D = 36 - 36 = 0$, тогда $k_1 = k_2 = 3$. Так как корни характеристического уравнения действительные равные, то общее решение уравнения: $y_0 = e^{3x}(C_1 + C_2 \cdot x)$.

Пример 4.14. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 13 = 0$, $D = 36 - 52 = -16 < 0$. Тогда $k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$, т. е. $\alpha = -3$, $\beta = 2$. Так как корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, то общее решение уравнения: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

4.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Если в уравнении (4.5) $f(x) \neq 0$, то оно называется неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = y_0 + y_{\text{н}}, \tag{4.7}$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного линейного уравнения; $y_{\text{н}}$ – частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Частное решение $y_{\text{н}}$ неоднородного уравнения определяется в зависимости от вида функции $f(x)$ по следующим правилам (табл. 2).

Таблица 2

I $f(x) = P_n(x)e^{ax}$	**II** $f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)$
1. Если a не является корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{н}} = Q_n(x)e^{ax}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами	1. Если $(a \pm bi)$ не являются корнями характеристического уравнения, то $y_{\text{н}} = e^{ax}\left(R_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right)$, где $R_N(x)$, $T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max(m, n)$ с неопределенными коэффициентами
2. Если a является корнем характеристического уравнения кратности s, то $y_{\text{н}} = x^s Q_n(x)e^{ax}$	2. Если $(a \pm bi)$ являются корнями характеристического уравнения, то $y_{\text{н}} = xe^{ax}\left(R_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right)$

Напомним, что многочлены степени 0, 1, 2 с неопределенными коэффициентами имеют вид: $Q_0 = A$, $Q_1 = Ax + B$, $Q_2 = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – неопределенные коэффициенты, которые надо найти.

Пример 4.15. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' - 3y = (8x+1)e^x.$$

Решение. Решение данного уравнения представляется в виде $y = y_0 + y_н$. Найдем общее решение y_0 однородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 3y = 0$. Выпишем и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k - 3 = 0$, $D = 4 + 12 = 16 > 0$, $k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$, $k_1 = -3$, $k_2 = 1$. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y_0 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Правая часть уравнения $f(x) = (8x+1)e^x$ относится к типу I (см. табл. 2), причем $P_n(x) = 8x + 1$, $a = 1$. Так как $a = 1$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_н = x(Ax + B)e^x$. Тогда

$$y_н' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = e^x(2Ax + B + Ax^2 + Bx),$$

$$y_н'' = e^x(2Ax + B + Ax^2 + Bx) + e^x(2A + 2Ax + B) =$$

$$= e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2B).$$

Подставим $y_н$, $y_н'$, $y_н''$ в исходное уравнение:

$$e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2B) + 2e^x(2Ax + B + Ax^2 + Bx) -$$

$$-3x(Ax + B)e^x = (8x+1)e^x,\ 8Ax + 4B + 2A = 8x + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B:

$$x^1 : 8A = 8$$

$$x^0 : 4B + 2A = 1.$$

Находим $A = 1$, $B = -\dfrac{1}{4}$. Тогда $y_н = x\left(x - \dfrac{1}{4}\right)e^x$. Общее решение исходного уравнения: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + x\left(x - \dfrac{1}{4}\right)e^x$.

Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + x\left(x - \dfrac{1}{4}\right)e^x$.

Пример 4.16. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' = \cos 2x + 8\sin 2x.$$

Решение. Решение данного уравнения представляется в виде $y = y_0 + y_н$. Найдем общее решение y_0 однородного дифференциального уравнения

$$y'' + y' = 0,\ k^2 + k = 0,\ k(k+1) = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Функция $f(x) = \cos 2x + 8\sin 2x$ относится к типу II (см. табл. 2), где $P_n(x) = 1$, $Q_m(x) = 8$, $a = 0$, $b = 2$.

Так как числа $a \pm bi = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то $y_н$ нужно искать в виде

$$y_н = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Тогда

$$y_н' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,\ y_н'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставляя выражения для $y_н'$, $y_н''$ в исходное уравнение, получим
$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x = \cos 2x + 8\sin 2x.$
Итак, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -4A + 2B = 1; \\ -4B - 2A = 8. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим $A = -1$, $B = -\dfrac{3}{2}$. Тогда

$$y_н = -\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - \cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \cos 2x - \dfrac{3}{2}\sin 2x.$

4.8. Системы дифференциальных уравнений

Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений, является *метод исключения*, который позволяет систему n дифференциальных уравнений первого порядка свести к одному дифференциальному уравнению n-го порядка.

Пример 4.17. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y; \\ y' = -x + 2y, \text{где } x = x(t), y = y(t). \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение по переменной t: $x'' = 3x' - 2y'$. Подставим в полученное уравнение значение y', взятое из второго уравнения системы. Получаем $x'' = 3x' - 2(-x + 2y)$. Из первого уравнения системы выразим y: $y = \dfrac{x' - 3x}{-2}$. Тогда уравнение $x'' = 3x' - 2(-x + 2y)$ можно переписать в виде:

$$x'' = 3x' - 2\left(-x + 2\left(\frac{x' - 3x}{-2}\right)\right),\ x'' - 5x' + 4x = 0.$$

Полученное уравнение является однородным линейным уравнением второго порядка. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 5k + 4 = 0,\ D = 25 - 16 = 9 > 0,\ k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2},\ k_1 = 1,\ k_2 = 4.$$

Тогда $x = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

Найдем y: $y = \dfrac{x' - 3x}{-2}$, $y = \dfrac{\left(C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}\right) - 3\left(C_1 e^x + C_2 e^{4x}\right)}{-2}$,

$$y = C_1 e^x - \frac{1}{2} C_2 e^{4x}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$x = C_1 e^x + C_2 e^{4x},\ y = C_1 e^x - \frac{1}{2} C_2 e^{4x}.$$

Ответ: $x = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$, $y = C_1 e^x - \dfrac{1}{2} C_2 e^{4x}$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2} dx$;

в) $\int x(3x^2+4)^3 dx$; г) $\int (x+1)\sin 2x dx$;

д) $\int \frac{dx}{4x^2-x+1}$; е) $\int \cos^2 9x\, dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y=1$, $x=0$.

3. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z = z(x, y)$:

а) $z = \ln(x + x^2 + y^2)$; б) $z = \ln(\sqrt{x} + y^2)$.

4. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$z = x\sin y + \cos x$, где $x = u+1$, $y = uv$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$:

$z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$.

6. Решить дифференциальное уравнение:

а) $(y-3)dx + x^2 dy = 0$; г) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

б) $(x^2 + y^2)dy - 2xydx = 0$; д) $y''' = e^{2x}$;

в) $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$; е) $y'' + 4y = \sin x$.

Ответы: **1**. а) $2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$; б) $\frac{\operatorname{arctg}^5 x}{5} + C$; в) $\frac{(3x^2+4)^4}{24} + C$; г) $-\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; д) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{8x-1}{\sqrt{15}} + C$; е) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{18}\sin 8x\right) + C$; **2**. 0,75. **5.** $z_{\max} = z(M_1) = z(1, -4) = -14$;

6. а) $y-3 = Ce^{\frac{1}{x}}$; б) $y = C(y^2 - x^2)$; в) $y = x^4 - x^2$; г) $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$; д) $y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$; е) $y = \frac{1}{3}\sin x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

Вариант 2

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(x+1)dx}{4+x^2}$; б) $\int \frac{\sin 2x}{1-2\cos 2x}dx$;

в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; г) $\int (1-2x)\cos x dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-1}}$; е) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

2. Вычислить длину дуги линии $\rho = 3\sin\varphi$ ($0 \le \varphi \le \pi$).

3. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z = z(x, y)$.

а) $z = (x-2y)^2$; б) $z = e^{x+2y^2}$.

4. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$z = x\sin(x+y)$, где $x = v - uv$, $y = u + v^2$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$:

$z = 6x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 3y$.

6. Решить дифференциальное уравнение:

а) $x^2dy - \frac{1}{2y^3}dx = 0, y(-1) = 1$; г) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0;$;

б) $(x-y)dx + xdy = 0$; д) $y'' = x + \sin x$;

в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; е) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$.

Ответы: **1**. а) $\frac{1}{2}\left(\ln\left(4+x^2\right) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C$; б) $\frac{1}{4}\ln\left|1-2\cos 2x\right| + C$;

в) $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$; г) $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x-1}\right| + C$; д) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right| + C$;

2. 3π; **5**. Экстремума нет; **6**. а) $y^2 = \frac{x}{1+2x}$; б) $xe^{\frac{y}{x}} = C$;

в) $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$; г) $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$; д) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$;

е) $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x\right) + 3x^2e^{2x}$.

Вариант 3

1. Вычислить неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{3dx}{\sqrt{3+5x^2}}$; б) $\int \frac{xdx}{2-5x^2}$;

в) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; г) $\int xe^{2x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{-x^2+2x+1}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{x\left(2+\sqrt{x}\right)}dx.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2+1$ и прямой $x+y=3$.

3. Записать полный дифференциал функции $z = z(x, y)$.

а) $z = \frac{x+y}{x-y}$; б) $z = x\sin 2y - y^2$.

4. Вычислить производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции.

$z = e^{4xy}$, где $x = \cos(1-t)$, $y = \sin t$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$.

$z = 3x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x - y.$

6. Решить дифференциальное уравнение

а) $x^3dy - y^3dx = 0, y(1) = 2$; г) $\left(2-9x^2y^2\right)dx + \left(4y^3-6x^3y\right)dy = 0$;

б) $xy' - y = x\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$; д) $xy'' = 2x - y'$;

в) $y' - \frac{2y}{x} = x^2+1$; е) $y'' - 2y' = x+3$.

Ответы: **1**. а) $\frac{3}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x + \sqrt{3+5x^2}\right| + C$; б) $-\frac{1}{10}\ln\left|2-5x^2\right| + C$;
в) $-\frac{1}{2\ln^2|x|} + C$; г) $\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$; д) $2\ln\left|2+\sqrt{x}\right| + C$; **2**. $\frac{35}{6}$;
5. $z_{\min} = z(M_1) = z(1,1) = -2$; **6**. а) $y^2 = \frac{4x^2}{3x^2+4}$; б) $y = x\arcsin Cx$;
в) $y = x^2\left(x - \frac{1}{x} + C\right)$; г) $2x - 3x^3y^2 + y^4 = C$; д) $y = \frac{x^2}{2} + C_1\ln|x| + C_2$;
е) $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x.$

Вариант 4

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\cos^2(2-3x)}$;　　б) $\int \frac{\ln^3 2x+1}{2x}dx$;

в) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;　　г) $\int (1-x)e^{3x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$;　　е) $\int \cos 2x \cos x dx$.

2. Вычислить длину дуги лини, заданной уравнениями $x = 7(t-\sin t)$, $y = 7(1-\cos t)$, $2\pi \le t \le 4\pi$.

3. Записать полный дифференциал функции $z = z(x, y)$:

а) $z = \ln(x^5 + \ln y)$;　　б) $z = e^{\frac{y}{x-y}}$.

4. Вычислить производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции:

$z = \mathrm{tg}(x + 2x^2 - y)$, где $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$:

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 10.$$

6. Решить дифференциальное уравнение:

а) $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$;　　г) $(2xy-3)dx + (x^2+1)dy = 0$;

б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$;　　д) $xy'' = y'$;

в) $y' - y\mathrm{tg}x = -y^2 \cos x$;　　е) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1, y'(0) = 1$.

Ответы: **1**. а) $-\frac{1}{3}\mathrm{tg}(2-3x) + C$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^4 2x}{4} + \ln x\right) + C$;

в) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$; г) $\frac{1}{3}e^{3x}(1-x) + \frac{1}{9}e^{3x} + C$; д) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$;

е) $\frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C$; **2**. 56; **5.** $z_{\min} = z(M_1) = z(6,6) = -422$;

6. а) $\frac{(2/3)^x}{\ln(2/3)}-\frac{18^{-y}}{\ln 18}=C$; б) $\operatorname{arctg}\frac{y}{2x}=2\ln x+C$; в) $y=\frac{1}{(x+C)\cos x}$;

г) $x^2y-3x+y=C$; д) $y=\frac{C_1x^2}{2}+C_2$; е) $y=-6e^{3x}+22xe^{3x}+x^2-3x+5$.

Вариант 5

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\sqrt[3]{2+x^2}\cdot xdx$; б) $\int 2\cos 2x\sin^3 2xdx$;

в) $\int\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$; г) $\int\ln(2x+1)dx$;

д) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; е) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=6$, $x+y-7=0$.

3. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z=z(x,y)$:

а) $z=x\sin(xy^2)$; б) $z=5x^3y^2+\cos(xy)$.

4. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$ сложной функции:

$z=\operatorname{arctg}(x^2y)$, где $y=\sqrt{x}$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=z(x,y)$:

$z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

6. Решить дифференциальное уравнение:

а) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx,\ y(0)=0$;

б) $y'=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$;

в) $y'+\frac{6xy}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^4}$;

г) $\frac{1}{x}dy-\frac{y}{x^2}dx=0$;

д) $y''=\frac{1}{x^2},\ y(1)=3,\ y'(1)=1$;

е) $y''+6y'+8y=8x+6$.

Ответы: **1**. а) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2+x^2)^4}+C$; б) $\frac{\sin^4 2x}{4}+C$;

в) $\ln\left|\ln(x+2)\right|+C$; г) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left|2x+1\right|-x+C$;

д) $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C$; е) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$;

2. $17{,}5-6\ln 6$; **5**. $z_{\min}=z(M_1)=z(1,0)=-1$; **6**. а) $\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\mathrm{arctg}\left(e^x\right)$;

б) $y=\dfrac{x}{C+\ln x}$; в) $y\left(x^2+1\right)^3=\mathrm{arctg}x+C$; г) $y/x=C$;

д) $y=1+2x-\ln x$; е) $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}+x$.

ВАРИАНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. Рациональная дробь $P_n(x)/Q_m(x)$ называется правильной, если:
а) $n=m$; б) $n>m$; в) $n<m$; г) $n\le m$; д) $n=5$.

2. Универсальная тригонометрическая подстановка $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$ применяется при вычислении неопределенных интегралов вида:
а) $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$; б) $\int\ln x dx$; в) $\int x\sin x dx$; г) $\int\dfrac{dx}{3+5\cos x}$; д) $\int 0\cdot dx$.

3. Какие из перечисленных интегралов являются определенными:
а) $\int\sqrt[3]{x^4}\,dx$; б) $\int(x^2+1)dx$; в) $\int\limits_0^1\sin x dx$; г) $\int f(x)dx$; д) $\int 10dx$.

4. Найти в перечисленных пунктах формулу Ньютона–Лейбница:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx=\left(f(a)-f(b)\right)$;

б) $\int\limits_a^b f(x)dx=\left(f(b)-f(a)\right)$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx=f(x)+C$;

г) $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$;

д) $\int\limits_a^b f(x)dx=b-a$.

5. Площадь S плоской криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = 1 - x^2$, а снизу осью Ox, вычисляется с помощью формулы:

а) $S = \int x^2 dx$; б) $S = \dfrac{d(x^2)}{dx}$; в) $S = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2) dx$; г) $S = d(1 - x^2)$; д) $S = (1 - x^2)$.

6. Длина дуги L кривой $y = 2x$ между точками $A(0, 0)$ и $D(1, 2)$ вычисляется следующим образом:

а) $L = (2x)' = 2$;

б) $L = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$;

в) $L = (2x)' - (1)' = 2x' - 0 = 2$;

г) $L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 2^2}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{5}\, dx = \sqrt{5} \cdot \int\limits_0^1 dx = \sqrt{5} \cdot 1 - \sqrt{5} \cdot 0 = \sqrt{5}$;

д) $L = \int\limits_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$.

7. Первообразная для функции $f(x) = x$ равна:

а) $x' = 1$; б) $2x' = 2$; в) $\dfrac{x^2}{3}$; г) $\dfrac{x^2}{2}$; д) 0.

8. Выбрать интеграл, который вычисляются с помощью метода внесения функции под знак дифференциала:

а) $\int x \ln x dx$; б) $\int \sin^2 x dx$; в) $\int \sqrt{x^2 + 1}\, x\, dx$; г) $\int \sqrt{x^2 + 1}\, dx$; д) $\int 0\, dx$.

9. Значение интеграла $\int\limits_0^{\pi} \cos x dx$ равно:

а) $\sin x$; б) $\sin x dx$; в) 2; г) 1; д) 0.

10. Функцию $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ называют:

а) рациональной;

б) линейной;

в) иррациональной;

г) гиперболической;

д) тригонометрической.

11. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = 5x^2 y - y^3$ равна:

а) $10x$; б) $2xy$; в) $10xy$; г) $5x^2 - 3y^2$; д) $-3y^2$.

12. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \sin(xy^2)$ равна:

а) $2xy\cos(xy^2)$; б) $\cos(xy^2)$; в) $y^2\cos(2xy)$; г) $\cos(2xy)$; д) $2xy$.

13. Точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической для функции $z = z(x, y)$, если:

а) $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0$; б) $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0$; в) $dz(x, y) = 0$; г) $\begin{cases} z'_x(M_0) = 0 \\ z'_y(M_0) = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases}$

14. Стационарная точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой минимума для функции $z = z(x, y)$, если:

а) $\Delta = 0$, $z''_{xx}(M_0) > 0$; б) $\Delta \geq 0$, $z''_{xx}(M_0) < 0$; в) $\Delta > 0$, $z''_{xx}(M_0) > 0$; г) $\Delta < 0$, $z''_{yy}(M_0) > 0$; д) $\Delta > 0$, $z''_{xx}(M_0) = 0$.

15. Стационарная точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой максимума для функции $z = z(x, y)$, если:

а) $\Delta = 0$, $z''_{xx}(M_0) > 0$; б) $\Delta \geq 0$, $z''_{xx}(M_0) < 0$; в) $\Delta > 0$, $z''_{xx}(M_0) > 0$; г) $\Delta < 0$, $z''_{yy}(M_0) > 0$; д) $\Delta > 0$, $z''_{xx}(M_0) < 0$.

16. Смешанная частная производная второго порядка для функции $z = -3x + x^2 y$ равна:

а) $2x$; б) $2y$; в) 0; г) $-3 + 2x$; д) $-3 + 2y$.

17. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными является уравнение вида:

а) $y' = f_1(x) f_2(y)$;

б) $y' = f_1(x) + f_2(y)$;

в) $y' + P(x)y = Q(x)$;

г) $P(x) = Q(x)$;

д) $f_1(x) = f_2(y)$.

18. Общим решением некоторого дифференциального уравнения является функция $y = Cx^2$. Тогда частным решением этого уравнения, удовлетворяющим начальным условиям $y(1) = 2$, является:

а) $y = 0$; б) $y = Cx^2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x + 2$; д) $y = x^3$.

19. Общим решением дифференциального уравнения $dx - \sin^2 x\, dy = 0$ является:

а) $y = 0$; б) $x = \pi$; в) $y = \sin x$; г) $y = -\mathrm{ctg}\, x + C$; д) $y = x + 5$.

20. Укажите порядок дифференциального уравнения $y' = y'' + x^4$:

а) 4; б) 3; в) 2; г) 1; д) 0.

21. Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$ имеет вид:

а) $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$;

б) $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;

в) $y_0 = \sin x$;

г) $y_0 = e^{2x}(C_1 + C_2)$;

д) $y_0 = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.

22. Укажите уравнение второго порядка:

а) $y' = 2 + x$; б) $y'' + 4y = x$; в) $y = 2$; г) $x = 2$; д) $y''' = \sin 2x$.

23. Общее решение дифференциального уравнения $y' = 2x$ имеет вид:

а) $y = x^2 + C$; б) $y = 2$; в) $y = 2 + C$; г) $y' = 0$; д) $C = x^2$.

24. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни:

а) $k_1 = -1, k_2 =$; б) $k_1 = k_2 = 2$; в) $k_1 = 1, k_2 = 3$; г) $k = 0$; д) $k_{1,2} = \sin x$.

25. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка может быть найдено в виде:

а) $y = x + u(x)$; б) $y = u + v$; в) $y = 2vC$; г) $y = x / u$; д) $y = uv$.

Ответы: 1) в; 2) г; 3) в; 4) г; 5) в; 6) г; 7) г; 8) в; 9) д; 10) в; 11) в; 12) а; 13) г; 14) в; 15) д; 16) а; 17) а; 18) в; 19) г; 20) в; 21) д; 22) б; 23) а; 24) б; 25) д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович, А. И. Математический анализ : справ. пособие : в 2 ч. Ч. 1 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. шк., 1989. – 287 с.
2. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – 349 с.
3. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 429 с.
5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2004. – 270 с.
7. Высшая математика : электрон.-метод. комплекс / О. А. Кастрица [и др.]. – 2010. – Режим доступа: http://www.edu.by.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Бородин Николай Николаевич
Гойко Владимир Иосифович
Дегтярева Екатерина Александровна

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. В. Гладкова*
Компьютерная верстка *Е. Б. Ящук*

Подписано в печать 27.05.13.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,02.
Изд. № 65.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр
Учреждения образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48