

УДК 519.711.2

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ, СТРУКТУРНО ИДЕНТИЧНЫХ МЕХАНИЗМУ НАВЕСКИ УНИВЕРСАЛЬНОГО ЭНЕРГОСРЕДСТВА

В. Б. ПОПОВ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Введение

Ряд механизмов агрегатирования в сельскохозяйственных машинах структурно идентичны, что позволяет использовать разработанное ранее математическое описание. Так, например, в навесном кормоуборочном комбайне «Полесье-1400» поворот силосопровода гидроцилиндром и удержание большей части веса адаптера блоком пружин выполняется механизмами, структурно идентичными механизму навески переднего подъемно-навесного устройства универсального энергосредства [1].

Постановка задачи анализа

Проецируя пространственную схему этих механизмов в первом случае на продольно-горизонтальную, а во втором – на продольно-вертикальную плоскости получаем плоские рычажные механизмы (ПРМ). Таким образом, практически не снижая точности результатов анализа, понижается порядок описывающей математической модели. Анализ структуры данных распространенных ПРМ показывает, что в обоих случаях имеем шестизвенник (рис. 1а, 1б), в основе которого лежит четырехзвенник ABC , причем два его звена (L_1, L_2) относятся к гидроцилиндру либо к блоку пружин.

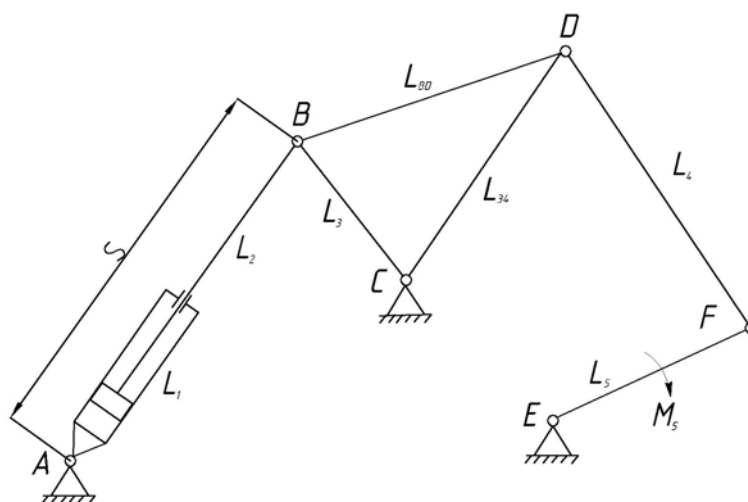


Рис. 1а. Структурная схема механизма поворота силосопровода

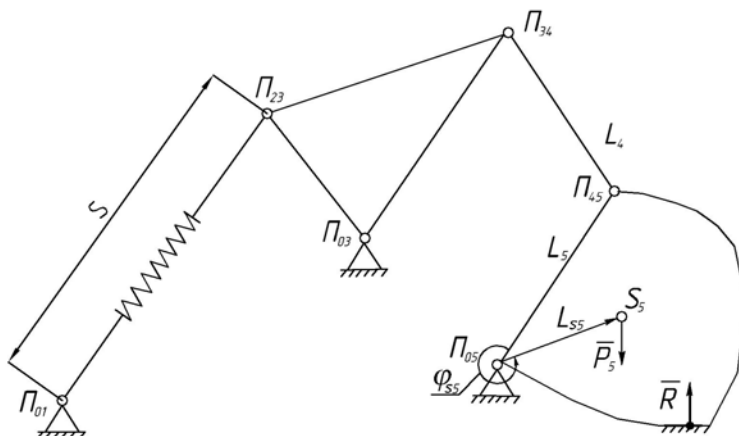


Рис. 1б. Структурная схема механизма вывешивания адаптера

К четырехзвеннику присоединяется группа из двух звеньев, последнее звено которой L_5 моделирует силосопровод или адаптер. Звенья полученного ПРМ считаются абсолютно жесткими, поэтому в результате имеем механизм с одной степенью свободы, которой соответствует обобщенная координата S . Геометрия четырехзвенника $\Pi_{01}\Pi_{23}\Pi_{03}$ (рис. 2) определяется базой $L_0 = \text{const}$, углом ее наклона к горизонту $\gamma = \text{const}$ и плечом $L_3 = \text{const}$. При смещении поршня (растяжении пружины) изменяется обобщенная координата S , а также углы α и β . Связь между переменными в $\Pi_{01}\Pi_{23}\Pi_{03}$ определяется из соотношений:

$$\cos \alpha = \frac{S^2 + L_0^2 - L_3^2}{2 \cdot S \cdot L_0}; \quad \cos \beta = \frac{L_0^2 + L_3^2 - S^2}{2 \cdot L_0 \cdot L_3}. \quad (1)$$

Аналитическое исследование ПРМ выполняется по методу замкнутого векторного контура [2]. Геометрические соотношения в четырехзвеннике $\Pi_{01}\Pi_{23}\Pi_{03}$ определяются из соотношений:

$$\varphi_{12}(S) = \gamma + \alpha(S); \quad \varphi_3(S) = \pi + \gamma - \beta(S).$$

В результате определяются координаты интересующих точек, например:

$$X_{34} = X_{03} + L_{34} \cdot \cos \varphi_{34}(S); \quad Y_{34} = Y_{03} + L_{34} \cdot \sin \varphi_{34}(S). \quad (2)$$

Кинематические параметры четырехзвенника $\Pi_{01}\Pi_{23}\Pi_{03}$ выражаются через аналоги угловых скоростей звеньев, которые получают в результате дифференцирования соответствующего угла по обобщенной координате S , например:

$$\frac{d\varphi_3}{dS} = \varphi'_3 = \frac{2 \cdot S}{\sqrt{\{4 \cdot L_0^2 \cdot L_3^2 - [S^2 - (L_0^2 + L_3^2)]\}^2}}; \quad \varphi'_{12} = \frac{L_3^2 + S^2 - L_0^2}{S \sqrt{\{4 \cdot S^2 \cdot L_3^2 - [S^2 - (L_0^2 + L_3^2)]\}^2}}. \quad (3)$$

В роли обобщенной координаты для четырехзвенника $\Pi_{03}\Pi_{34}\Pi_{45}\Pi_{05}$ удобно использовать угол φ_{34} . Векторы-звенья L_{34}, L_4, L_5 проецируются на оси X, Y в локальной системе координат $X'\Pi_{03}Y'$, повернутой относительно глобальной системы координат $X\Pi_{01}Y$ на угол T :

$$T = \arcsin \left[\frac{Y_{03} - Y_{05}}{L_{01}} \right].$$

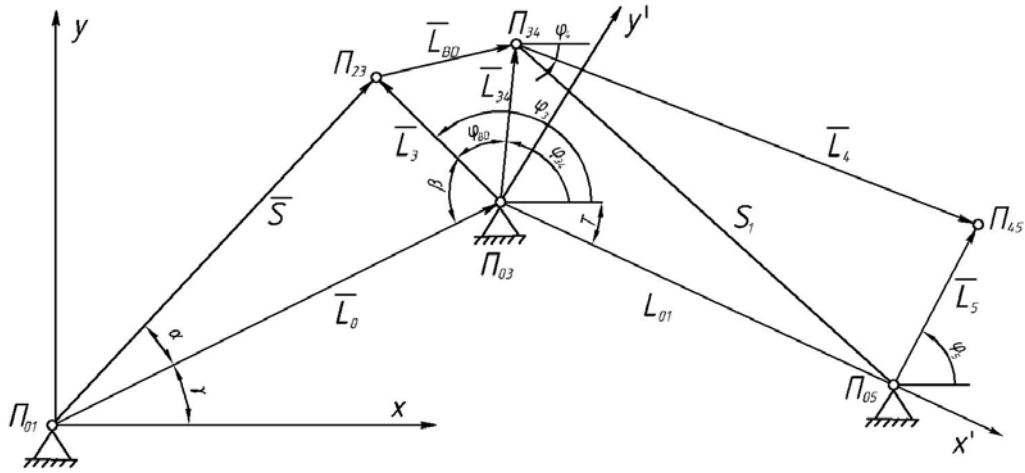


Рис. 2. Геометрические параметры плоского рычажного механизма

При этом ось OX в локальной системе координат обязательно проходит через базу четырехзвенника. $\Pi_{03}\Pi_{34}\Pi_{45}\Pi_{05}$:

$$L_{01} = \left[(X_{03} - X_{05})^2 + (Y_{03} - Y_{05})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В результате для четырехзвенника $\Pi_{03}\Pi_{34}\Pi_{45}\Pi_{05}$ определяются углы φ_4, φ_5 , а затем передаточные отношения, связывающие между собой аналоги угловых скоростей (U_{43}, U_{53}) и ускорений (U'_{43}, U'_{53}) его звеньев:

$$\varphi_4 = \arccos \left[\frac{L_4^2 + S_1^2 - L_5^2}{2 \cdot L_4 \cdot S_1} \right] + \arccos \left[\frac{L_{34} \cdot \sin(\varphi_3 + T)}{L_{01} + L_{34} \cdot \cos(\varphi_3 + T)} \right] - T; \quad (4)$$

$$\varphi_5 = \arccos \left[\frac{L_4^2 - S_1^2 - L_5^2}{2 \cdot L_5 \cdot S_1} \right] + \arccos \left[\frac{L_{34} \cdot \sin(\varphi_3 + T)}{L_{01} + L_{34} \cdot \cos(\varphi_3 + T)} \right] - T; \quad (5)$$

$$U_{43} = \frac{L_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_5)}{L_4 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}; \quad U_{53} = \frac{L_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}{L_5 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}; \quad (6)$$

$$U'_{43} = \frac{L_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_5) - U_{53}^2 \cdot L_5 + U_{43}^2 \cdot L_4 \cdot \cos(\varphi_4 - \varphi_5)}{L_4 \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_4)}; \quad (7)$$

$$U'_{53} = \frac{L_3 \cdot \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + U_{43}^2 \cdot L_4 - U_{53}^2 \cdot L_5 \cdot \cos(\varphi_5 - \varphi_4)}{L_5 \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_4)}. \quad (8)$$

Из выражений (6)–(8) очевидно, что аналоги угловых скоростей и ускорений зависят только от геометрических параметров ПРМ. Через угол $\varphi_{34}(\varphi_3)$ они непосредственно связаны с обобщенной координатой S и не зависят от времени. Поэтому кинематическое исследование ПРМ может быть выполнено независимо от его динамического анализа.

Для получения аналога углового ускорения φ_3'' выполняется повторное дифференцирование аналога угловой скорости φ_3' по обобщенной координате S :

$$\varphi_3'' = \frac{2 \cdot [S^4 - (L_3^2 - L_0^2)^2]}{\left[\left\{ 4 \cdot L_0^2 \cdot L_3^2 - [S^2 - (L_3^2 + L_0^2)]^2 \right\}^3 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (9)$$

Угловая скорость звена 3 («рычага») определяется как произведение аналога угловой скорости этого звена на скорость изменения обобщенной координаты (S):

$$\omega_3 = \varphi_3' \cdot \dot{S}. \quad (10)$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев 4 и 5 (для силосопровода или адаптера). Дифференцируя $\omega_3, \omega_4, \omega_5$ по времени, после некоторых преобразований получим выражения для угловых ускорений упомянутых звеньев $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$, а также ускорений центра тяжести адаптера $\ddot{X}_{S5}, \ddot{Y}_{S5}$:

$$\omega_3 = \varphi_3' \cdot \dot{S}; \quad \varepsilon_3 = \varphi_3'' \cdot \dot{S}^2 + \varphi_3'^2 \cdot \ddot{S}; \quad (11)$$

$$\omega_4 = \varphi_4' \cdot \dot{S}; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_3 \cdot U_{43} + \omega_3^2 \cdot U'_{43}; \quad (12)$$

$$\omega_5 = \varphi_5' \cdot \dot{S}; \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_3 \cdot U_{53} + \omega_3^2 \cdot U'_{53}; \quad (13)$$

$$\ddot{X}_{S5} = -L_{S5} \cdot [\varepsilon_5 \cdot \sin(\varphi_5 + \varphi_{S5}) + \omega_5^2 \cdot \cos(\varphi_5 + \varphi_{S5})]; \quad (14)$$

$$\ddot{Y}_{S5} = L_{S5} \cdot [\varepsilon_5 \cdot \cos(\varphi_5 + \varphi_{S5}) - \omega_5^2 \cdot \sin(\varphi_5 + \varphi_{S5})], \quad (15)$$

где L_{S5} и φ_{S5} – координаты центра тяжести МВА (см. рис. 2).

Динамика работы плоского механизма описывается уравнением Лагранжа 2-го рода, записанным для материальной точки, обладающей приведенной массой $m_{np}(S)$ и совершающей движение под действием обобщенной силы $Q(S)$:

$$m_{np}(S) \cdot \ddot{S} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{np}(S)}{dS} = Q(S). \quad (16)$$

Для адаптера $m_{np}(S) = m_5 \cdot I_{S5}^2$, а для силосопровода $m_{np}(S) = J_5 \cdot \varphi_5'^2$; производная от приведенной массы по обобщенной координате (для МПС используется только 2-й член выражения):

$$\frac{dm_{np}(S)}{dS} = 2 \cdot \left[m_5 \cdot I_{S5} \cdot \frac{dI_{S5}}{dS} + J_5 \cdot \varphi_5' \cdot \varphi_5' \right],$$

где m_5, J_5 – соответственно масса адаптера и момент инерции силосопровода; I_{S5}, φ_5' – соответственно передаточные числа МВА и МПС.

Передаточные числа (ПЧ) механизмов определяются по выражениям:

$$I_{S5} = \varphi_3' \cdot U_{53} \cdot L_{S5} \cdot \cos(\varphi_5 + \varphi_{S5}); \quad \varphi_5' = \varphi_3' \cdot U_{53}. \quad (17)$$

Для определения закона движения входного звена соответствующего ПРМ уравнение (16) решается совместно с уравнением, определяющим либо реакцию на опорном башмаке (R), либо давление в гидроцилиндре (p). В случае МПС это уравнение образует систему совместно с уравнением, из которого определяется давление в гидроцилиндре [3] и сила, движущая его поршень:

$$Q = F_n \cdot \dot{S} + \frac{V}{E} \cdot \dot{p}; F_{гц} = p \cdot F_n, \quad (18)$$

где Q – объемная подача жидкости в гидроцилиндр (ГЦ); F_n – площадь поршня ГЦ со стороны напорного тракта; V – объем приведенной к гидроцилиндру жидкости; E – приведенный модуль объемной упругости гидравлической цепи; \dot{S}, \dot{p} – скорости движения поршня и изменения давления в ГЦ.

Для МВА уравнение Лагранжа (16) образует систему уравнений и решается совместно с уравнением, из которого определяется величина реакции на опорном башмаке адаптера:

$$F_{пр} = (k \cdot P_5 - R) \cdot I_{S5}, \quad (19)$$

где $F_{пр}$ – сила растяжения пружинного блока; k – коэффициент, учитывающий распределение веса адаптера на соответствующий башмак; P_5 – вес адаптера; R – реакция на башмаке адаптера от его контакта с опорной поверхностью.

Реакция на башмаке адаптера однозначно определяется весом адаптера, расположением его центра тяжести и текущими геометрическими параметрами МВА.

Рассмотренные системы уравнений отличаются выражениями для приведенной к входному звену силы $F_{пр}$ или $F_{гц}$, что определяется характером движения совершаемого нагрузкой: для МПС – вращательное, МВА – плоскопараллельное. В результате решения полученных систем уравнений численным методом определяется закон относительного движения звеньев гидроцилиндра или растяжения пружины: $S(t) = f(S, \dot{S}, \ddot{S}, t)$.

Силовой анализ ПРМ выполняется в известном порядке, начиная с двухповодковой группы в составе звеньев L_4, L_5 . При этом учитываются инерционные характеристики только у выходного звена как относительно наиболее важные. Действующие в шарнирах силы приводятся к паре Π_{45} (рис. 3) и относительно ее составляются уравнения моментов.

В результате была получена система, состоящая из четырех уравнений:

$$\begin{cases} R_{34}^x + R_{05}^x = -P_{45}^x; \\ R_{34}^y + R_{34}^y = -P_{45}^y; \\ R_{34}^x \cdot [Y_{45} - Y_{34}] + R_{34}^y \cdot [X_{34} - X_{45}] = 0; \\ R_{05}^x \cdot [Y_{45} - Y_{05}] + R_{05}^y \cdot [X_{05} - X_{45}] = -P_5 \cdot (X_{S5} - X_{45}). \end{cases} \quad (20)$$

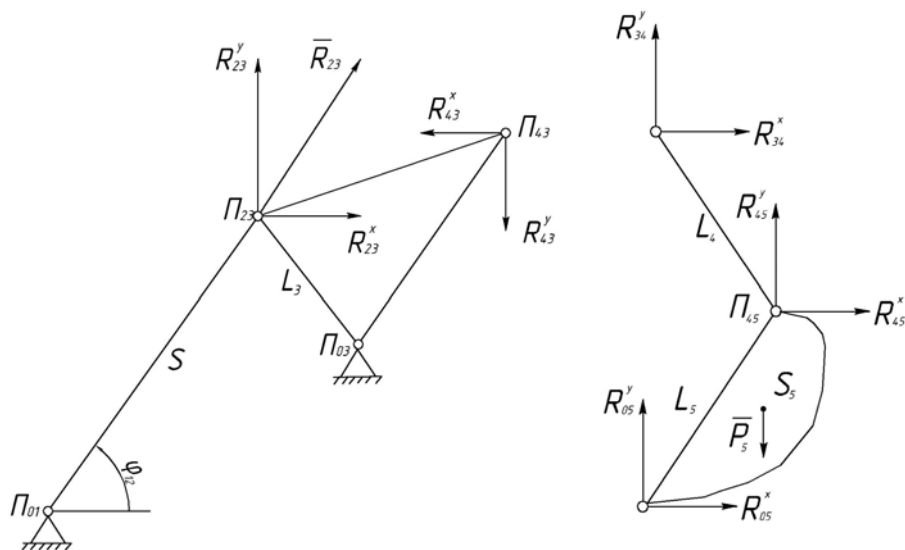


Рис. 3. Схема силового анализа плоского рычажного механизма

Решая эту систему уравнений любым известным методом [6], определяют реакции в шарнирах Π_{34} и Π_{05} . Далее рассматривается четырехзвенник $\Pi_{01}\Pi_{23}\Pi_{03}$ и определяются реакции в шарнирах $\Pi_{23}, \Pi_{03}, \Pi_{01}$:

$$R_{23} = \frac{R_{34} \cdot (X_{34} - X_{03}) - R_{34} \cdot (Y_{03} - Y_{34})}{(Y_{03} - Y_{23}) \cdot \cos \varphi_{12} - (X_{23} - X_{03}) \cdot \sin \varphi_{12}};$$

$$R_{23}^x = R_{23} \cdot \cos \varphi_{12}; \quad R_{23}^y = R_{23} \cdot \sin \varphi_{12};$$

$$R_{03}^x = R_{34}^x - R_{23}^x; \quad R_{01}^x = R_{23}^x;$$

$$R_{03}^y = R_{34}^y - R_{23}^y; \quad R_{01}^y = R_{23}^y. \quad (21)$$

По известным коэффициентам трения в кинематических парах (f), радиусам цапф вращательных пар (r), направлениям относительных скоростей звеньев ПРМ определяются моменты сил трения во вращательных и силы трения в поступательных парах. В результате, например, в МПС потери мощности на входном звене (L_2 – поршень) и во вращательной паре Π_{01} составляют соответственно:

$$N_2 = f \cdot R_{23} \cdot \dot{S}; \quad N_{01} = f \cdot R_{01} \cdot r_{01} \cdot \omega_{12}.$$

Потери на трение в кинематических парах обычно приводят ко входному звену, формируя таким образом приведенную силу трения [4], которая используется при решении дифференциального уравнения движения (16), а также при оценке качества синтезируемого варианта ПРМ.

Результаты и их обсуждение

Для параметрической оптимизации описанных функциональных математических моделей МПС и МВА были опробованы несколько методов оптимизации [4], [5]. Градиентные методы для решения данной задачи оказались практически непригодными, так как составленная целевая функция включает в себя штрафные функции и вследствие этого имеет изломы линий уровня. При числе управляемых параметров до 8–10 удовлетворительно была оценена эффективность методов спирального ко-

ординатного спуска и сеточного поиска (разновидность метода исключения неперспективных областей).

Характеристики МПС и МВА кормоуборочного комбайна «Полесье-1400» до и после оптимизации приведены на рис. 4 и 5. Особенно заметен выигрыш в сглаживании усилия в гидроцилиндре (МПС), имеющего выраженный рост нелинейности при угле поворота силосопровода более 250 градусов.

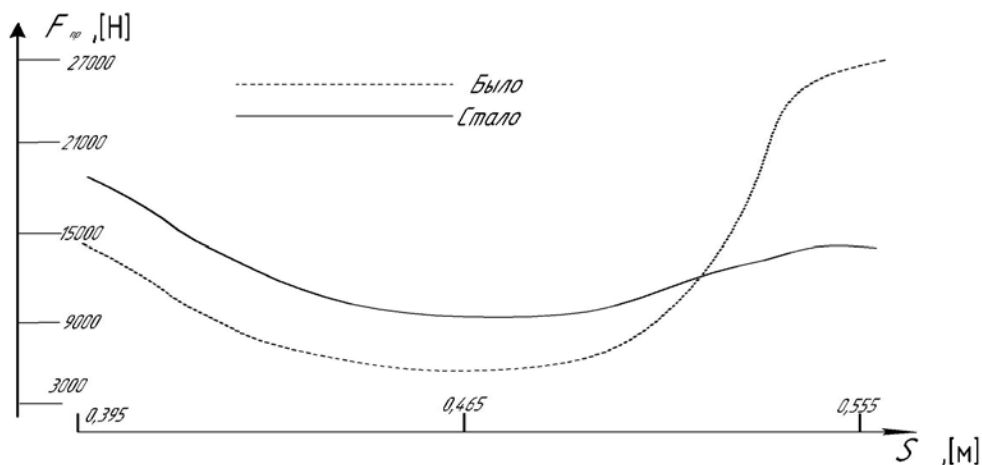


Рис. 4. Изменение приведенной силы и передаточного числа в зависимости от обобщенной координаты

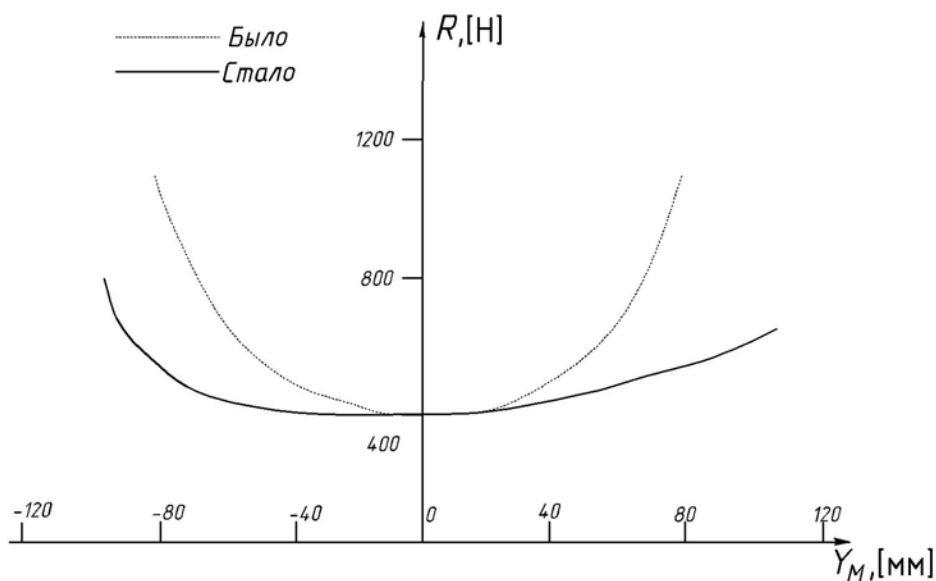


Рис. 5. Изменение силы реакции на башмаке в зависимости от его вертикального положения

Заключение

Таким образом, кинематические и динамические параметры ПРМ однозначно выражаются через соответствующие аналоги угловых скоростей и ускорений звеньев, а также их массогеометрические параметры. Закон изменения обобщенной координаты входного звена зависит главным образом от массово-динамических характеристик ПРМ.

Значительная часть движущей силы в ПРМ расходуется на преодоление сил трения. Практически установлено, что, например, МПС часто работает в области, близ-

кой к самоторможению. Игнорирование этого обстоятельства приводит к значительным количественным ошибкам.

Разработанная методика автоматизированного проектирования МВА и МПС может быть использована для рычажных механизмов сельскохозяйственных машин, имеющих идентичную структуру и назначение.

Литература

1. Попов, В. Б. Автоматизированное проектирование механизма навески переднего подъемно-навесного устройства универсального энергосредства / В. Б. Попов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – Вып. 42.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / И. И. Артоболевский. – Москва: Наука, 1988. – 640 с.
3. Попов, Д. К. Нестационарные гидромеханические процессы / Д. К. Попов. – Москва: Машиностроение, 1982. – 240 с.
4. Попов, В. Б. Автоматизированное проектирование механизма поворота силосопровода кормоуборочного комбайна / В. Б. Попов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – Вып. 41. – С. 218–224.
5. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – Москва: Мир, 1982. – 238 с.
6. Дьяков, В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке BASIC для ПЭВМ / В. П. Дьяков. – Москва: Наука, 1987. – 240 с.

Получено 03.11.2008 г.