Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ
по курсу «Математика. Геометрия и алгебра»
для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования»
дневной формы обучения

Гомель 2020

УДК 512.5(075.8)
ББК 22.14я73
В93

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 10 от 03.06.2019 г.*)

Составители: *А. А. Бабич*, *Н. Н. Бородин*, *А. В. Емелин*

Рецензент: зам. декана ФАИС ГГТУ им. П. О. Сухого канд. физ.-мат. наук, доц. *В. О. Лукьяненко*

В93 **Высшая** алгебра : практикум по курсу «Математика. Геометрия и алгебра» для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» днев. формы обучения / сост.: А. А. Бабич, Н. Н. Бородин, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2020. – 27 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Приведены теоретические вопросы и задачи для самостоятельного решения по восьми разделам курса «Математика. Геометрия и алгебра».

Для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы обучения.

УДК 512.5(075.8)
ББК 22.14я73

РАЗДЕЛ 1. НОД И НОК. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Вопросы для самоконтроля

1. Является ли число 0 натуральным?
2. Какие числа называются целыми?
3. Какие целые числа называются положительными, отрицательными?
4. Какие операции определены на множестве целых чисел?
5. Записать свойство коммутативности и ассоциативности для сложения и умножения.
6. Назовите нейтральные элементы относительно сложения и умножения.
7. Сформулировать свойство дистрибутивности.
8. Привести пример противоположных чисел.
9. Существуют ли противоположные элементы в множестве целых чисел относительно умножения?
10. Записать формулу деления с остатком.
11. Может ли остаток быть больше делителя?
12. Что такое НОД двух чисел?
13. Как формулируется алгоритм Евклида?
14. Чему равен НОД согласно алгоритму Евклида?
15. Как связаны НОД и НОД двух чисел?
16. Как найти НОД с помощью разложения на простые множители?

Задачи и упражнения

1. Разложить в произведение простых множителей следующие числа:

а) 1108800; б) 3603600.

2. Найти НОД и НОК следующих пар чисел, используя разложение на простые множители:

а) (663, 126); б) (1071, 1029);

в) (1224, 1440); г) (2747, 3149).

3. Найти НОД (a, $б$), используя алгоритм Евклида. Найти НОК (a, $б$), используя соответствующую формулу:

а) $a = 663,\ b = 126;$

б) $a = 1071,\ b = 1029;$

в) $a = 2747,\ b = 3149.$

4. Для приведенных ниже пар чисел a и b найдите u и v из уравнения $au + bv = d$, где $d = \text{НОД}(a, b)$:

а) $(a, b) = (83, 17);$ б) $(a, b) = (361, 418);$

в) $(a, b) = (25, 15);$ г) $(a, b) = (81, 9);$

д) $(a, b) = (216, 324);$ е) $(a, b) = (143, 183).$

5. С помощью обратного хода алгоритма Евклида найти разложение числа a в виде линейной комбинации с целочисленными коэффициентами чисел u и v:

а) $a = 3,\ u = 45,\ v = 42;$

б) $a = 4,\ u = 22,\ v = 21;$

в) $a = 7,\ u = 45,\ v = 42;$

г) $a = 13,\ u = 138,\ v = 52.$

РАЗДЕЛ 2. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. ДИОФАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вопросы для самоконтроля

1. Какие числа называются простыми?
2. Какие числа называются составными?
3. Является ли число 1 простым?
4. Приведите примеры десяти простых чисел.
5. Могут ли простые числа делиться друг на друга (если они не равны)?
6. Когда произведение чисел делится на простое число?
7. Какие числа называются взаимно простыми?
8. Приведите примеры взаимно простых чисел.
9. С какими числами является взаимно простым число 1?
10. Сформулировать критерий взаимной простоты чисел.
11. Какое утверждение называют основной теоремой арифметики?
12. Могут ли коэффициенты линейного диофантового уравнения быть дробными?
13. При каком условии уравнение вида $ax+by=c$ не имеет решений в целых числах?

Задачи и упражнения

1. Являются ли следующие пары чисел взаимно простыми:

а) (504, 55); б) (84, 95);
в) (126, 225); г) (147, 112).

2. Найти частное решение следующих диофантовых уравнений (если оно существует):

а) $5x-8y=19$; б) $2x+6y=7$;
в) $4x-12y=16$; г) $3x+5y=1$;
д) $11x-7y=7$; е) $11x+19y=260$.

3. Найти общее решение следующих диофантовых уравнений:

а) $45x+72y=63$; б) $66x-220y=132$;
в) $803x+154y=33$; г) $39x-299y=26$.

РАЗДЕЛ 3. СРАВНЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СРАВНЕНИЙ

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает запись $a \equiv b \pmod{n}$?
2. Является ли отношение сравнимости отношением эквивалентности?
3. Верно ли, что $5 \equiv 7 \pmod{2}$?
4. Дать определение класса вычетов по модулю n.
5. Какие операции определяются на множестве классов вычетов?
6. Как определяется функция Эйлера?
7. По какой формуле можно вычислить значение функции Эйлера?
8. Сформулируйте теорему Эйлера.
9. Сформулируйте малую теорему Ферма.
10. Что называется линейным сравнением?

Задачи и упражнения

1. Записать множество:

а) $x \equiv 3 \pmod{4}$; б) $x \equiv 7 \pmod{3}$; в) $x \equiv 4 \pmod{5}$.

2. Составить таблицы сложения и умножения в множестве:

а) $\mathbb{Z}_3$; б) $\mathbb{Z}_4$.

3. По определению найдите:

а) $\varphi(4)$; б) $\varphi(7)$; в) $\varphi(9)$; г) $\varphi(15)$,

где $\varphi(n)$ – функция Эйлера.

4. Вычислить $\varphi(n)$, используя формулы:

а) $n = 35$; б) $n = 158$;
в) $n = 1400$; г) $n = 5292$;
д) $n = 1485$; е) $n = 3640$.

5. Решить сравнение:

а) $8x \equiv 6 \pmod{5}$; б) $5x \equiv 6 \pmod{7}$;
в) $100x \equiv 21 \pmod{23}$; г) $3x \equiv 18 \pmod{6}$;
д) $42x \equiv 30 \pmod{90}$; е) $20x \equiv 12 \pmod{48}$.

6. Решите систему сравнений первой степени (если это возможно):

а) $\begin{cases} x \equiv 6 (\bmod 25); \\ x \equiv 9 (\bmod 12); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 10 (\bmod 14); \\ x \equiv 19 (\bmod 49); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \equiv 21 (\bmod 36); \\ x \equiv 5 (\bmod 8); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \equiv 3 (\bmod 4); \\ x \equiv 5 (\bmod 9); \\ x \equiv 10 (\bmod 35); \end{cases}$

д) $\begin{cases} x \equiv 5 (\bmod 7); \\ x \equiv 12 (\bmod 15); \\ x \equiv 18 (22); \end{cases}$ е) $\begin{cases} x \equiv 8 (\bmod 12); \\ x \equiv 5 (\bmod 9); \\ x \equiv 14 (\bmod 15). \end{cases}$

РАЗДЕЛ 4. СООТВЕТСТВИЯ. ФУНКЦИИ. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется декартовым произведением двух непустых множеств?
2. Что называется соответствием (отношением)?
3. Какое отношение называется рефлексивным?
4. Дать определение симметричного, антисимметричного отношения.
5. Какое отношение называется транзитивным?
6. Что называется матрицей отношения?
7. Какое отношение называется эквивалентностью?
8. Является ли подобие треугольников отношением эквивалентности?
9. Какое отношение называется функциональным?
10. Дать определение сюръективного отображения.
11. Какое отображение называется инъективным?
12. Какая функция называется биективной?
13. Что называется композицией функций?
14. Сформулируйте условие обратимости функций.
15. Чему равна мощность конечного множества?
16. Какое множество называется счетным?
17. Какое множество называется несчетным?
18. Может ли объединение конечного числа счетных множеств быть несчетным?

Задачи и упражнения

1. Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$. Построить $A \times B$.

2. Пусть $A = \{1,2,3\}$. Составить отношения на $A \times A$, которое будет являться:

а) рефлексивным;

б) симметричным;

в) антисимметричным.

3. Установить, является ли отношение $R = \{(1;1),(1;2),(1;3),(3;3)\}$:

а) рефлексивным;
б) симметричным;
в) антисимметричным;
д) транзитивным?

4. Установить, является ли отношение $R = \{x\ \textit{взаимнопростое с}\ y\}$, определенное на множестве $A = \{2,3,4,5,6\}$:

а) рефлексивным;
б) симметричным;
в) транзитивным?

5. Для отношения $R = \{(1;1),(1;3),(2;2),(2;3),(3;2)\}$ найти: R^{-1}, $R \circ R$.

6. Установить, является ли эквивалентным отношение $R = \{x\ \textit{знаком с}\ y\}$, определенное на множестве студентов университета?

7. Составить три различных сюръективных отображения, действующих из $A = \{1,2,3,4\}$ в $B = \{a,b,c\}$.

8. Составить три инъекции из $A = \{a,b,c\}$ в $B = \{1,2,3,4\}$.

9. Составить две биекции из $A = \{3,4,7\}$ в $B = \{0,1,2\}$.

10. Какие из отношений являются функциональными, если x принадлежит области определения, а y – области значений?

а) $y^2 = x^2 + 4$;
б) $y^3 = x^3 + 9$;
в) $y = 5$;
г) $x = 7$;
д) $y = \sqrt{x^2 - 3}$.

11. Для функций f и g, заданных на $\mathbb{R}$, найдите $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если:

а) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 3$;
б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, $g(x) = x^2 + 1$;
в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 3x + 2$.

12. Найдите обратную для каждой из следующих функций:

а) $y = \dfrac{x+6}{2}$;

б) $y = x^3$;

в) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

13. Какие из функций, у которых область определения и область значений совпадают с $\mathbb{R}$, являются инъективными, сюръективными, имеют обратную функцию?

а) $f(x) = |x|$;

б) $f(x) = x^2 + 9$;

в) $f(x) = x^3 + 8$;

г) $f(x) = x(x-2)(x+3)$.

14. Установить взаимнооднозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2 и $\mathbb{N}$.

15. Установить биекцию между точками интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и множеством $\mathbb{R}$.

16. Установить биекцию между интервалом $(3;7)$ и $\mathbb{R}$.

РАЗДЕЛ 5. ГРУППЫ И ИХ НАЧАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется полугруппой?
2. Дать определение группы.
3. Как задать группу?
4. Что означает мультипликативная (аддитивная) группа?
5. Сколько единиц в мультипликативной группе?
6. Сколько противоположных имеет элемент в аддитивной группе?
7. Что в аддитивной группе является аналогом степени элемента?
8. Доказать, что в группе уравнения $ax = b$ и $xa = b$ имеет единственное решение.
9. Дать определение изоморфизма групп.
10. Является ли изоморфизм отношением эквивалентности?

Задачи и упражнения

1. Определена ли операция сложения на множестве?

а) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

б) $Q_p = \left\{ \dfrac{n}{p^m} \middle| n, m \in \mathbb{N} \right\}$, p – фиксированное простое число;

в) $N = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$.

2. Определена ли операция умножения на множестве?

а) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

б) $Q_p = \left\{ \dfrac{n}{p^m} \middle| n, m \in \mathbb{N} \right\}$, p – фиксированное простое число.

3. Проверить, что $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ для любых элементов a и b из группы.

4. Пусть G – группа. Доказать, что $\forall a \in G$: $a^n a^m = a^{n+m}$ и $(a^n)^m = a^{nm}$ для любых $n, m \in \mathbb{Z}$.

5. Показать, что множество $(K, *)$ является группой. Что будет нейтральным элементом, симметричным?

а) $K = \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a * b = \dfrac{ab}{5}$;

б) $K = \mathbb{R}$, $a * b = a + b - 3$;

в) $K = \mathbb{Z}$, $a * b = a + b$.

6. Обозначим через $GL(n, \mathbb{R})$ совокупность всех невырожденных $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{R}$. Доказать, что $GL(n, \mathbb{R})$ – мультипликативная группа. $GL(n, \mathbb{R})$ называется *полной линейной группой степени n* над полем $\mathbb{R}$.

7. Доказать, что $SL(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \middle| \det A = 1 \right\}$ – группа относительно умножения матриц. $SL(n, \mathbb{R})$ называется *специальной линейной группой степени n* над полем $\mathbb{R}$.

8. Отображение $\varphi_{a,b} : x \to ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ множества $\mathbb{R}$ в себя называется *аффинным преобразованием прямой*. Умножение отображений $\varphi_{a,b}$ и $\varphi_{c,d}$ определяется как их последовательное применение. Доказать, что множество $A(\mathbb{R})$ всех аффинных преобразований прямой относительно умножения является неабелевой группой. Указать, что является единичным элементом, обратным.

9. Пусть G – мультипликативная группа, $a, b, c \in G$. Доказать следующие свойства групп:

а) $(a^{-1})^{-1} = a$, $(abc)^{-1} = c^{-1} b^{-1} a^{-1}$;

б) если $ab = ba$, то $(ab)^k = a^k b^k$, $k \in \mathbb{Z}$;

в) уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = a^{-1} b$;

г) если $ac = ab$, то $c = b$; если $ca = ba$, то $c = b$.

10. Доказать, что группа G абелева в каждом из следующих случаев:

а) $(gh)^2 = g^2 h^2$, $\forall g, h \in G$;

б) $g^2 = e$, $\forall g \in G$;

в) $(gh)^{-1} = g^{-1} h^{-1}$, $\forall g, h \in G$.

11. Доказать, что относительно сложения следующие множества образуют группы:

а) $2\mathbb{Z} = \left\{ 2k \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$;

б) $Q_m = \left\{ \dfrac{n}{m^k} \middle| n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}$

12. Пусть $G = \left\{ h_i \middle| i \in I \right\}$ – множество функций. На множестве G введем операцию умножения $\left(g_i g_j\right)(x) = g_i(g_j(x))$. Составить таблицу умножения и выяснить, будет ли G группой.

а) $g_1(x) = x,\ g_2(x) = \dfrac{x-1}{x+1},\ g_3(x) = -\dfrac{1}{x},\ g_4(x) = -\dfrac{x+1}{x-1}$;

б) $g_1(x) = x,\ g_2(x) = -x,\ g_3(x) = \dfrac{1}{x},\ g_4(x) = -\dfrac{1}{x}$;

в) $g_1(x) = x,\ g_2(x) = \dfrac{1}{x},\ g_3(x) = -x,\ g_4(x) = -\dfrac{1}{x}$.

13. Пусть $f: G_1 \to G_2$ – изоморфизм групп G_1 и G_2. Доказать, что:

а) если e_1 – единица в G_1, то $f(e_1) = e_2$ – единица в G_2;

б) если a^{-1} – обратный к a в G_1, то $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ – обратный к $f(a)$ в группе G_2;

в) если G_1 – абелева, то и G_2 – абелева.

14. Доказать, что группы $\left(m\mathbb{Z}, +\right)$ и $\left(n\mathbb{Z}, \cdot\right)$ изоморфны $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

15. Доказать, что мультипликативные группы изоморфны:

$$G_1 = \left\{-1; 1\right\},\ G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

16. Установить изоморфизм между мультипликативной группой $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел и аддитивной группой $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

17. Пусть $a \in G$ – фиксированный элемент в мультипликативной группе $\left(G, \cdot\right)$. На множестве G определим операцию $*$, считая $x * y = xay$. Доказать, что $\left(G, *\right)$ – группа и $\varphi: x \to xa^{-1},\ x \in G$ – изоморфизм $\left(G, \cdot\right)$ на $\left(G, *\right)$.

18. Доказать изоморфизм мультипликативных групп:

а) $G_1 = \left\{ a + \sqrt{3}b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 > 0 \right\}$ и

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 > 0 \right\};$$

б) $G_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle\|\, z \right| = 1 \}$ и $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0; 2\pi) \right\}$.

19. Пусть G – конечная группа, на которой действует автоморфизм φ, обладающий следующими свойствами: $\varphi(g) \neq g$, $\forall g \in G$, $g \neq e$, $\varphi(\varphi(g)) = g$, $\forall g \in G$. Доказать, что G – абелева.

РАЗДЕЛ 6. ПОДГРУППЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется подгруппой?
2. Сформулировать критерий для подгрупп аддитивных групп.
3. Является ли мультипликативная группа $\mathbb{Q}^*$ подгруппой аддитивной группы $\mathbb{R}$?
4. Дать определение порядка элемента в аддитивной группе.
5. Конечны ли порядки элементов в конечной группе?
6. Пусть x – элемент группы. Будут ли равны порядки $|x|$ и $|\langle x\rangle|$?
7. Что называется циклической группой?
8. В группе дать определение произведения (суммы) подмножеств.
9. Что называется левым смежным классом?
10. Сформулировать свойства левых смежных классов в группе.
11. В каком случае произведение подгрупп является подгруппой?
12. Что называется индексом подгруппы?
13. Сформулировать теорему Лагранжа.

Задачи и упражнения

1. Найти все подгруппы симметрической группы S_3.

2. Найти разложение группы S_3 в левые смежные классы по подгруппе $H = \langle(1,2)\rangle$.

3. Выяснить, будет ли подгруппой произведение подгрупп $A = \langle(1,2)\rangle$ и $B = \langle(1,3)\rangle$ группы S_3?

4. Пусть G – циклическая группа порядка 12, порожденная элементом a. Пусть $A = \langle a^2\rangle$ и $B = \langle a^3\rangle$. Определить число элементов в произведении AB.

5. Пусть H непустое подмножество группы G. Доказать, что H является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $h_1h_2^{-1} \in H$, $\forall h_1, h_2 \in H$.

6. Пусть все не единичные элементы группы имеют порядки, равные 2. Доказать, что группа абелева.

7. Пусть A – подмножество мультипликативной группы G. Доказать, что множество $H = \{a \in G \mid aA = Aa\}$ – подгруппа группы G.

8. Пусть $G = \langle a \rangle$, H – подгруппа группы G и $a^k \in H$, где k – наименьший положительный показатель. Доказать, что $H = \langle a^k \rangle$, т. е. подгруппа циклической группы является циклической группой.

9. С помощью критерия подгрупп доказать, что $3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{Z}$. Найти разложение $\mathbb{Z}$ в левые смежные классы по $3\mathbb{Z}$.

10. Будет ли множество H подгруппой группы $GL(3, \mathbb{R})$?

а) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

б) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

11. Найти все элементы подгруппы H группы S_n и индекс подгруппы H в группе S_n:

а) $n = 4$; $H = \langle (3,2,1,4) \rangle$;

б) $n = 5$; $H = \langle (1,2)(3,4,5) \rangle$.

12. Найти порядок элемента *g*, принадлежащего мультипликативной группе *G*. Вычислить g^{100}:

а) $g = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$, $G = \mathbb{C}^*$;

б) $g = -i$, $G = \mathbb{C}^*$;

в) $g = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G = GL(2, \mathbb{C})$;

г) $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $G = GL(2, \mathbb{C})$.

13. Пусть A и B – подгруппы группы S_4. Будет ли подгруппой произведение AB? Найти число элементов множества AB:

а) $A = \langle (1,2,3,4) \rangle$, $B = \langle (2,3,4) \rangle$;

б) $A = \langle (1,2)(3,4) \rangle$, $B = \langle (1,4,2) \rangle$;

в) $A = \langle (1,4)(2,3) \rangle$, $B = \langle (1,3,2) \rangle$.

14. Пусть $G = \langle a \rangle$ – группа порядка n. Найти все элементы a^k этой группы такие, что $\langle a^k \rangle = G$:

а) $n = 6$;

б) $n = 7$;

в) $n = 5$.

РАЗДЕЛ 7. СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется подстановка?
2. Сколько элементов в группе подстановок S_n?
3. Как определяется операция умножения в группе S_n?
4. Какие подстановки называются равными?
5. Что является единицей в группе S_n?
6. Операция умножения коммутативна?
7. Чему равен порядок группы S_n?
8. Что называется длиной цикла?
9. Что называется транспозицией?
10. Какая подстановка называется четной (нечетной)?
11. Какие циклы называются независимыми?

Задачи и упражнения

1. Вычислить $\tau\pi$, $\pi\tau$, где

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратные к данным подстановкам. Сделать проверку:

а) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить $\tau\pi^{-1}\varphi$, где

а) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Разложить данные подстановки в произведение независимых циклов:

а) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$.

5. Определить порядок подстановки (порядок циклической подгруппы группы S_n, порожденной данной подстановкой) в группе S_n:

а) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 6 & 10 & 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$;

б) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 & 11 & 12 & 13 & 15 & 10 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

6. Найти обратные к данным подстановкам. Сделать проверку:

а) $(1,3,5)(4,7,2)(10,8) \in S_{12}$;

б) $(9,7,10,12)(3,5,8) \in S_{13}$.

7. Представить данные подстановки в виде произведения транспозиций:

а) $\tau = (1,3,2,4,5)$;
б) $\varphi = (3,2,4,1,5)$;
в) $\pi = (1,3,6,4,5)$.

8. Найдите все инверсии в следующих подстановках:

а) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 6 & 4 & 5 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Определить знак указанных подстановок:

а) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 15 & 6 & 5 & 11 & 12 & 13 & 8 & 10 & 9 & 14 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 11 & 2 & 13 & 7 & 4 & 6 & 5 & 8 & 12 & 1 & 15 & 10 & 9 & 14 \end{pmatrix}$;

в) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 12 & 2 & 1 & 3 & 8 & 6 & 5 & 11 & 4 & 9 & 15 & 10 & 13 & 14 \end{pmatrix}$.

РАЗДЕЛ 8. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ И ФАКТОРГРУППЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Какая подгруппа называется нормальной?

2. Дать определение сопряженной подгруппы.

3. Показать, что произведение нормальных подгрупп является нормальной подгруппой.

4. Докажите, что каждая подгруппа индекса 2 нормальна в группе.

5 Докажите, что сопряженные элементы имеют одинаковые порядки.

6. Как определяется факторгруппа?

7. Пусть G – группа, E – единичная подгруппа. Что представляют собой факторгруппы G/E и G/G?

8. Докажите, что если произведение любых двух левых смежных классов группы G по подгруппе H является левым смежным классом по H, то подгруппа H нормальна.

9. Сформулировать критерий нормальности подгруппы.

10. Определить число классов сопряженных элементов в группах S_5 и S_6.

11. Докажите, что любая подгруппа абелевой группы нормальна.

12. Какая группа называется простой?

Задачи и упражнения

1. Доказать, что $\forall a, b, x, y$ в группе G справедливы следующие равенства:

а) $a^{xy} = \left(a^x\right)^y$;

б) $\left(ab\right)^x = a^x b^x$;

в) $\left(a^x\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^x$.

2. Перечислить в группе S_3 все классы сопряженных элементов и все сопряженные подгруппы.

3. Пусть A и B – нормальные подгруппы группы G, $A \cap B = e$. Доказать, что $ab = ba$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

4. Доказать, что множество матриц с определителем, равным единица, образует нормальную подгруппу в группе $GL(n,\mathbb{R})$.

5. Доказать, что подгруппа $H = \langle(1,3,2)\rangle$ – нормальная подгруппа группы S_3.

6. Доказать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$ образует нормальную подгруппу группы $GL(2,\mathbb{R})$.

7. Доказать, что отношение сопряженности элементов в группе является отношением эквивалентности.

8. Элементы знакопеременной группы A_4 распределить по классам сопряженных элементов в A_4.

9. Доказать, что множество $V_4 = \{e,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$ является нормальной подгруппой в A_4.

10. Пусть $G = \{y = ax + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ – группа функций с операцией $(y_1 y_2)(x) = y_1(y_2(x))$. Доказать, что множество $H = \{y = x + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ является нормальной подгруппой группы G.

11. В группе $GL(2,\mathbb{R})$ указать хотя бы один элемент (если он существует), посредством которого сопряжены данные матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Найти факторгруппу циклической группы $G = \langle a \rangle$ порядка n по подгруппе $H = \langle a^m \rangle$:

а) $m = 2,\ n = 10$;

б) $m = 3,\ n = 12$;

в) $m = 4,\ n = 12$.

13. Составить таблицу сложения для факторгруппы $k\mathbb{Z}$ по подгруппе $t\mathbb{Z}$:

а) $k = 3,\ t = 9$;

б) $k = 5,\ t = 15$;

в) $k = 2,\ t = 6$.

14. Найти все факторгруппы группы S_3.

ОТВЕТЫ

Раздел 1. **2.** а) 3; б) 21; в) 72; г) 67. **4.** а) $d=1,\ u=8,\ v=-39$; б) $d=19,\ u=7,\ v=-6$; в) $d=5,\ u=-1,\ v=2$; г) $d=9,\ u=0,\ v=1$; д) $d=108,\ u=-1,\ v=1$; е) $d=11,\ u=4,\ v=-3$.

Раздел 2. **2.** а) $\begin{cases} x=-1-8t \\ y=-3-5t \end{cases},\ t\in Z$; б) нет решений; в) $\begin{cases} x=7-3t \\ y=1-t \end{cases},\ t\in Z$; г) $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=2-3t \end{cases},\ t\in Z$; д) $\begin{cases} x=-7t \\ y=-1-11t \end{cases},\ t\in Z$; е) $\begin{cases} x=34+19t \\ y=-6-11t \end{cases},\ t\in Z$.

Раздел 3. **3.** а) 2; б) 6; в) 6; г) 8. **4.** а) 24; б) 78; в) 480; г) 1512; д) 360; е) 1152. **5.** а) $x=\overline{2}$ *в* $\mathbb{Z}_5$; б) $x=\overline{4}$ *в* $\mathbb{Z}_7$; в) $x=\overline{17}$ *в* $\mathbb{Z}_{23}$; г) $x=\overline{0},\ x=\overline{2},\ x=\overline{4}$ *в* $\mathbb{Z}_6$;
д) $x=\overline{5},\ x=\overline{20},\ x=\overline{35},\ x=\overline{50},\ x=\overline{65},\ x=\overline{80}$ *в* $\mathbb{Z}_{90}$;
е) $x=\overline{3},\ x=\overline{15},\ x=\overline{27},\ x=\overline{39}$ *в* $\mathbb{Z}_{48}$. **6.** а) $x\equiv 81(\mathrm{mod}\,300)$; б) нет решения; в) $x\equiv 21(\mathrm{mod}\,72)$; г) $x\equiv 815(1260)$; д) $x\equiv 1272(\mathrm{mod}\,2310)$; е) $x\equiv 104(\mathrm{mod}\,180)$.

Раздел 4. **1.** $A\times B=\{(1;a),(1;b),(2;a),(2;b),(3;a),(3;b)\}$.

2. Например: а) $R_p=\{(1;1),(2;2),(3;3),(1;2)\}$;

б) $R_c=\{(1;2),(2;1),(1;3),(3;1)\}$; в) $R_a=\{(1;2),(1;3),(2;3)\}$.

3. а) не является; б) не является; в) является; г) является.

4. а) не является; б) является; в) не является; г) не является.

5. $R^{-1}=\{(1;1),(3;1),(2;2),(3;2),(2;3)\}$;

$R\circ R=\{(1;1),(1;3),(1;2),(2;2),(2;3),(3;2),(3;3)\}$.

6. Не является, так как нарушается транзитивность.

7. Например: $f_1: 1 \to a;\ 2 \to b; 3 \to c$; $f_2: 2 \to a;\ 1 \to b;\ 3 \to c$;
$f_3: 1 \to a;\ 2 \to a;\ 3 \to b;\ 4 \to c$.

8. Например: $f_1: a \to 1;\ b \to 2;\ c \to 3$; $f_2: a \to 2;\ b \to 1;\ c \to 3$;
$f_3: a \to 3;\ b \to 4;\ c \to 2$.

9. Например: $f_1: 3 \to 0;\ 4 \to 1;\ 7 \to 2$; $f_2: 3 \to 1;\ 4 \to 2;\ 7 \to 0$.

10. б), в), д).

11. а) $f(g(x)) = x^2 + 6x + 10$; $g(f(x)) = x^2 + 4$;

б) $f(g(x)) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 3}$; $g(f(x)) = x^2 + 3$;

в) $f(g(x)) = \dfrac{1}{3x+2}$; $g(f(x)) = \dfrac{3}{x} + 2$.

12. а) $x(y) = 2y - 6$; б) $x(y) = \sqrt[3]{y}$; в) $x(y) = \dfrac{1+3y}{1-y}$.

14. $n = 3t + 2,\ t \in \mathbb{N}$.

15. Например: $f(x) = tgx$.

16. $f(x) = \dfrac{x-5}{2-|x-5|}$.

Литература

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд. – М. : Физматлит, 2005.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992; 1993.

3. Элементы линейной алгебры / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1986.

4. Бугров, Я. С. Высшая математика. Т. 1 / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004.

5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005.

6. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – М. : Наука, 1979.

7. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1993.

8. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – 5-е изд., испр. – М. : Добросвет, 1998.

9. Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М. : Наука, 1997.

10. Биркгоф, Г. Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти ; пер. с англ. – М. : Мир, 1976.

11. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – 9-е изд., перераб. – М. : Наука, 1981.

12. Стройникова, Е. Д. Основы прикладной алгебры / Е. Д. Стройникова. – Минск : БГУИР, 2010.

Содержание

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

Практикум
по курсу «Математика. Геометрия и алгебра»
для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования»
дневной формы обучения

Составители: **Бабич** Александр Антонович
Бородин Николай Николаевич
Емелин Анатолий Владимирович

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 19.06.20.

Рег. № 59Е.
http://www.gstu.by