

УДК 62-83:621.313.333

## АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПРИ РАБОТЕ НА УДАР

**В. И. ЛУКОВНИКОВ, М. Н. ПОГУЛЯЕВ,  
Ю. А. РУДЧЕНКО, Н. В. САМОВЕНДЮК**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### **Введение**

Имеется множество областей науки и техники, отраслей народного хозяйства, где используются устройства, рабочие органы которых совершают колебательное движение с ударом. Это в первую очередь электромолотки, дробилки для измельчения руды, окаривающие механизмы, применяемые в лесной и деревообрабатывающей промышленности, установки ударно-канатного бурения, механизмы для ликвидации прихватов, применяемые при бурении нефтяных и газовых скважин, принтеры (матричные, лепестковые, строчные), перфораторы, механизмы забивки свай и вибротряски деревьев, колокола и т. д. [1].

В ряде областей науки, техники и производства, где требуется осуществлять колебательное движение рабочего органа машины без повышенных требований к качеству колебаний, более перспективным оказывается применение автоколебательных режимов работы электродвигателей. Это, например, испытательные стенды пружинных подвесок и других упругих элементов, станки-качалки, аппараты спортивной вибростимуляции, игрушки, рекламные качающиеся устройства, колокола и т. д.

### **Цель работы**

Данная статья посвящена анализу автоколебательного движения электропривода на основе общепромышленного трехфазного асинхронного электродвигателя, подключенного к однофазной электросети, при работе на ударную нагрузку на примере электропривода колокола.

### **Механическая часть привода чаши колокола**

Для получения звучания в колоколах используют три основных способа [2]. Первый осуществляется путем раскачивания языка и соударения его с неподвижной чашей колокола, при втором способе производят раскачивание чаши и соударение ее со свободно подвешенным языком колокола, третий способ получения звучания заключается в ударах молотом по внешней стороне чаши. В настоящее время наиболее распространенным является второй способ, несмотря на большие затраты энергии, т. к. он улучшает силу и качество звучания благодаря пространственному колебанию чаши.

Для раскачивания колоколов нередко используется электрический привод, который выполняется на основе электромагнитов, электродвигателей вращательного движения и линейных асинхронных двигателей дугового типа [3]. Чаще всего применяется электродвигатель вращательного движения с механическим преобразователем (редуктором), что усложняет кинематическую схему привода, приводит к увеличению потерь энергии в редукторе и уменьшению надежности. К недостаткам

привода с линейным двигателем, прежде всего, следует отнести низкие энергетические показатели из-за наличия краевых эффектов.

Есть еще одна возможность построения электропривода колокола – на основе асинхронного двигателя (АД), работающего в автоколебательном режиме. Такой способ построения исключает необходимость использовать редуктор, т. к. ротор двигателя в автоколебательном режиме совершает возвратно-вращательное движение, частота которого определяется массогабаритными характеристиками двигателя и колокола, а амплитуда колебаний зависит от параметров электропитания двигателя [4].

На рис. 1 представлена схема механической части электропривода чаши колокола на основе автоколебательного асинхронного электродвигателя. Чаша 2 колокола жестко закреплена на раме 4 с помощью штанги 3. Рама 4 имеет возможность поворачиваться в подшипниках 5, установленных на станине 8. К раме 2 с помощью муфты 6 подсоединен ротор асинхронного двигателя 7.

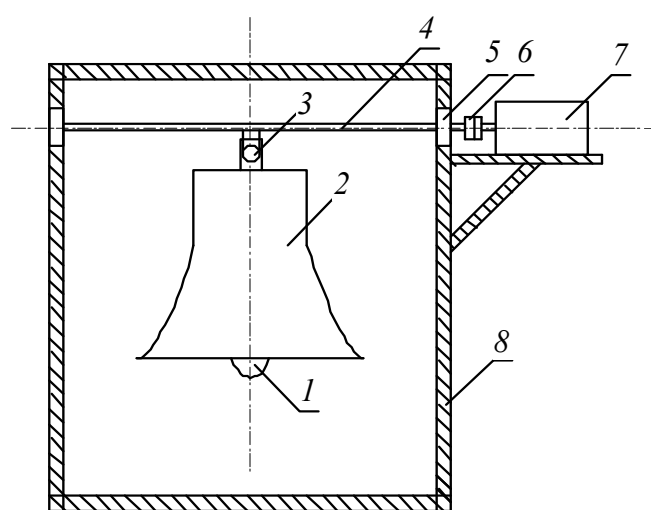


Рис. 1. Схема механической части электропривода чаши колокола:

1 – язык колокола; 2 – чаша колокола; 3 – штанга; 4 – рама; 5 – подшипник; 6 – муфта;  
7 – электродвигатель; 8 – станина

#### Схема подключения двигателя

Три фазные обмотки электродвигателя подключены к источнику однофазного переменного напряжения и соединены параллельно между собой, две из них включены согласно друг другу и встречно третьей (рис. 2, а) [5]. Фазные обмотки I, II и III включены между собой параллельно, что обеспечивает максимальный фазный ток в обмотках и, как следствие, максимальную амплитуду колебания момента двигателя. При этом относительная суммарная МДС  $F$  (рис. 2, б) равна геометрической сумме относительных МДС отдельных фазных обмоток I, II, III ( $F_I, F_{II}, F_{III}$ ).

При геометрическом сложении относительных МДС ( $F_I, F_{II}, F_{III}$ ) трех фазных обмоток, две из которых включены согласно между собой и встречно третьей, имеем результирующую относительную МДС  $F$ , которая в два раза больше МДС любой отдельно взятой фазной обмотки.

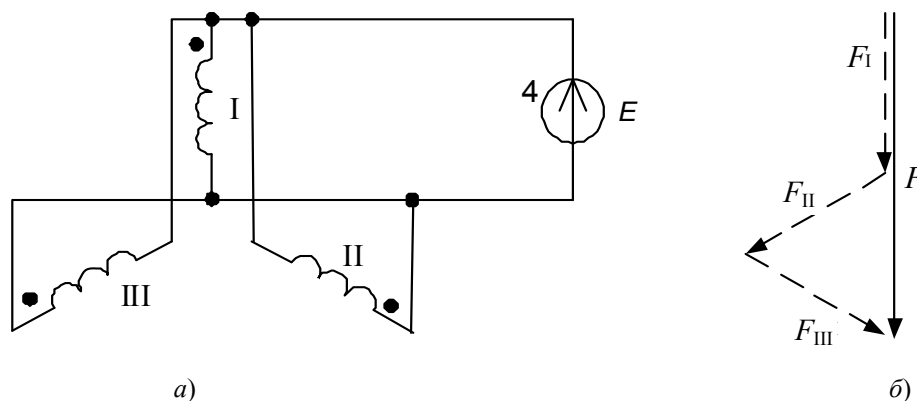


Рис. 2. Схема подключения обмоток двигателя к однофазной сети (а) и векторная диаграмма МДС, наводимых в них (б)

### Математическая модель электропривода

На основании третьего закона Ньютона запишем уравнение свободного (без языка) движения чаши колокола в следующем виде:

$$J_{\text{ч}} \cdot \ddot{\varphi}_{\text{ч}} + M_{\text{м.ч}} \cdot \sin(\varphi_{\text{ч}}) = M_{\text{дв}} - M_{\text{с.ч}}, \quad (1)$$

где  $\varphi_{\text{ч}}$  – угол отклонения чаши от положения равновесия;  $\dot{\varphi}_{\text{ч}}$  – скорость чаши;  $\ddot{\varphi}_{\text{ч}}$  – ускорение чаши;  $M_{\text{м.ч}}$  – маятниковый момент чаши;  $M_{\text{дв}}$  – момент двигателя;  $M_{\text{с.ч}}$  – момент сопротивления.

Уравнение (1) представляет собой уравнение автоколебательного движения [8].

Маятниковый момент чаши определяется по формуле:

$$M_{\text{м.ч}} = m_{\text{ч}} \cdot g \cdot l_{\text{ч}},$$

где  $m_{\text{ч}}$  – суммарная масса подвижных частей;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $l_{\text{ч}}$  – расстояние от центра тяжести чаши до оси вращения.

Момент двигателя определяется аппроксимацией Сюека [6]:

$$M_{\text{дв}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot M_{\text{кр}}}{2 \cdot \omega_1} \cdot \dot{\varphi}_{\text{ч}} - \frac{3\sqrt{3} \cdot M_{\text{кр}}}{2 \cdot \omega_1^3} \cdot \dot{\varphi}_{\text{ч}}^3,$$

где  $M_{\text{кр}}$  – критический момент однофазного асинхронного двигателя (ОАД);  $\omega_1$  – скорость идеального холостого хода ОАД.

Момент сопротивления

$$M_{\text{с.ч}} = M_{\text{с.т}} \cdot \text{Sign}(\dot{\varphi}_{\text{ч}}) + M_{\text{ж.т}} \cdot \dot{\varphi}_{\text{ч}},$$

где  $M_{\text{с.т}}$  – момент сухого трения;  $M_{\text{ж.т}}$  – коэффициент жидкого трения (демпфирование).

Аналогично запишем уравнение свободного (без соударения с чашей колокола) движения языка внутри чаши:

$$J_{\text{я}} \cdot \ddot{\varphi}_{\text{я}} + M_{\text{м.я}} \cdot \sin(\varphi_{\text{я}}) = -M_{\text{с.я}}, \quad (2)$$

где  $\varphi_{\text{я}}$  – угол отклонения языка колокола от положения равновесия;  $\dot{\varphi}_{\text{я}}$  – скорость языка;  $\ddot{\varphi}_{\text{я}}$  – ускорение языка;  $M_{\text{м.я}}$  – маятниковый момент языка;  $M_{\text{с.я}}$  – момент сопротивления языка, характеризующийся сухим и жидким трением.

Соударение чаши и языка наступает, когда выполняется условие

$$|\varphi_{\text{ч}} - \varphi_{\text{я}}| = \varphi_{\text{y}}, \quad (3)$$

где  $\varphi_{\text{y}}$  – угол соударения.

После соударения чаши и языка их скорости изменяются. Время переходного процесса изменения скорости от одного квазиустановившегося значения до другого мало по сравнению со временем периода автоколебаний языка и чаши колокола, поэтому будем считать, что скорости изменяются скачком. Скорости чаши и языка после соударения можно определить на основании законов сохранения импульса и энергии [7]:

$$\begin{cases} J_{\text{ч}} \cdot \omega_{\text{ч}2} + J_{\text{я}} \cdot \omega_{\text{я}2} = J_{\text{ч}} \cdot \omega_{\text{ч}1} + J_{\text{я}} \cdot \omega_{\text{я}1}, \\ \frac{J_{\text{ч}} \cdot \omega_{\text{ч}2}^2}{2} + \frac{J_{\text{я}} \cdot \omega_{\text{я}2}^2}{2} = \frac{J_{\text{ч}} \cdot \omega_{\text{ч}1}^2}{2} + \frac{J_{\text{я}} \cdot \omega_{\text{я}1}^2}{2}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\omega_{\text{ч}1}$ ,  $\omega_{\text{я}1}$  – скорости чаши и языка до соударения;  $\omega_{\text{ч}2}$ ,  $\omega_{\text{я}2}$  – скорости чаши и языка после соударения.

Решим систему (4) относительно  $\omega_{\text{ч}2}$  и  $\omega_{\text{я}2}$  и получим:

$$\begin{cases} \omega_{\text{ч}2} = \frac{2J_{\text{я}} \cdot \omega_{\text{я}1} + (J_{\text{ч}} - J_{\text{я}}) \cdot \omega_{\text{ч}1}}{(J_{\text{ч}} + J_{\text{я}})} \cdot k, \\ \omega_{\text{я}2} = \frac{2J_{\text{ч}} \cdot \omega_{\text{ч}1} + (J_{\text{я}} - J_{\text{ч}}) \cdot \omega_{\text{я}1}}{(J_{\text{ч}} + J_{\text{я}})} \cdot k, \end{cases} \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий снижение скорости чаши и языка, вследствие преобразования некоторой части кинетической энергии движущихся масс в акустическую ( $0 \leq k \leq 1$ ).

Выражения (1)–(3), являются математической моделью, описывающей движение чаши и языка колокола с учетом начальных условий после удара (5). Точный анализ данной модели можно проводить только численными методами.

#### Качественный (приближенный) анализ математической модели

Для проведения приближенного аналитического исследования модели примем ряд допущений:

- уравнения движения чаши (1) и языка (2) колокола близки к линейным;
- скорости языка и чаши колокола в момент удара изменяются скачком;
- момент инерции чаши намного больше момента инерции языка  $J_{\text{ч}} \gg J_{\text{я}}$ ;
- маятниковый момент чаши намного больше маятникового момента языка  $M_{\text{м.ч}} \gg M_{\text{м.я}}$ ;
- момент сопротивления чаши намного больше момента сопротивления языка  $M_{\text{с.ч}} \gg M_{\text{с.я}}$ ;
- коэффициент, учитывающий снижение скорости чаши и языка, вследствие преобразования некоторой части кинетической энергии движущихся масс в акустическую близок к 1 (принимая  $k = 1$ , т. е. считаем удар абсолютно упругим).

В результате можно считать, что закон движения чаши колокола близок к гармоническому.

$$\begin{cases} \varphi_{\text{ч}} = \varphi_{\text{макс.ч}} \sin(\omega_{0\text{ч}} t), \\ \omega_{\text{ч}} = \varphi_{\text{макс.ч}} \omega_{0\text{ч}} \cos(\omega_{0\text{ч}} t) = \omega_{\text{макс.ч}} \cos(\omega_{0\text{ч}} t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $\varphi_{\text{макс.ч}}$ ,  $\omega_{\text{макс.ч}}$  – максимальные угол отклонения и скорость движения чаши соответственно;  $\omega_{0\text{ч}}$  – частота собственных колебаний чаши

$$\omega_{0\text{ч}} = \frac{m_{\text{ч}} \cdot g \cdot l_{\text{ч}}}{J_{\text{ч}}}.$$

Аналогично будут выглядеть законы изменения угла и скорости языка до и после соударения с чашей.

Для углов отклонения языка:  $\frac{\pi}{2} \pm 2\pi \cdot n < \omega_{0\text{я}} t < \omega_{0\text{я}} t_y \pm 2\pi \cdot (n + \frac{1}{2})$ , где  $n \in N \geq 0$

$$\begin{cases} \varphi_{\text{я}} = \varphi_{\text{макс.я}} \sin(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t + \frac{\pi}{2} \cdot [1 - m]), \\ \pi_{\text{я}} = \varphi_{\text{макс.я}} \cdot m \cdot \omega_{0\text{ч}} \cos(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t + \frac{\pi}{2} \cdot [1 - m]) = \omega_{\text{макс.я}} \cos(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t + \frac{\pi}{2} \cdot [1 - m]). \end{cases} \quad (7)$$

Для углов отклонения языка:  $\frac{3\pi}{2} \pm 2\pi \cdot n < \omega_{0\text{я}} t < \omega_{0\text{я}} t_y \pm 2\pi \cdot (n + 1)$ , где  $n \in N \geq 0$

$$\begin{cases} \varphi_{\text{я}} = -\varphi_{\text{макс.я}} \sin(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t + \frac{3\pi}{2} \cdot [1 - m]), \\ \omega_{\text{я}} = -\varphi_{\text{макс.я}} m \cdot \omega_{0\text{ч}} \cos(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t + \frac{3\pi}{2} \cdot [1 - m]) = -\omega_{\text{макс.я}} \cos(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t + \frac{3\pi}{2} \cdot [1 - m]), \end{cases} \quad (8)$$

где  $\varphi_{\text{макс.я}}$ ,  $\omega_{\text{макс.я}}$  – максимальные угол отклонения и скорость движения языка соответственно;  $\omega_{0\text{я}}$  – частота собственных колебаний языка

$$\omega_{0\text{я}} = \frac{m_{\text{я}} \cdot g \cdot l_{\text{я}}}{J_{\text{я}}};$$

$m$  – отношение частот свободных колебаний языка и чаши колокола

$$m = \frac{\omega_{0\text{я}}}{\omega_{0\text{ч}}}.$$

Кроме того, т. к.  $J_{\text{ч}} \gg J_{\text{я}}$  и  $k = 1$ , то можно записать выражения (5) в виде:

$$\begin{cases} \omega_{\text{ч}2} = \omega_{\text{ч}1}; \\ \omega_{\text{я}2} = \omega_{\text{ч}1}. \end{cases} \quad (9)$$

Из выражений (9) видно, что для принятых допущений скорость движения чаши скачком после соударения с языком не меняется, а скорость движения языка изменяется до значения скорости движения чаши.

Для построения временных диаграмм углов и скоростей движения чаши и языка зададим в относительных единицах исходные данные. Рассмотрим частный случай, в котором колебания чаши происходит с амплитудой  $\varphi_{\text{макс.ч}} = 1$ . Характерным для ко-

локолов является, что частота собственных колебаний чаши выше частоты собственных колебаний языка. Примем  $\omega_{0ч} = 1$  и  $\omega_{0я} = 0,5$ .

Найдем остальные параметры колебательного движения амплитуду скорости движения языка  $\varphi_{\text{мак.я}}$  и угол соударения  $\varphi_y$ . Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_y = \varphi_{\text{мак.ч}} - \varphi_{\text{мак.я}}, \\ \varphi_y = \varphi_{\text{ч}}(t_y) - \varphi_{\text{я}}(t_y), \end{cases} \quad (10)$$

где  $\varphi_{\text{ч}}(t_y)$ ,  $\varphi_{\text{я}}(t_y)$  – углы отклонения чаши и языка колокола в момент соударения соответственно.

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\varphi_{\text{мак.ч}} - \varphi_{\text{ч}}(t_y) - \varphi_{\text{мак.я}} + \varphi_{\text{я}}(t_y) = 0. \quad (11)$$

Запишем (11) с учетом (6)–(8)

$$\varphi_{\text{мак.ч}} - \varphi_{\text{мак.ч}} \sin(\omega_{0ч} t_y) = \varphi_{\text{мак.я}} - (-\varphi_{\text{мак.я}} \sin(m \cdot \omega_{0ч} t_y + \frac{3\pi}{2} \cdot [1 - m])). \quad (12)$$

Подставив в выражение (12) исходные данные, получим:

$$1 - \sin(t_y) = \varphi_{\text{мак.я}} (1 + \sin(0,5t_y + \frac{3\pi}{4})). \quad (13)$$

Данное уравнение является параметрическим, решим его относительно  $\varphi_{\text{мак.я}}$ :

$$\varphi_{\text{мак.я}} = \frac{1 - \sin(t_y)}{1 + \sin(0,5t_y + \frac{3\pi}{4})}. \quad (14)$$

Будем считать, что соударение чаши и языка происходит в момент, соответствующий  $\omega_{0ч} t_y = \frac{\pi}{6}$ , тогда амплитуда колебания языка по выражению (14) равна

$$\varphi_{\text{мак.я}} = \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{6})}{1 + \sin(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4})} = 0,333.$$

Угол соударения по выражению (3)

$$\varphi_y = |\varphi_{\text{мак.ч}} - \varphi_{\text{мак.я}}| = 1 - 0,33 = 0,667.$$

Угол отклонения чаши в момент соударения с языком колокола из первого уравнения системы (6)

$$\varphi_{\text{ч}}(t_y) = \varphi_{\text{мак.ч}} \sin(\omega_{0ч} t_y) = \sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5.$$

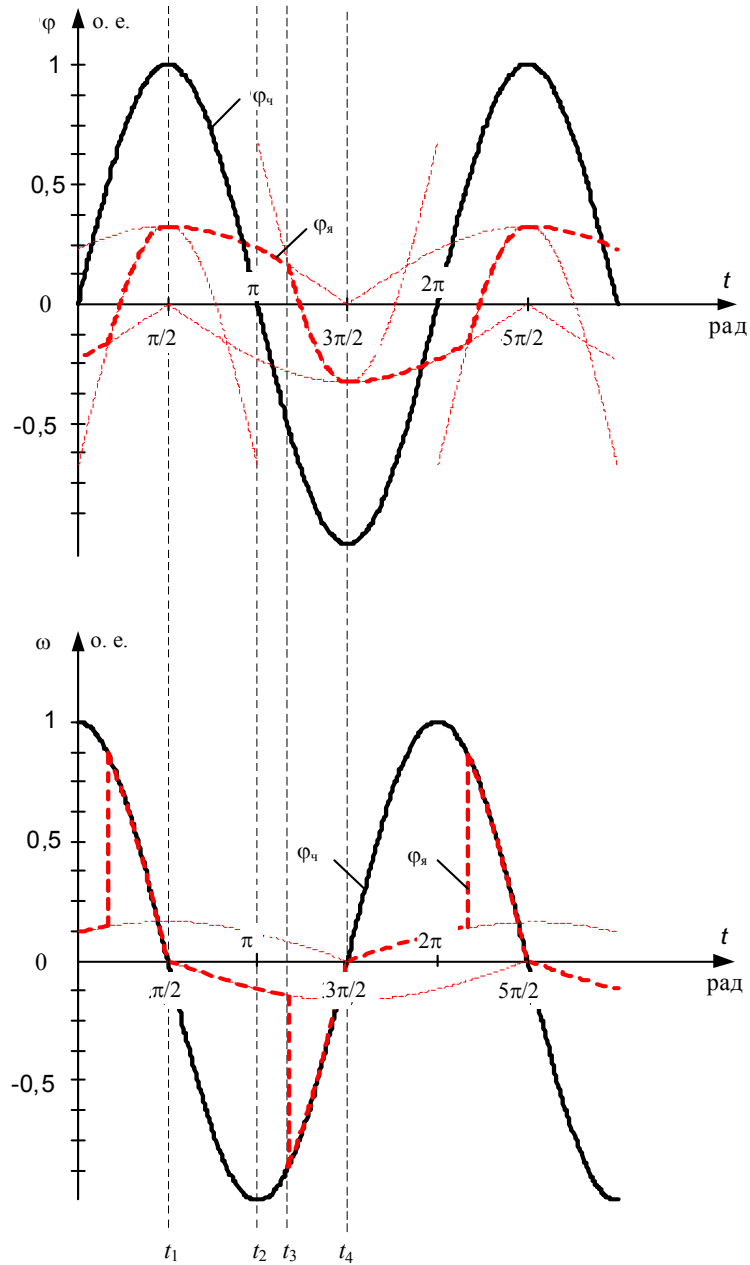


Рис. 3. Временные диаграммы изменения углов и скоростей чаши и языка колокола

Угол отклонения языка в момент соударения с чашей колокола из первого уравнения системы (8) или из второго уравнения системы (10)

$$\varphi_{\text{я}}(t_{\text{y}}) = -\varphi_{\text{мак.я}} \sin\left(m \cdot \omega_{0\text{ч}} t_{\text{y}} + \frac{3\pi}{2} \cdot [1 - m]\right) = -0,33 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4}\right) = -0,167.$$

Амплитуда скорости движения чаши

$$\omega_{\text{мак.ч}} = \varphi_{\text{мак.ч}} \omega_{0\text{ч}} = 1.$$

Амплитуда скорости движения языка

$$\omega_{\text{мак.я}} = \varphi_{\text{мак.я}} \cdot m \cdot \omega_{0\text{ч}} = 0,333 \cdot 0,5 = 0,167.$$

По найденным значениям параметров движения строим временную диаграмму (рис. 3).

Опишем основные этапы цикла движения чаши и языка:

Интервал от  $t_1$  до  $t_3$  на диаграмме – соответствует движению чаши и языка от положения максимального их отклонения до соударения. На данном интервале движение чаши определяется уравнением автоколебательного движения (1), а движения языка уравнением (2).

Момент времени  $t_3$  на диаграмме – соударение чаши и языка колокола. Происходит скачкообразное изменение скорости языка до значения скорости чаши.

Интервал от  $t_3$  до  $t_4$  на диаграмме – соответствует движению чаши и языка после соударения до положения максимального их отклонения. Траектории движения чаши и языка совпадают (язык «прилип» к чаше), закон их движения определяется следующим уравнением:

$$(J_{\text{ч}} + J_{\text{я}}) \cdot \ddot{\varphi} + (M_{\text{м.ч}} + M_{\text{м.я}}) \cdot \sin(\varphi) = M_{\text{дв}} - (M_{\text{с.ч}} + M_{\text{с.я}}).$$

Однако с учетом принятых выше допущений ( $J_{\text{ч}} \gg J_{\text{я}}$ ;  $M_{\text{м.ч}} \gg M_{\text{м.я}}$ ;  $M_{\text{с.ч}} \gg M_{\text{с.я}}$ ) можно считать, что закон движения чаши и языка определяется уравнением (1). Далее цикл движения повторяется.

### Заключение

В результате проделанной работы получены следующие результаты:

- предложен новый принцип построения привода чаши колокола на основе безредукторного асинхронного автоколебательного электропривода;
- разработана схема соединения обмоток асинхронного двигателя для его работы в автоколебательном режиме;
- создана математическая модель электропривода чаши колокола.
- проведено аналитическое исследование математической модели, построены временные диаграммы движения чаши и языка колокола, которые можно использовать для проектирования подобных электроприводов.

### Литература

1. Грачев, С. А. Безредукторный электропривод периодического движения / С. А. Грачев, В. И. Луковников. – Минск : Высш. шк., 1991. – 160 с.
2. Бондаренко, А. Ф. Московские колокола 17 века / А. Ф. Бондаренко. – Москва : Русская панорама, 1998. – 256 с.
3. Шымчак, П. Применение линейных двигателей для установок колебательного движения / П. Шымчак // Электротехника. – 2006. – № 6. – С. 10–14.
4. Луковников, В. И. Анализ электромеханической автоколебательной системы «асинхронный электродвигатель – упругий элемент» / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2003. – № 1. – С. 61–66.
5. Стенд динамических испытаний пружин : пат. 1С1 ВУ, МПК G01B 1/00, G01M 13/00 / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко. – № 2156 ; заявл. 14.02.2005 ; опубл. 30.09.2005 // Афіцыйны бюлетэнь / Дзярж. пат. ведамства Рэсп. Беларусь. – 2005. – № 3.
6. Sumec, I. K. Der einphasige Induktionsmotor / I. K. Sumec // Archiv der Math. Und Physik. – 1905. – Bd 8. – s. 306.



7. Власенков, В. М. Удар. Теория. Практика / В. М. Власенков, С. И. Феокистов. – Владивосток : Изд-во Дальневосточ. ун-та, 1987. – 158 с.
8. Луковников, В. И. Исследование автоколебательного движения асинхронного электродвигателя с маятником на валу / В. И. Луковников, Л. В. Веппер, В. В. Годарев // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2003. – № 1. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2003. – С. 53–60.

*Получено 17.12.2008 г.*