Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

ПОСОБИЕ
по дисциплине «Математика. Геометрия и алгебра»
для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования»
дневной формы обучения

Гомель 2019

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.14+22.15я73
Б12

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 11 от 10.09.2018 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Информатика» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *Т. А. Трохова*

Бабич, А. А.

Б12 Аналитическая геометрия и алгебра : пособие по дисциплине «Математика. Геометрия и алгебра» для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» днев. формы обучения / А. А. Бабич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 137 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены пять основополагающих тем: «Матричная алгебра», «Линейные системы», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Линейные пространства и операторы». Изложенный материал содержит большое количество графических иллюстраций и примеров.

Для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования».

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.14+22.15я73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие представляет собой сжатый курс лекций по дисциплине «Математика. Геометрия и алгебра» и предназначено для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» дневной формы. Цель пособия - представить в достаточно небольшом объеме весь основной теоретический материал, входящий в учебную программу дисциплины. Сжатость материала предполагает и стиль изложения. В частности, отсутствуют доказательства теорем. Тем не менее, даны указания к доказательствам, а содержание теорем и их смысл раскрываются с помощью серии примеров.

Для удобства поиска используется тройная нумерация определений, теорем, формул, примеров: (глава, параграф, порядковый номер). Специальные математические термины выделены жирным шрифтом, а важные и существенные для понимания фрагменты текста – курсивом.

Решения примеров заканчиваются символом ■.

ГЛАВА 1
МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Матрицы

При работе с массивами чисел часто удобно их не просто записывать в строчку, а каким либо образом группировать. Примером возможной группировки является запись чисел в виде таблиц. Такие таблицы могут рассматриваться как самостоятельные математические объекты. Для того чтобы эти объекты можно было использовать в вычислительных процедурах, необходимо определенным образом ввести операции над ними. В результате мы приходим к новому виду алгебры. Дадим соответствующие определения.

Опр. 1.1.1. ***Матрицей*** размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее ***элементами***.

Принято матрицы обозначать большими латинскими буквами A, B, C и т.д. При необходимости внизу указываются размеры матрицы. Например, $A_{3\times 4}$ – матрица, состоящая из трех строк и четырех столбцов.

Элементы матрицы обозначаются малыми латинскими буквами и снабжаются двумя индексами: a_{ij}. Первый индекс соответствует номеру строки, а второй номеру столбца, на пересечении которых и стоит данный элемент.

Для задания явного вида матриц используются либо две вертикальные черты, либо круглые или квадратные скобки:

$$\begin{Vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{Vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

По типу размеров выделяются:

- **матрица-столбец** (матрица, состоящая из одного столбца);
- **матрица-строка** (матрица, состоящая из одной строки);
- **квадратная матрица** (матрица, у которой число строк равно числу столбцов).

Спецификой квадратных матриц является наличие диагональных линий. Причем линия, на которой стоят элементы a_{ii}, то есть элементы с равными индексами, называется **главной диагональю** квадратной матрицы. Вторая диагональная линия называется **побочной диагональю**. Квадратные матрицы, у которой отличными от нуля могут быть только элементы, стоящие на главной диагонали, называются **диагональными матрицами**.

Опр. 1.1.2. **Единичной матрицей** называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1.

Единичные матрицы обозначаются буквами E или I.

Важными с точки зрения приложений являются следующие типы матриц со специальной структурой нулевых элементов:

- **нулевые матрицы** – матрицы, у которых *все* элементы равны нулю;
- **верхнетреугольные** (далее просто **треугольные**) **матрицы** – квадратные матрицы, у которых *все* элементы ниже главной диагонали равны нулю, то есть $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$;
- **трапециевидные матрицы** – матрицы, у которых равны нулю *все* элементы ниже линии одинаковых индексов для первых l строк и все элементы для оставшихся $m - l$ строк.

Отметим, что трапециевидными могут быть и квадратные матрицы.

Для введения операций над матрицами и возможности записи матричных формул и соотношений необходимо в первую очередь наделить множество матриц отношением равенства.

Опр. 1.1.3. Матрицы A и B равны, если
1) равны их размеры;
2) равны *все* их соответствующие элементы: $a_{ij} = b_{ij}$.

§ 2. Линейные операции над матрицами

Введем операции сложения матриц и умножения их на число.

Опр. 1.2.1. *Суммой матриц* A и B одного размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1.2.1)$$

для всех наборов индексов $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Опр. 1.2.2. *Произведением матрицы* A размера $m \times n$ на число λ называется матрица $B = \lambda A$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле:

$$b_{ij} = \lambda\, a_{ij} \qquad (1.2.2)$$

для всех наборов индексов $i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n}$.

Следует обратить внимание на то, что операции сложения матриц и умножения их на число не меняют размеров матриц. Кроме этого результат умножения матрицы A на число -1 принято записывать просто как $-A$, что позволяет ввести операцию вычитания матриц:

$$A - B = A + (-1)B. \qquad (1.2.3)$$

Пример 1.2.1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1) $A + 3B$; 2) $B - 2C$.

Решение.

1). Операция сложения $A + 3B$ не определена, так как матрицы A и $3B$ имеют разные размеры.

2). Используя определения операций сложения матриц и умножения их на число, последовательно находим:

$$B - 2C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -8 & 12 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 13 \\ -7 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad ■$$

При выполнении сложных операций, состоящих из нескольких действий, необходимо четко определить возможный порядок этих действий так, чтобы результат был однозначно определен. По сути, однозначность достигается путем замены одной комбинации матриц другой равной ей комбинацией. Наиболее важные матричные равенства, имеющие общий характер, выделяются в особую категорию соотношений и наделяются статусом свойств операций.

Теорема 1.2.1.

Операции сложения матриц и умножения их на число обладают следующими общими свойствами:

1). $A + B = B + A$, (коммутативность суммы)

2). $A + (B + C) = (A + B) + C$, (ассоциативность суммы)

3). $A + 0 = A$, (свойство нулевой матрицы)

4). $A + (-A) = 0$, (свойство противоположной матрицы)

5). $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (ассоциативность умножения на число)

6). $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, (дистрибутивность)

7). $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, (дистрибутивность)

8). $1 \cdot A = A$. (свойство единичного коэффициента)

Доказательство теоремы основано на простой проверке равенств. Согласно формулам (1.2.1) и (1.2.2) рассматриваемые операции над матрицами сводятся к арифметическим действиям сложения и умножения над числами, представляющие собой либо элементы матриц, либо числовые коэффициенты. Поэтому свойства 1) – 8), по существу, повторяют известные законы арифметики.

Из свойств 1) и 2) следует, что матрицы можно складывать в любом порядке. В свою очередь свойства дистрибутивности 6) и 7) указывают на возможность вынесения общего множителя за скобки, причем этим множителем может быть как матрица, так и числовой коэффициент.

В общей алгебре операции, которые не меняют тип математических объектов и обладают свойствами 1) – 8), называются линейными. Таким образом, операции сложения матриц и умножения их на число есть *линейные операции над матрицами*.

§ 3. Умножение матриц

Рассмотрим операцию умножения матриц. Пусть имеются матрица A размера $m \times k$ и матрица B размера $k \times n$.

Опр. 1.3.1. *Произведением матриц* $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется матрица $C = AB$ размера $m \times n$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \qquad (1.3.1)$$

для всех наборов индексов $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Из определения следует, что умножать матрицы друг на друга можно только, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. При этом первые множители берутся из строки матрицы A с номером i, а вторые из столбца матрицы B с номером j, то есть говорят, что «матрицы умножаются – строка на столбец».

<u>Пример 1.3.1</u>. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (4 \quad 2 \quad -1), \quad C = (-5 \quad 2 \quad 3).$$

Найти: 1) AB; 2) BC; 3) CA.

<u>Решение.</u>

1). Матрица A имеет размер 3×1, а матрица B – 1×3. Таким образом, произведение AB определено, причем результирующая матрица будет иметь размер 3×3. Элементы этой матрицы вычислим по формуле (1.3.1):

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} (4 \quad 2 \quad -1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 4 & (-3) \cdot 2 & (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2). Матрица B имеет размер 1×3, матрица C имеет такой же размер 1×3. Так число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы C, то их произведение BC не определено.

3). Матрица C имеет размер 1×3, а матрица A – 3×1. Результатом их произведения будет матрица размера 1×1:

$$CA = (-5 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \big((-5) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1\big) = (-13). \qquad \blacksquare$$

<u>Пример 1.3.2</u>. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$ Найти: 1) AB; 2) BA.

<u>Решение.</u>

Используя формулу (1.3.1), последовательно находим:

1). $$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2). $$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 1 & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Последний пример показывает, что произведение матриц в общем случае некоммутативно, то есть $AB \neq BA$. Тем не менее, анализируя размеры матриц, можно сделать вывод, что квадратные матрицы одного порядка все-таки могут коммутировать. В частности, коммутируют между собой все диагональные матрицы, а единичная матрица E порядка n коммутирует со всеми квадратными матрицами того же порядка и имеют место равенства:

$$AE = EA = A. \tag{1.3.2}$$

В общей алгебре элементы, которые удовлетворяют соотношениям типа (1.3.2), называются единичными. Таким образом, единичные матрицы E являются *единичными элементами* в алгебре квадратных матриц.

Перейдем к обсуждению других свойств операции умножения.

Теорема 1.3.1.

Операция умножения матриц обладает следующими общими свойствами:

1). $A(BC) = (AB)C,$ (ассоциативность произведения)

2). $A(B + C) = AB + AC,$ (дистрибутивность)

3). $(A + B)C = AC + BC,$ (дистрибутивность)

4). $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B),$ (однородность)

5). $A0 = 0;\ \ 0A = 0.$ (свойство нулевой матрицы)

Здесь λ – числовой коэффициент, и неявно предполагается, что все произведения матриц определены. Кроме этого, так как в общем случае матрицы не коммутируют, то необходимо отдельно рассмотреть свойства для умножения матриц слева и справа.

Доказательство теоремы основано на проверке соотношений с использованием определения операции матричного умножения.

Наличие ассоциативности как общего свойства позволяет однозначно определить произведение нескольких матриц, а для квадратных матриц ввести понятие степени:

$$A^2 = AA, \tag{1.3.3}$$
$$A^n = AA^{n-1}. \tag{1.3.4}$$

Все обычные алгебраические свойства степеней с натуральным показателем сохраняются, в том числе и свойство коммутации:

$$A^m A^n = A^n A^m. \qquad (1.3.5)$$

Поэтому для любой квадратной матрицы A можно помимо матриц кратных единичной λE найти и другие коммутирующие с ней матрицы, например, A^2, A^3 и т.д.

Важнейшим следствием ассоциативности произведения является возможность введения функций над квадратными матрицами. Простейшей матричной функцией является многочлен:

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E, \qquad (1.3.6)$$

где E – единичная матрица.

<u>Пример 1.3.2</u>. Многочлен $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ рассматривается как функция в пространстве квадратных матриц $M_{2\times 2}$ второго порядка. Найти значение многочлена для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u>

Предварительно вычислим:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 4 + 4\cdot 2 \\ (-1)\cdot 3 + 2\cdot(-1) & (-1)\cdot 4 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее находим:

$$f(A) = 2A^2 - 3A + E = 2\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 28 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

■

Свойства дистрибутивности и однородности 2) – 4) позволяют корректно согласовать операцию умножения матриц с линейными операциями. Сама операция умножения линейной, безусловно, не является, так как она в общем случае меняет размеры матриц.

§ 4. Транспонирование матриц

Сложение и умножение матриц относятся к типу бинарных операций. Матрицы, как таблицы чисел, позволяют естественным образом ввести важную унарную операцию.

Опр. 1.4.1. *Транспонированием* матриц называется операция, заключающейся в преобразовании матрицы A размера $m \times n$ в матрицу A^{T} размера $n \times m$, элементы которой определяются как

$$a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji} \qquad (1.4.1)$$

для всех наборов индексов $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Формально транспонирование меняет порядок индексов у матричных элементов. Но это означает, что строки транспонированной матрицы A^{T} совпадают со столбцами исходной матрицы A, а столбцы – со строками. Поэтому часто говорят о транспонировании матрицы просто как о перестановке ее строк и столбцов местами.

Пример 1.4.1. Выполнить операцию транспонирования для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B = (4 \quad 3 \quad -2), \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Согласно определению (1.4.1) получаем

$$A^{\mathrm{T}} = (7 \quad -2 \quad 3), \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Особенностью транспонирования квадратных матриц является сохранение их порядка. При этом появляется возможность рассмотреть два типа специальных матриц.

Опр. 1.4.2. Матрица A называется **симметричной,** если

$$A^{\mathrm{T}} = A, \qquad (1.4.2)$$

и **антисимметричной**, если

$$A^{\mathrm{T}} = -A. \qquad (1.4.3)$$

С учетом (1.4.1) для элементов симметричных матриц имеем

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (1.4.4)$$

Это означает, что элементы матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу. Этим и объясняется название данного типа матриц.

Аналогично для антисимметричных матриц получаем

$$a_{ij} = -a_{ji}. \qquad (1.4.5)$$

Отсюда для диагональных элементов находим

$$a_{ii} = -a_{ii} \quad \Rightarrow \quad a_{ii} = 0.$$

Таким образом, все диагональные элементы антисимметричных матриц равны нулю.

Пример 1.4.2.

Примеры симметричных матриц: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Примеры антисимметричных матриц: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

■

Преобразования матричных выражений, составленных с помощью разных операций над матрицами, включая и транспонирование, выполняются по определенным правилам. Правила, согласующие операции между собой, называются *свойствами операций*.

Теорема 1.4.1.

Операция транспонирования матриц обладает следующими общими свойствами:

1). $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$, (закон инволюции)

2). $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$,

3). $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$,

4). $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Все свойства доказываются непосредственно по определению операций. Особо отметим, что согласно свойству 4) при транспонировании меняется порядок матриц-сомножителей. Это свойство непосредственно обобщается и на произведение любого количества матриц.

§ 5. Перестановки и подстановки

В этом параграфе будут изложены вспомогательные сведения, необходимые для введения важных числовых характеристик матриц.

Опр. 1.5.1. **Перестановкой порядка n** называется всякий упорядоченный набор первых n натуральных чисел:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Понятие перестановки является общим комбинаторным понятием и его можно ввести для любого конечного множества. При этом элементы множества должны быть различимыми. Различимость элементов позволяет их пронумеровать и в дальнейшем работать только с наборами номеров.

Теорема 1.5.1.

Число различных перестановок порядка n вычисляется по формуле:

$$P_n = n! \tag{1.5.1}$$

Доказательство теоремы можно провести с помощью метода математической индукции.

Опр. 1.5.2. Всякое взаимно однозначное отображение π множества первых n натуральных чисел в себя называется **подстановкой порядка $\boldsymbol{n}$**.

Подстановку, как отображение конечного множества, удобно записывать в виде таблицы, состоящей из двух сток. Первая строка соответствует начальному набору чисел, а вторая ее образу:

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_n \\ j_1\ j_2 \cdots j_n \end{pmatrix},\ \text{где}\ j_k = \pi(i_k),\ \ k = \overline{1,n}.$$

В принципе начальный набор может быть записан в любом порядке. Говорят, что подстановка имеет *канонический вид*, если начальный набор чисел записан в порядке возрастания:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Такая форма записи позволяет однозначно определять подстановку, указывая только второй набор чисел:

$$\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

тем самым устанавливая взаимно однозначное соответствие (*биекцию*) между множеством подстановок и множеством перестановок одного порядка. Теперь отношение равенства на множестве подстановок можно ввести по аналогии с равенством перестановок.

Опр. 1.5.3. Подстановки $\pi_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и $\pi_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ равны, если

1) равны их порядки: $m = n$;
2) равны все их соответствующие образы: $\alpha_k = \beta_k$.

В силу биекции число различных подстановок совпадает с числом различных перестановок того же порядка и вычисляется по формуле (1.5.1.).

Подстановки как преобразования допускают введения между ними естественной бинарной операции.

Опр. 1.5.4. **Композицией** подстановок π_1 и π_2 одного порядка n называется подстановка $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ того же порядка, где

$$\gamma_k = \pi_2(\pi_1(k)), \quad k = \overline{1, n}\,. \qquad (1.5.2)$$

По сути, композиция подстановок – это просто повторное отображение исходного набора чисел. Поэтому композицию $\pi_1 \circ \pi_2$ удобно выполнять, записывая подстановки следующим образом

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}. \qquad (1.5.3)$$

В частности, находим

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}. \qquad (1.5.4)$$

Пример 1.5.1. Даны подстановки $\pi_1 = (3\ 1\ 2\ 4)$ и $\pi_2 = (4\ 3\ 1\ 2)$. Найти а) $\pi_1 \circ \pi_2$; б) $\pi_1 \circ \pi_2$.

Решение.

Используя правило (1.5.3), последовательно получаем

а) $\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv (1\ 4\ 3\ 2)$;

б) $\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv (4\ 2\ 3\ 1)$.

■

Как следует из примера, $\pi_1 \circ \pi_2 \neq \pi_2 \circ \pi_1$, и в общем случае композиция некоммутативна. Тем не менее, она ассоциативна, то есть соотношение

$$\pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3) = (\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3 \qquad (1.5.5)$$

выполняется для любых трех подстановок одного порядка.

Опр. 1.5.5. Подстановка

$$e = \begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \cdots i_n \\ i_1 \, i_2 \cdots i_n \end{pmatrix} \equiv (1, 2, \dots, n) \qquad (1.5.6)$$

называется **тождественной**.

Для тождественной подстановки справедливы равенства

$$\pi \circ e = e \circ \pi = \pi. \qquad (1.5.7)$$

Поэтому она играет роль единичного элемента в алгебре подстановок.

Опр. 1.5.6. Подстановка π^{-1} называется **обратной** для подстановки π, если

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = e. \qquad (1.5.8)$$

Из (1.5.4) следует, что для $\pi = \begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \cdots i_n \\ j_1 \, j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$ обратной будет подстановка вида $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 \, j_2 \cdots j_n \\ i_1 \, i_2 \cdots i_n \end{pmatrix}$. В частности, $e^{-1} = e$.

Итак, подстановки образуют множество, содержащее единичный элемент с композицией, которая является ассоциативной бинарной операцией, причем каждый элемент множества обратим. Такие множества в общей алгебре называются группами. Таким, образом, подстановки образуют группу. Она называется *симметрической группой.*

Опр. 1.5.7. Упорядоченная пара натуральных чисел (a, b) называется **инверсной,** если большее число стоит левее меньшего.

Обозначим через $S(\pi)$ число всех инверсных пар, содержащихся в подстановке $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, записанной в каноническом виде. Подсчет удобно вести по формуле

$$S(\pi) = S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}, \qquad (1.5.9)$$

где S_k – число инверсных пар для числа k.

Опр. 1.5.8. Подстановка π называется **четной**, если число всех ее инверсных пар $S(\pi)$ четно, и **нечетной**, если $S(\pi)$ – нечетно. Число

$$\sigma(\pi) = (-1)^{S(\pi)} \tag{1.5.10}$$

называется **четностью** подстановки.

Заметим, что понятие четности не зависит от формы записи подстановок и разбивает множество всех подстановок одного порядка на два класса. Классу четных подстановок приписывается число $+1$, а нечетному -1.

Пример 1.5.2. Определить четность подстановки $\pi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Запишем подстановку в каноническом виде:

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv (2\ 4\ 5\ 3\ 1).$$

Тогда, используя формулу (1.5.9), находим:

$$S(\pi) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 + 0 + 2 + 0 = 6.$$

Таким образом, π – четная подстановка и $\sigma(\pi) = +1$. ■

Отметим следующие свойства четности:

$$\sigma(\pi_1 \circ \pi_2) = \sigma(\pi_1)\sigma(\pi_2), \tag{1.5.11}$$
$$\sigma(\pi^{-1}) = \sigma(\pi). \tag{1.5.12}$$

Опр. 1.5.9. **Транспозицией** подстановки называется перестановка местами любых двух ее образов:

$$\pi = (\dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots) \rightarrow \pi' = (\dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots).$$

По-существу, транспозиция представляет собой простую унарную операцию.

Теорема 1.5.2.

Любая транспозиция меняет четность подстановки.

Для перестановки двух соседних чисел теорема очевидна, так как если пара (α_k, α_{k+1}) была инверсной, то пара (α_{k+1}, α_k) будет неинверсной, и наоборот. При этом числа инверсных пар с другими числами сохраняется. Доказательство общего результата основано на подсчете числа транспозиций соседних чисел, цепочка которых позволяет восстановить исходный порядок образов.

§ 6. Определитель матрицы

Пусть задана квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ порядка n.

<u>*Опр. 1.6.1.*</u> **Определителем** квадратной матрицы A называется число Δ, вычисляемое по формуле:

$$\Delta = \sum_\pi \sigma(\pi) a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \qquad (1.6.1)$$

где сумма берется по всем возможным подстановкам $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\sigma(\pi)$ – четность подстановки.

Для определителей матриц приняты следующие обозначения:

$$\Delta \equiv \det A \equiv |a_{ij}|.$$

Сумма в формуле (1.6.1) содержит $n!$ слагаемых, которые называются членами определителя. Каждый член представляет собой произведение n сомножителей, которые в свою очередь являются элементами матрицы A, стоящими в разных строках и столбцах.

Выпишем явные формулы для вычисления определителей низших порядков.

<u>*Определитель 1-го порядка*</u>:

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}. \qquad (1.6.2)$$

<u>*Определитель 2-го порядка*</u>:

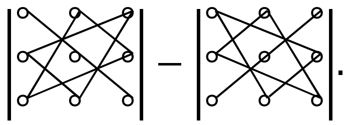
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.6.3)$$

<u>*Определитель 3-го порядка:*</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.6.4)$$

Вычисление определителей третьего порядка можно выполнять *по правилу треугольника*, которое представляет собой расчет по графической схеме вида



Пример 1.6.1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Выписывая члены определителя по правилу треугольника, находим

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 4 - (4\cdot 5\cdot(-3) + (-2)\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 3) =$$

$$= 20 + 18 + 8 - (-60 - 16 + 3) = 46 - (-73) = 119.$$

Ответ: 119. ■

Заметим, что уже определитель 4-го порядка содержит $4! = 24$ члена, каждый из которых представляет собой произведение четырех сомножителей. Поэтому расчет определителей порядка выше трех непосредственно по формуле (1.6.1) становится чрезвычайно громоздким. Расчеты можно значительно упростить, если использовать свойства определителей.

Свойства определителей.

I. Операция транспонирования не меняет определителя матриц:

$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A. \quad (1.6.5)$$

II. При перестановке любых двух строк местами определитель меняет знак.

III. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

IV. Если строка определителя пропорциональна какому-либо числу λ, то это число можно вынести за знак определителя.

V. Определитель с нулевой строкой равнее нулю.

VI. Определитель, у которого некоторая строка $\bar{a}_k$ представляется в виде суммы двух строк $\bar{a}_k = \bar{b}_k + \bar{c}_k$, равен сумме определителей со строками $\bar{b}_k$ и $\bar{c}_k$ соответственно.

VII. Определитель не изменится, если к его строке добавить любую линейную комбинацию других его строк.

Доказательство свойств I-VII основано на использовании формулы (1.6.1) с учетом свойств подстановок и их четностей. Следует отметить, что, так как при транспонировании матриц строки и столбцы меняются местами, то согласно свойству I все утверждения, сформулированные для строк, автоматически переносятся и на столбцы. Определитель есть полилинейная функция элементов матрицы, а поэтому свойствами линейности не обладает:

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B,$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \qquad (1.6.5)$$

где n- порядок матриц A и B, а λ - числовой коэффициент.

<u>*Опр. 1.6.2.*</u> **Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$** матрицы A, называется определитель матрицы, полученной из A путем удаления i-ой строки и -го столбца.

<u>*Опр. 1.6.3.*</u> **Алгебраическим дополнением элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$** квадратной матрицы A, называется число A_{ij}, вычисляемое по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.6.6)$$

Теорема 1.6.1.

Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов матрицы, стоящих в некоторой строке или столбце, на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{для } \forall i, \qquad (1.6.7)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{для } \forall j. \qquad (1.6.8)$$

Представление определителя в виде сумм (1.6.7) и (1.6.8) называется разложением Лапласа. При этом сумма вида (1.6.7) называется разложением по -ой строке, а сумма вида (1.6.8) – разложением по j-ому столбцу. Значение определителя не зависит от номера строки или столбца. Их выбор производится с учетом простоты вычислений. На практике предпочтение отдается строкам или столбцам с большим количеством нулей. При этом зануление элементов определителя можно осуществлять предварительно с помощью свойства VII. В частности, строки (столбцы) можно складывать или вычитать.

Значимость Теоремы 1.6.1 заключается в том, что использование разложения Лапласа позволяет свести задачу вычисления определителя порядка n к задаче вычисления определителей на порядок меньше.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.6.2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 23 & 24 & 25 \\ 9 & 3 & 18 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Третья строка пропорциональна числу 3. На основании свойства IV вынесем этот множитель за знак определителя:

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 23 & 24 & 25 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся свойством VII применительно к столбцам определителя, а именно, вычтем из первого и второго столбцов третий столбец, получим

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & 25 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Далее прибавим ко второй строке первую:

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 35 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Наконец, раскладывая определитель по второй строке, последовательно получаем:

$$\Delta = 3 \cdot 35 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -105 \cdot (-10 + 3) = -105 \cdot (-7) = 735.$$

Ответ: 735.

■

Пример 1.6.3. Вычислить **определитель треугольной матрицы**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решение.

В первом столбце все элементы ниже первого равны нулю. Поэтому выполняя разложение Лапласа по первому столбцу, находим:

$$\Delta_n = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая разложение по первому столбцу, окончательно получаем:

$$\Delta_n = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \, . \tag{1.6.9}$$

■

Из последнего примера следует, что определитель любой треугольной матрицы равен произведению только диагональных элементов, при этом внедиагональные элементы не влияют на значение определителя. В частности, для единичной матрицы имеем:

$$\det E = 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1. \tag{1.6.10}$$

Приведение определителя к треугольному виду с последующим использованием формулы (1.6.9) является одним из эффективных методов их вычисления.

Еще одним общим приемом является представление квадратных матриц в блочном виде. Тогда вычисление определителей матриц в ряде случаев сводится к вычислению определителей блоков. Так имеют место соотношения:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A \cdot \det D, \tag{1.6.11}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\cdot\det(A-B). \qquad (1.6.12)$$

Согласно определению 1.6.1 определитель является числовой характеристикой только квадратных матриц. Однако квадратные матрицы можно получить и из прямоугольных матриц, используя операцию умножения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6.2.

Пусть заданы матрица A порядка $m \times n$ и матрица B порядка $n \times m$. Тогда

$$1).\ \det(AB) = 0, \quad \text{если} \quad m > n;$$

$$2).\ \det(AB) = \det A \cdot \det B, \quad \text{если} \quad m = n. \qquad (1.6.13)$$

Соотношение (1.6.13) для случая произведения двух квадратных матриц одного порядка часто называют *законом мультипликативности* для определителей.

§ 7. Обратная матрица

Опр. 1.7.1. Матрица B называется **обратной** для матрицы A, если она удовлетворяет соотношениям

$$AB = BA = E. \qquad (1.7.1)$$

Из левого равенства непосредственно следует, что обратные матрицы могут существовать только для квадратных матриц, так как только квадратные матрицы могут коммутировать. Используя закон мультипликативности для определителей, из (1.7.1) с учетом (1.6.10) находим

$$\det A \cdot \det B = 1. \qquad (1.7.2)$$

Следовательно, определитель обратимой матрицы отличен от нуля.

Опр. 1.7.2. Квадратные матрицы с отличным от нуля определителем называются **невырожденными**.

Таким образом, обратные матрицы существуют только для невырожденных матриц. Их принято обозначать как A^{-1}.

Теорема 1.7.1.

Для всякой невырожденной матрицы A существует и притом единственная обратная ей матрица A^{-1}, которая имеет вид

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad (1.7.3)$$

где $\Delta = \det A$ и A_{ij} – алгебраические дополнения.

Доказательство теоремы основано на проверке соотношений

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Пример 1.7.1. Для матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$$

найти обратную ей матрицу A^{-1}, если она существует.

Решение.

В первую очередь вычислим определитель заданной матрицы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 4 - (4\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 3 + (-2)\cdot 2\cdot 3) =$$

$$= 6 + 8 + 36 - (-16 + 9 - 12) = 50 - (-19) = 69.$$

Так как $\Delta = 69 \neq 0$, то заданная матрица A является невырожденной и обратная ей матрица существует. Далее вычислим все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -22; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Наконец, по формуле (1.7.3) находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{69}\begin{Vmatrix} -9 & -1 & 13 \\ 9 & -22 & 10 \\ 6 & 16 & -1 \end{Vmatrix}^T = \frac{1}{69}\begin{Vmatrix} -9 & 9 & 6 \\ -1 & -22 & 16 \\ 13 & 10 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{1}{69} & -\frac{22}{69} & \frac{16}{69} \\ \frac{13}{69} & \frac{10}{69} & -\frac{1}{69} \end{Vmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \frac{1}{69}\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -9 & 9 & 6 \\ -1 & -22 & 16 \\ 13 & 10 & -1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{69}\begin{Vmatrix} 69 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & 0 \\ 0 & 0 & 69 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E \text{ −верно.}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{1}{69} & -\frac{22}{69} & \frac{16}{69} \\ \frac{13}{69} & \frac{10}{69} & -\frac{1}{69} \end{Vmatrix}$. ■

Переход от матрицы A к обратной матрице A^{-1} можно рассматривать как своего рода унарную операцию обратимости на множестве невырожденных матриц. А значит, можно говорить и о свойствах этой операции. Понятно, что эти свойства существенно нелинейны и, например,

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1},$$

в чем нетрудно убедиться простой проверкой определяющего соотношения (1.7.1). Имеют место следующие общие результаты.

Теорема 1.7.2.

Пусть A и B невырожденные матрицы одного порядка. Тогда для обратных матриц справедливы соотношения:

1). $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ для $\forall \lambda \neq 0$, (1.7.4)

2). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, (1.7.5)

3). $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (1.7.6)

§ 8. Ранг матриц

Введем предварительно общее понятие минора, которое применительно не только к квадратным, но и к прямоугольным матрицам любого порядка $m \times n$. Выделим в матрице какие-либо p строк и p столбцов. Очевидно, что число p не должно превышать наибольшего из чисел m и n, определяющих порядок матрицы.

Опр. 1.8.1. **Минором порядка p** матрицы A называется определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении выделенных p строк и p столбцов матрицы A.

Отметим, что матрица может иметь несколько миноров одного порядка. Так, например, число миноров первого порядка совпадает с числом элементов матрицы. Поэтому для миноров определенного порядка используются следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix},$$

где в первой строке указаны номера выделенных строк, во второй – номера выделенных столбцов исходной матрицы.

Пример 1.8.1.

Для матрицы $A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$ найти указанные миноры.

Миноры второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = 8; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 6 = 21.$$

Миноры третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 - 20 - (8 + 6 + 50) = -13 - 64 = -77;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 + 80 - (4 - 24 + 30) = 85 - 10 = 75. \quad \blacksquare$$

Опр. 1.8.2. **Рангом** матрицы A называется наибольший порядок отличных от нуля миноров, порождаемых этой матрицей.

Таким образом, ранг матрицы A из примера 1.8.1 равен 3, так как она имеет миноры третьего порядка неравные нулю, а миноры четвертого порядка не существуют.

В дальнейшем ранг матрицы будет обозначаться как $\mathrm{rg}\, A$.

Отметим следующие простые свойства рангов матриц.

I. Ранг равен нулю только для нулевых матриц:

$$\mathrm{rg}\, A = 0 \;\Leftrightarrow\; A = \mathrm{O}.$$

II. Транспонирование не меняет ранга матриц

$$\mathrm{rg}\, A^{\mathrm{T}} = \mathrm{rg}\, A. \tag{1.8.1}$$

III. Ранг невырожденной квадратной матрицы равен ее порядку.

IV. Если квадратные матрицы $A_{m\times m}$ и $C_{n\times n}$ невырождены, то для любой матрицы B порядка $m \times n$ справедливы равенства:

$$\mathrm{rg}\, AB = \mathrm{rg}\, B = \mathrm{rg}\, BC = \mathrm{rg}\, ABC. \tag{1.8.2}$$

Вычислить ранг матрицы можно непосредственно по определению. При этом вычисления удобно начинать с верхнего левого элемента матрицы, увеличивая систематически порядок миноров на единицу. Такой метод расчета называется *методом окаймляющих миноров.* Для матриц больших размеров этот метод не является эффективным, так как возникает проблема вычисления определителей высоких порядков.

Наиболее просто ранги вычисляются для матриц, имеющих трапециевидную форму. Для них ранг равен числу ненулевых строк. Действительно, все левые верхние миноры трапециевидной матрицы имеют треугольный вид, а значит, равны произведению элементов a_{kk}, стоящих на линии одинаковых индексов. Если трапециевидная матрица имеет l ненулевых строк, то наибольший порядок ненулевого минора как раз и равен l, поскольку любой минор более высокого порядка обязательно захватывает нулевую строку и, поэтому, равен нулю.

Назовем *элементарными* следующие преобразования над матрицами:

1) умножение строки (столбца) на любое число отличное от нуля;
2) перестановку любых строк (столбцов) местами;
3) прибавление к строке (столбцу) любой линейной комбинации других строк (столбцов).

Теорема 1.8.1.

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Доказательство теоремы основано на свойствах определителей. Данная теорема позволяет сформулировать очень простой алгоритм вычисления ранга матрицы, а именно:

Шаг 1. Используя элементарные преобразования, привести матрицу к трапециевидной форме.
Шаг 2. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк полученной матрицы.

Пример 1.8.1. Найти ранг матрицы $A = \begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{Vmatrix}$.

Решение.

Воспользуемся методом элементарных преобразований и приведем матрицу к трапециевидной форме. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, из третьей строки вычтем вторую, а из четвертой – первую, получим

$$A \sim \begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Далее из четвертой строки вычтем вторую:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix},$$

а затем из четвертой – третью:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В результате нам удалось привести матрицу A к трапециевидной форме. При этом число ненулевых строк полученной матрицы равно 3, поэтому и ранг исходной матрицы A равен 3.

Ответ: $\mathrm{rg}\, A = 3$. ■

Более глубокое содержание понятия ранга матрицы будет раскрыто в последующих разделах курса.

ГЛАВА 2
ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m алгебраических уравнений первой степени с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

<u>*Опр. 2.1.1.*</u> Система вида (2.1.1) называется **системой линейных уравнений (линейной системой)**. При этом числа a_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ называются коэффициентами системы, b_i $(i = \overline{1,m})$– свободными членами, а x_j $(j = \overline{1,n})$ – неизвестными.

Введем матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \|a_{ij}\|$$ – матрица коэффициентов;

$$B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Vmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов;

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных.

Тогда линейную систему (2.1.1), используя операцию умножения матриц, можно записать в форме матричного уравнения:

$$AX = B. \tag{2.1.2}$$

Опр. 2.1.2. Линейная система, у которой все свободные члены b_j равны нулю, называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной.**

Согласно определению однородная линейная система в матричной форме имеет вид

$$AX = 0. \tag{2.1.3}$$

Опр. 2.1.3. **Решением** системы (2.1.1) называется всякий упорядоченный набор чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, после подстановки, которых вместо неизвестных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство. При этом линейные системы, имеющие хотя бы одно решение, называются **совместными**, а не имеющие решения – **несовместными**.

Понятно, что однородные системы всегда совместны, так как имеют, по крайней мере, нулевое (тривиальное) решение. Решить систему – это значит найти все ее решения или доказать, что система несовместна. В принципе вопрос совместности линейной системы может быть решен до определения решения системы в явном виде. Введем так называемую расширенную матрицу системы $\tilde{A}$ порядка $m \times (n+1)$, добавляя к матрице коэффициентов A справа столбец свободных членов B:

$$\tilde{A} = \|A \vdots B\|.$$

Теорема 2.1.1 (*теорема Кронекера – Капелли***).**

Линейная система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу ее расширенной матрицы $\tilde{A}$:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}. \tag{2.1.4}$$

Следует отметить, что на практике задача определения рангов матриц системы решается непосредственно в процессе решения самой системы. Поэтому теорема Кронекера–Капелли имеет скорее теоретический, чем практический интерес.

Любое решение систем уравнений, так или иначе, связано с их преобразованиями, целью которых является либо упрощение системы, либо приведение ее к некоторой стандартной форме. Но не любые преобразования допустимы.

<u>*Опр. 2.1.4.*</u> Линейные системы называются **равносильными**, если множества их решений совпадают.

Таким образом, допустимыми являются только равносильные преобразования.

§ 2. Невырожденные системы

В приложениях часто встречаются так называемые квадратные линейные системы, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. В матричной форме они имеют обычный вид

$$AX = B, \tag{2.2.1}$$

но здесь матрица коэффициентов A есть некоторая квадратная матрица.

<u>*Опр. 2.2.2.*</u> Квадратная линейная система (2.2.1) называется **невырожденной**, если ее матрица коэффициентов A невырождена ($\det A \neq 0$), и **вырожденной**, если матрица A вырождена ($\det A = 0$).

В первую очередь рассмотрим невырожденные системы.

Теорема 2.2.1.

Всякая невырожденная линейная система (2.2.1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле

$$X = A^{-1}B. \tag{2.2.2}$$

Действительно, всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу. Тогда умножая матричное уравнение (2.2.1) слева на обратную матрицу A^{-1}, получаем

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Метод решения невырожденных систем с использованием формулы (2.2.2) называется *матричным методом*.

Из теоремы моментально следует, что невырожденная однородная система $AX = 0$ имеет только одно нулевое решение, которое принято называть тривиальным. Но в приложениях в случае однородных систем интерес представляют как раз нетривиальные решения.

Теорема 2.2.2.

Квадратная однородная система $AX = 0$ имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда она вырождена, то есть когда определитель ее матрицы коэффициентов равен нулю:

$$\det A = 0. \qquad (2.2.3)$$

Решение невырожденных систем матричным способом по формуле (2.2.2) довольно трудоемко, так как связано с вычислением обратных матриц. Имеется более простой алгоритм решения невырожденных систем.

Теорема 2.2.3.

Решение невырожденной системы (2.2.1) может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (2.2.4)$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы A путем замены -го столбца столбцом свободных членов B.

Решение линейных систем по формулам (2.2.4) принято называть *правилом Крамера*. Формулы Крамера (2.2.4) являются следствиями формулы (2.2.2). Они выводятся путем подстановки в (2.2.2) явного выражения для обратной матрицы (1.7.3) с учетом разложения Лапласа и свойств определителей.

Пример 2.1.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -1, \\ -3x + y + 4z = 2, \\ 4x - y + 3z = 5. \end{cases}$$

Решение.

1). Сначала вычислим определитель матрицы коэффициентов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 48 - 6 - (-8 - 27 - 8) = 48 + 43 = 91.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система невырождена и имеет единственное решение.

2). Далее последовательно находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 60 + 4 - (-10 + 18 + 4) = 61 - 12 = 49;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 16 + 30 - (-16 + 9 + 40) = 26 - 33 = -7;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 24 - 3 - (-4 - 45 - 4) = 31 + 53 = 84.$$

3). Наконец, решение системы получаем по формулам Крамера (2.2.3):

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{49}{91} = \frac{7}{13}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{91} = -\frac{1}{13}, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{84}{91} = \frac{12}{13}.$$

Ответ: $\left(\frac{7}{13}, -\frac{1}{13}, \frac{12}{13}\right)$. ■

§ 3. Метод Гаусса-Жордана

Рассмотрим линейные системы общего вида (2.1.2). Универсальным методом решения произвольной линейной системы является метод Гаусса. Суть этого метода заключается в систематическом исключении неизвестных и приведении системы к наипростейшему виду, удобному для окончательного решения. При этом преобразования значительно упрощаются, если их проводить над расширенной матрицей системы, а не над уравнениями. Опишем алгоритм Гаусса.

Шаг 1. Выписать расширенную матрицу системы $\tilde{A} = \|A \vdots B\|$.

Ранее в Гл.1 §8 были введены элементарные преобразования над матрицами. Следует отметить, что элементарные преобразования, выполняемые над строками расширенной матрицы системы, не могут изменить множество решений системы, так как они связаны с простой перестановкой уравнений, умножением уравнений на числа, отличные от нуля, а также со сложением уравнений или их вычитанием.

Шаг 2. С помощью элементарных преобразований над строками расширенной матрицы $\tilde{A}$ занулить все элементы матрицы ниже линии одинаковых индексов $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$. При этом расширенная матрица может быть приведена к одному из следующих трех видов:

– *ступенчатый*:
$$\tilde{A} \sim \left\| \begin{array}{cccccc:c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1l} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2l} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{ll} & \dots & \tilde{a}_{ln} & \tilde{b}_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right\|,$$

– *трапециевидный:*
$$\tilde{A} \sim \left\| \begin{array}{cccccc:c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1l} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2l} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{ll} & \dots & \tilde{a}_{ln} & \tilde{b}_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

– *треугольный:*
$$\tilde{A} \sim \left\| \begin{array}{cccc:c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array} \right\|.$$

В случае ступенчатого вида система несовместна и не имеет решений, так как среди последних строк обязательно найдется строка, соответствующая неверному числовому равенству: $0 = b_k$, в то время как $b_k \neq 0$. Отметим также, что ранг блока A равен l, а ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ больше l (ранги определяются по числу ненулевых строк), следовательно, ранги не равны:
$$\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} \tilde{A}.$$

К треугольному виду матрицу $\tilde{A}$ можно привести только, если система квадратная. В этом случае ранги матриц A и $\tilde{A}$ совпадают и равны порядку системы:
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = n.$$

Более того, система невырождена. Действительно, блок A, соответствующий матрице коэффициентов, имеет треугольный вид, а значит, его определитель равен произведению диагональных элементов, среди которых нет нулевых. Таким образом, $\det A \neq 0$, система совместна и имеет единственное решение.

Наконец, в случае трапециевидной формы ранги матриц A и $\tilde{A}$ также совпадают:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = l,$$

но теперь l меньше числа неизвестных. Как будет показано ниже, система будет совместной, а число решений бесконечно.

По-существу, приведенные рассуждения и составляют содержание доказательства теоремы Кронекера–Капелли. Кроме этого мы провели и классификацию возможных решений, а именно, всякая линейная система либо не имеет решений, либо имеет одно решение, либо имеет бесчисленное множество решений.

После установления совместности системы переходим к непосредственному определению решения. Рассмотрим наиболее общий случай, когда расширенная матрица приведена к трапециевидной форме и имеет ранг $l < m < n$.

Шаг 3. Любой минор порядка l отличный от нуля назовем базисным. Без потери общности в качестве базисного минора можно выбрать верхний левый минор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l \\ 1 & 2 & \dots & l \end{pmatrix} \neq 0.$$

Неизвестные, соответствующие столбцам базисного минора (в нашем случае $x_1, x_2, \dots, x_l$) также называются базисными, а остальные $(x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n)$ – свободными. Далее выпишем систему, соответствующую полученной расширенной матрице, и перенесем в правую часть все слагаемые со свободными неизвестными. В результате получим:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \cdots + \tilde{a}_{1l}x_l = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1l+1}x_{l+1} - \tilde{a}_{1n}x_n, \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2l}x_l = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2l+1}x_{l+1} - \tilde{a}_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{ll}x_l = \tilde{b}_l - \tilde{a}_{ll+}\ x_{l+1} - \tilde{a}_{ln}x_n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим базисную неизвестную x_l, и подставляем найденное выражение в предпоследнее уравнение. Из предпоследнего уравнения находим базисную неизвестную x_{l-1}, и подставляем ее в следующее верхнее уравнение. Продолжая двигаться вверх, выражаем все базисные неизвестные через свободные:

$$x_l \to x_{l-1} \to \cdots \to x_2 \to x_1.$$

Описанная процедура называется *обратным ходом Гаусса*.

Шаг 4. Вводя вместо свободных неизвестных параметры, например, t_1, t_2 и т.д., записываем ответ в виде упорядоченной совокупности найденных величин.

Заметим, что французский математик Жордан предложил после выбора базисного минора продолжить преобразования над строками расширенной матрицы и привести базисный минор к виду единичного блока порядка l. Это значительно упрощает вычисления, так как после возвращения к линейной системе отпадает необходимость в выполнении обратного хода Гаусса. Такой вариант решения линейных систем часто называют *методом Гаусса-Жордана*.

Пример 2.3.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5\,x - 3y + 4z = 2, \\ 2x + y - 5z = \ -1. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc:c} 5 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{array} \right\|.$$

Далее, используя элементарные преобразования над строками матрицы, занулим все элементы, стоящие ниже линии одинаковых индексов (преобразования в символьном виде указаны в скобках, жирным шрифтом отмечены строки):

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc:c} 5 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{array} \right\| \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}' = \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{2} \\ \mathbf{2}' = \mathbf{2} \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 14 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}' = \mathbf{1} \\ \mathbf{2}' = \mathbf{2} - 2 \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{array}{ccc:c} 1 & -5 & 14 & 4 \\ 0 & 11 & -33 & -9 \end{array} \right\|.$$

Матрица $\tilde{A}$ приведена к трапециевидной форме. Ранги матриц A и $\tilde{A}$ равны 2, следовательно, система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

В качестве базисного минора выберем крайний левый, при этом x и y будут базисными переменными, а z – свободной. Продолжим преобразования согласно методу Гаусса-Жордана и приведем базисный минор к виду единичного блока:

$$\tilde{A} \sim \left\| \begin{matrix} 1 & -5 & 14 & \vdots & 4 \\ 0 & 11 & -33 & \vdots & -9 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}' = \mathbf{1} \\ \mathbf{2}' = \mathbf{2}/11 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} 1 & -5 & 14 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -9/11 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1}' = \mathbf{1} + 5 \cdot \mathbf{2} \\ \mathbf{2}' = \mathbf{2} \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -1/11 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -9/11 \end{matrix} \right\|.$$

Далее запишем линейную систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x \qquad - z = -\dfrac{1}{11}, \\ \qquad y - 3z = -\dfrac{9}{11}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - \dfrac{1}{11}, \\ y = 3z - \dfrac{9}{11}. \end{cases}$$

Введем вместо z параметр t, положив $z = t$. Тогда решение системы можно записать как

$$x = t - \tfrac{1}{11}, \;\; y = 3t - \tfrac{9}{11}, \;\; z = t, \text{ где } t \in R.$$

Ответ: $\left(t - \frac{1}{11}, 3t - \frac{9}{11}, t\right)$, где $t \in R$. ■

ГЛАВА 3
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Векторы

Опр. 3.1.1. **Геометрическим вектором (вектором)** называется направленный отрезок.

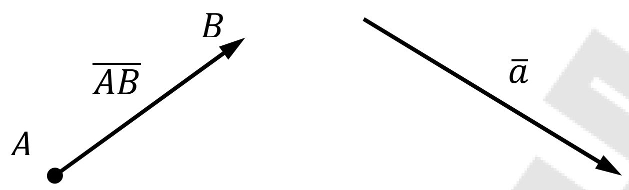


Рис. 1. Геометрические векторы.

Принятые обозначения векторов:

– в физической и технической литературе с использованием стрелки

$$\overrightarrow{AB} \text{ или } \vec{a};$$

– в математической литературе с использованием простой черты сверху

$$\overline{AB} \text{ или } \bar{a}.$$

При двойном буквенном обозначении первая буква соответствует началу, а вторая концу вектора.

В данном пособии мы будем придерживаться математического стандарта при обозначении векторов, что позволит не менять обозначений при обобщении понятия вектора на произвольные линейные пространства без привязки к геометрии.

Опр. 3.1.2. **Модулем геометрического вектора** называется его длина.

Модуль вектора будем обозначать как $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$.

Опр. 3.1.3. **Нулевым вектором** называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Для нулевого вектора понятие направления не определено. Модуль нулевого вектора равен 0. Согласно определению $\overline{AA}$ есть нулевой вектор. Стандартное обозначение: $\bar{0}$ или просто 0, если из контекста ясно, что речь идет о нулевом векторе.

Опр. 3.1.4. **Единичным вектором** или **ортом** называется вектор, модуль которого равен 1.

Поскольку длина единичных векторов фиксирована, то именно с их помощью удобно задавать направления. Стандартное обозначение единичного вектора: $\bar{e}$. Однако в важных случаях орты имеют и специальное обозначение.

Рассмотрим системы векторов.

Опр. 3.1.5. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Рис. 2. Коллинеарные векторы.

Отношение коллинеарности для геометрических векторов эквивалентно отношению *быть параллельным* для прямых и отрезков. При этом, коллинеарные векторы, имеющие одно направление, называются **сонаправленными**, а разное – **противоположно направленными**.

Простая коллинеарность указывается с помощью символа параллельности – $\parallel$, а сонаправленность и противоположно направленность векторов с помощью стрелок – $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$, соответственно. В частности, на рис. 2 $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ и $\bar{c} \uparrow\uparrow \bar{d}$, но $\bar{a} \nparallel \bar{c}$.

Опр. 3.1.6. Векторы называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Отношение компланарности вводится для систем, состоящих из трех и более векторов. Говорить о компланарности двух векторов нет смысла, так как в евклидовой геометрии любые две прямые всегда лежат или в одной плоскости, или в случае скрещивания в двух параллельных плоскостях.

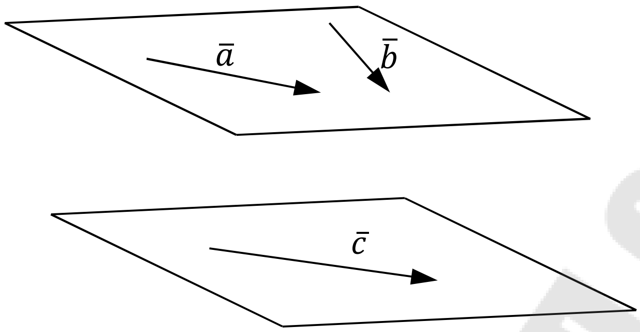


Рис. 3. Компланарные векторы.

На рис. 3 векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – компланарны.

<u>*Опр. 3.1.7.*</u>

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются **равными**, если
1) равны их модули: $|\bar{a}| = |\bar{b}|$;
2) они коллинеарны: $\bar{a} \parallel \bar{b}$;
3) они сонаправлены: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$.

Условие коллинеарности вынесено в отдельный пункт по той причине, что часто установить коллинеарность значительно проще, чем сонаправленность. А если векторы не коллинеарны, то автоматически и не равны друг другу.

Теорема 3.1.1.

Для любого вектора $\bar{a}$ и точки P всегда существует единственный вектор $\overline{PQ}$ равный вектору $\bar{a}$.

Ниже на рис. 4 продемонстрирована идея доказательства теоремы, в основе которого лежит определение равенства векторов и одна из аксиом евклидовой геометрии, а именно, через точку пространства проходит единственная прямая параллельная заданной прямой.

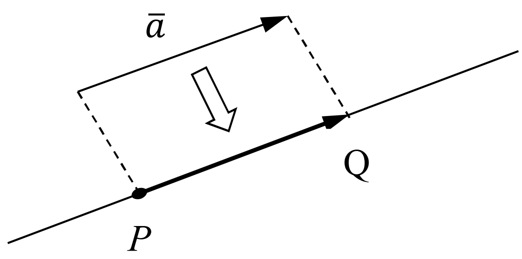


Рис. 4. Вектор $\overline{PQ}$ равен вектору $\bar{a}$.

Теорема позволяет использовать преобразование параллельного переноса для перемещения векторов на плоскости или в пространстве, например, с целью приложения начала одного вектора к концу другого. С точки зрения математики отношение равенства векторов есть отношение эквивалентности, поэтому, по-существу, вектор определяет целый класс равных векторов, приложенных к разным точкам пространства. В физике аналогом такого класса является понятие *свободного вектора*.

§ 2. Линейные операции над векторами

<u>*Опр. 3.2.1.*</u> *Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$* называется вектор $\bar{a}+\bar{b}$, идущий из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$ при условии, что вектор $\bar{b}$ приложен к концу вектора $\bar{a}$.

Имеется два геометрических способа суммирования векторов:

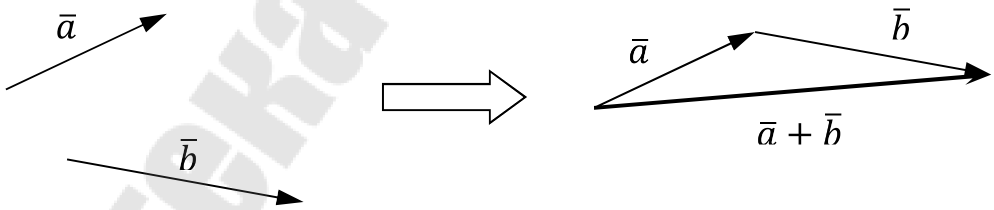


Рис.5. Сложение векторов ***по правилу треугольника****.*

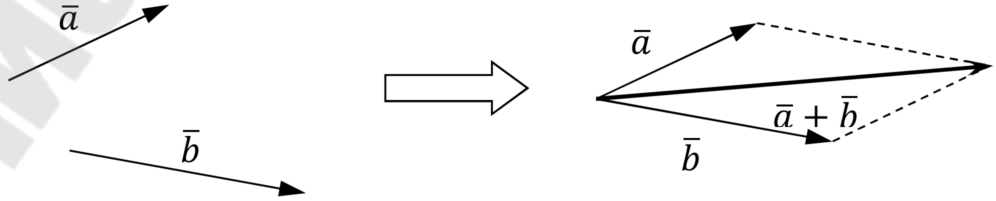


Рис.6. Сложение векторов ***по правилу параллелограмма****.*

Сложение по правилу треугольника удобно при суммировании нескольких векторов. При этом вектора выстраиваются в цепочку.

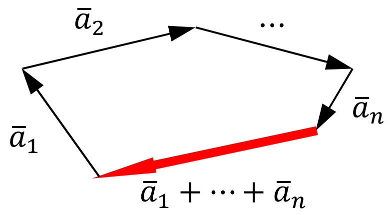


Рис.7. Суммирование системы векторов по правилу треугольника.

Интересна ситуация, когда начало первого вектора и конец последнего совпадают. В этом случае сумма векторов равна нулю (нулевому вектору), а сами векторы совпадают со сторонами многоугольника.

Сложение по правилу параллелограмма часто используется в механике, когда, например, на тело действуют несколько сил, приложенных к одной точке, и требуется определить результирующую силу. Здесь уместно вспомнить басню Крылова «Лебедь, щука и рак».

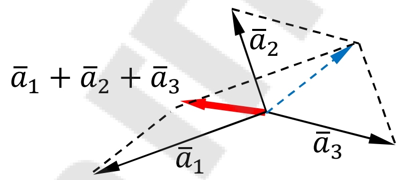


Рис.8. Сложение трех векторов по правилу параллелограмма

<u>*Опр. 3.2.2.*</u> *Произведением ненулевого вектора $\bar{a}$ на действительное число λ* называется вектор $\lambda\bar{a}$, модуль которого равен произведению модулей числа и вектора:

$$|\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}|, \qquad (3.2.1)$$

и который коллинеарен вектору $\bar{a}$, причем

$$\lambda\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}, \text{ если } \lambda > 0\text{, и } \lambda\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}, \text{ если } \lambda < 0.$$

В случае, когда $\lambda = 0$ или $\bar{a} = \bar{0}$, то $\lambda\bar{a} = \bar{0}$.

Сейчас действия над векторами введены как особый вид геометрических построений. Очевидным преимуществом такого подхода является наглядность, что отчасти и объясняет широкое использование векторной алгебры в различных разделах физики и ее технических приложениях, где основные величины (перемещения, скорости, ускорения, силы, напряженности электрических и магнитных полей и др.) представимы как геометрические векторы.

Тем не менее, здесь необходимо сделать несколько замечаний.

Во-первых, при выполнении последовательности из нескольких операций геометрические построения усложняются, причем значительно, если векторы приложены к разным точкам.

Во-вторых, не любая величина, имеющая направление и одновременно числовую характеристику, может быть представлена как элемент векторной алгебры. Так, например, поток автомобилей можно однозначно описать, указав направление движения и интенсивность потока (количество автомобилей, проходящих через контрольный пост за определенный промежуток времени). Но попытка сложения потоков на перекрестке по правилам сложения геометрических векторов приводит к явно бессмысленному результату, как показано на рис.7.

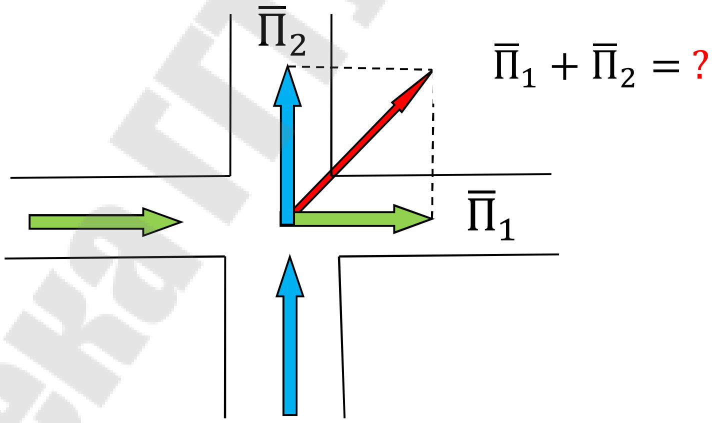


Рис.7. Потоки автомобилей на перекрестке дорог.

Дело в том, что потоки автомобилей определены на множестве автомобильных дорог и могут иметь направления только вдоль дорог, а геометрические векторы никаких ограничений на направление не имеют.

И, наконец, в-третьих, чисто геометрический подход к определению операций над векторами моментально теряет всю свою наглядность, а значит, и практическую привлекательность с точки зрения приложений, при попытках обобщения понятия вектора на многомерные пространства, например, на четырехмерное пространство-время в теории относительности, на шестимерное конфигурационное пространство перемещений-скоростей в механике.

Здесь уже существенными становятся не сами определения операций, а их свойства.

Теорема 3.2.1.

Операции сложения векторов и умножения их на число обладают следующими общими свойствами:

1). $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$, (коммутативность суммы)

2). $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$, (ассоциативность суммы)

3). $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$, (свойство нулевого вектора)

4). $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$, (свойство противоположного вектора)

5). $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$ (ассоциативность умножения на число)

6). $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$, (дистрибутивность)

7). $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$, (дистрибутивность)

8). $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$. (свойство единичного коэффициента)

Доказательство теоремы основано на геометрическом построении результирующих векторов для левой и правой части равенств, и их сравнении друг с другом, то есть на проверке равенства их модулей и сонаправленности. Отметим формальное совпадение операций сложения векторов и умножения их на число с аналогичными свойствами для матриц (теорема 1.8.1.). По этой причине они также называются *линейными операциями*, но над *векторами*.

Важность теоремы 3.2.1 заключается в том, что свойства операций над векторами не несут никакой геометрической нагрузки, являются чисто алгебраическими, а поэтому они могут быть постулированы, и с их помощью можно ввести понятие вектора в пространствах любой природы. Так геометрическому понятию коллинеарности векторов можно дать следующую чисто алгебраическую трактовку.

Теорема 3.2.2.(о коллинеарных векторах)

Для того, чтобы два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы нашлось число λ такое, что

$$\bar{b}=\lambda\bar{a}. \qquad (3.2.3)$$

Действительно, $\lambda\bar{a} \parallel \bar{a}$ по определению, но и $\bar{b} \parallel \lambda\bar{a}$ в силу их предполагаемого равенства. Тогда с учетом того, что отношение коллинеарности является транзитивным, имеем $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Таким образом, равенство (3.2.3) возможно только для коллинеарных векторов. Значение множителя λ равно отношению модулей векторов взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того являются ли векторы сонаправленными или противоположно направленными.

Разность векторов, вообще говоря, есть композиция двух линейных операций:

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-1)\bar{b}. \tag{3.2.4}$$

Однако в приложениях из удобства ее часто рассматривают как отдельную специальную операцию.

<u>*Опр. 3.2.3.*</u> *Разностью векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} - \bar{b}$, идущий из конца вектора $\bar{b}$ в конец вектора $\bar{a}$ при условии, что начала векторов совпадают.

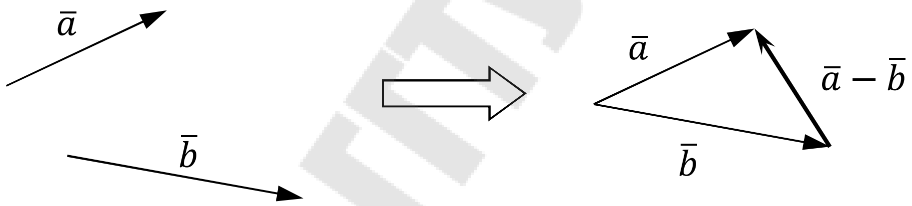


Рис.8. Разность векторов.

Как видно на рис.8, вектор разности соединяет концы векторов, имеющих общее начало, и «направлен в конец вектора, из которого вычитают».

§ 3. Размерность и базис пространств векторов

Пусть имеется система векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$. Из векторов системы с помощью линейных операций составим новый вектор:

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ \dots + \lambda_n\bar{a}_n, \qquad (3.3.1)$$

который будем называть *линейной комбинацией*.

<u>*Опр. 3.3.1.*</u> Система векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ называется *линейно независимой,* если их линейная комбинация может быть нулевым вектором только при нулевых коэффициентах:

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ \dots + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0} \qquad (3.3.2)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

В противном случае система называется *линейно зависимой.*

Суть линейной независимости заключается в том, что ни один вектор линейно независимой системы не может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов этой же системы.

<u>Критерии линейной зависимости векторов.</u>

I. Всякая система, содержащая нулевой вектор $\bar{0}$, линейно зависима.

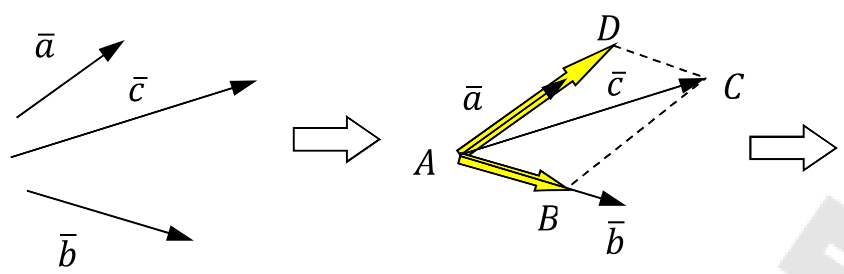
II. Всякая система, содержащая подмножество линейно зависимых векторов, линейно зависима.

III. Всякая система, содержащая хотя бы два коллинеарных вектора, линейно зависима.

IV. Всякая система, содержащая хотя бы три компланарных вектора, линейно зависима.

V. Всякая система, содержащая четыре и более геометрических вектора, линейно зависима.

Для доказательства справедливости критериев I-V достаточно указать хотя бы один *ненулевой* набор коэффициентов, который обеспечивал бы выполнение равенства (3.3.2). Причем с учетом чисто геометрического определения линейных операций над векторами линейную зависимость можно установить и с помощью конкретных построений параллелограммов и параллелепипедов.



$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{AC} = \bar{c}$$
$$\overline{AB} \parallel \bar{b} \;\Rightarrow\; \overline{AB} = \beta\bar{b}$$
$$\overline{AD} \parallel \bar{a} \;\Rightarrow\; \overline{AD} = \alpha\bar{a}$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$$

Рис.8. Линейная зависимость трех компланарных векторов.

Линейная независимость есть *качественное свойство* системы векторов. Однако тот факт, что при изменении состава векторов система это свойство может утрачивать или приобретать, позволяет ввести *фундаментальную числовую характеристику* векторных пространств.

<u>*Опр. 3.3.2.*</u> **Размерностью векторного пространства $\boldsymbol{V}$** называется *максимальное число* его линейно независимых векторов.

Размерность пространства V обозначается как $\dim V$. Для указания размерности часто используются также верхние индексы: V^n.

<u>*Опр. 3.3.3.*</u> **Базисом** векторного пространства V, размерность которого равна n, называется любая система, состоящая из n линейно независимых векторов этого пространства.

<u>Пример 3.3.1</u>. *Пространство коллинеарных векторов.*

Размерность пространства коллинеарных векторов равна 1, так как любые два коллинеарных вектора линейно зависимы.

Любой ненулевой вектор пространства $\bar{a} \neq \bar{0}$ образует базис $\{\bar{a}\}$. ■

<u>Пример 3.3.2</u>. *Пространство компланарных векторов.*

Размерность пространства компланарных векторов равна 2, так как любые три компланарных вектора линейно зависимы.

Любые два неколлинеарных вектора пространства ($\bar{a} \nparallel \bar{b}$) образуют базис $\{\bar{a},\ \bar{b}\}$. ■

<u>Пример 3.3.3</u>. *Пространство геометрических векторов.*

Размерность пространства геометрических векторов равна 3, так как в евклидовой геометрии уже любые четыре вектора линейно зависимы.

Любые три некомпланарных вектора образуют базис пространства геометрических векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. ■

Теорема 3.3.1.(о базисе)

Пусть $\mathcal{A} = \{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ – некоторый фиксированный базис -мерного векторного пространства V. Тогда *любой* вектор $\bar{b}$ этого пространства *единственным образом* может бы разложен по базису $\mathcal{A}$:

$$\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n. \tag{3.3.3}$$

Коэффициенты разложения α_k называются *координатами вектора b в базисе $\mathcal{A}$*. Специально подчеркнем, что говорить о координатах векторов без указания базиса бессмысленно, так как в разных базисах вектор имеет разные координаты.

Фундаментальная значимость теоремы о базисе заключается в том, что вектору, изначально геометрическому объекту, ставится в соответствие однозначно определенный набор действительных чисел $\{\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, что позволяет свести операции над векторами к арифметическим действиям над числами–координатами.

Теорема 3.3.2.

Пусть векторы $\bar{a} = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $\bar{b} = \{\beta_1,\ \beta_2, \dots, \beta_n\}$ заданы своими координатами в некотором фиксированном базисе $\mathcal{G} = \{\bar{g}_1,\ \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n\}$ n-мерного векторного пространства V. Тогда при сложении векторов все их соответствующие координаты складываются, а при умножении на число λ – умножаются на это число:

$$\bar{a} + \bar{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\}, \tag{3.3.4}$$

$$\lambda\,\bar{a} = \{\lambda\,\alpha_1, \lambda\,\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n\}. \tag{3.3.5}$$

В качестве одного важного следствия теоремы 3.2.3 и теоремы 3.2.2 отметим критерий коллинеарности векторов, основанный на сравнении координат.

Следствие 1 (условие коллинеарности в координатной форме)

Для коллинеарности двух векторов $\bar{a} = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $\bar{b} = \{\beta_1,\ \beta_2, \dots, \beta_n\}$, заданных своими координатами в одном базисе, необходима и достаточна пропорциональность их координат:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}. \qquad (3.3.6)$$

Заметим, что в соотношениях пропорциональности типа (3.3.6) формально допускаются и нули в знаменателях. В этом случае пропорцию в форме равенства частных необходимо заменить эквивалентным соотношением в форме равенства произведений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{0} \;\Rightarrow\; a \cdot 0 = b \cdot c.$$

§ 4. Декартов базис и декартовы координаты векторов

Базисные системы, в принципе, можно задавать с помощью любого набора линейно независимых векторов, число которых должно совпадать с размерностью пространства. Однако не все базисы удобны для конкретных расчетов.

<u>*Опр. 3.4.1.*</u> **Ортонормированным базисом** $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ векторного пространства V размерности n, называется базис, состоящий из n взаимно ортогональных ортов $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

Для геометрических векторов термин ортогональность означает перпендикулярность. Напомним, что орты – это единичные векторы. Применительно к пространству евклидовой геометрии ортонормированный базис имеет специальное название и обозначение.

Введем понятие ориентации для упорядоченной тройки векторов.

Опр. 3.4.2. Тройка некомпланарных векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ называется *правой (левой)*, если будучи приведенной к общему началу, векторы располагаются по направлению указательного, среднего и большого пальцев правой (левой) руки, соответственно.

В физике в отличие от математики вместо явно антропологического определения ориентации принято использовать так называемое *правило буравчика.* Существование правых и левых упорядоченных троек векторов есть топологическое свойство пространства. Тройки разной ориентации нельзя совместить никакой последовательностью параллельных переносов и поворотов, то есть композицией непрерывных преобразований пространства.

Опр. 3.4.3. **Декартовым базисом** трехмерного евклидова пространства называется правая тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$.

Разложение вектора $\bar{a}$ по декартовому базису записывается как

$$\bar{a} = X\,\bar{\imath} + Y\,\bar{\jmath} + Z\,\bar{k}. \qquad (3.4.1)$$

Коэффициенты разложения X, Y, Z называются **декартовыми координатами вектора $\bar{a}$.** Декартовы координаты однозначно определяют вектор, поэтому вместо разложения (4.3.1) пишут:

$$\bar{a} = \{X, Y, Z\}.$$

Базисные векторы задают направления **координатных осей**, проходящих через них: $\bar{\imath}$ – ось Ox; $\bar{\jmath}$ – ось Oy; $\bar{k}$ – ось Oz.

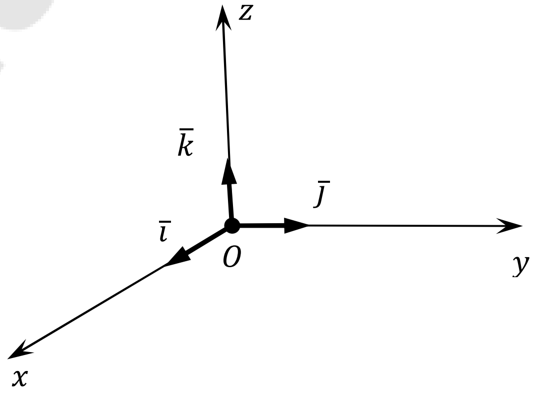


Рис.9. Декартов базис.

<u>*Опр. 3.4.4.*</u> **Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l** называется величина направленного отрезка $A'B'$, где A' и B' – ортогональные проекции точек A и B на ось l.

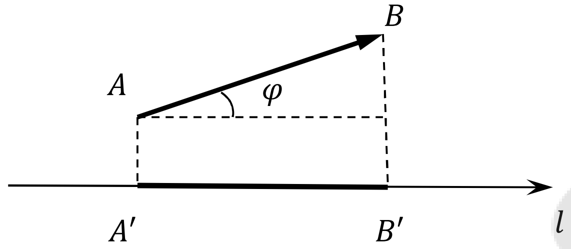


Рис.10. Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l.

В отличие от длины отрезка, которая по определению есть положительное действительное число, проекция имеет знак:

$\text{пр}_l\,\overline{AB} > 0$, *если вектор $\overline{A'B'}$ сонаправлен с осью l;*
$\text{пр}_l\,\overline{AB} < 0$, *если вектор $\overline{A'B'}$ и ось l имеют разные направления.*

Обозначим через φ угол между вектором $\bar{a}$ и положительным направлением оси l. Тогда проекция вектора $\bar{a}$ на ось l вычисляется по формуле

$$\text{пр}_l\,\bar{a} = |\bar{a}|\,\cos\varphi. \qquad (3.4.2)$$

Декартовы координаты напрямую связаны с проекциями вектора на координатные оси.

Теорема 3.4.1.

Декартовы координаты X, Y, Z вектора $\bar{a}$ равны ортогональным проекциям этого вектора на координатные оси Ox, Oy и Oz, соответственно.

Из теоремы 3.4.1. с учетом формулы (3.4.2) для декартовых координат вектора $\bar{a}$ получаем следующий набор соотношений:

$$X = |\bar{a}|\cos\alpha,\ Y = |\bar{a}|\cos\beta,\ Z = |\bar{a}|\cos\gamma. \qquad (3.4.3)$$

Здесь α, β и γ – углы между вектором $\bar{a}$ и координатными осями Ox, Oy и Oz. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\bar{a}$**.**

С другой стороны, вектор $\bar{a}$ совпадает с диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на проекциях вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Поэтому модуль вектора $\bar{a}$ с учетом формулы Пифагора для диагонали прямоугольного параллелепипеда можно вычислить непосредственно через декартовы координаты:

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{3.4.3}$$

Подставляя это выражение для модуля вектора $|\bar{a}|$ в формулы (3.4.3), для направляющих косинусов находим

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{3.4.4}$$

Набор соотношений (3.4.3) и (3.4.4) позволяет вычислить все характеристики вектора по его декартовым координатам.
Направляющие косинусы связаны друг с другом соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{3.4.5}$$

которое легко получить из равенств (3.4.4) путем возведения их в квадрат с последующим сложением. Таким образом, направляющие косинусы суть декартовы координаты орта

$$\bar{e} = \{cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma\},$$

задающего направление вектора $\bar{a}$.

§ 5. Скалярное произведение векторов

Введем над векторами операцию, которая позволяет из векторов получать числовые величины.

Опр. 3.5.1. **Скалярным произведением** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется действительное число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними φ:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi. \tag{3.5.1}$$

Для обозначения скалярного произведения кроме точки используются также и круглые скобки:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} \equiv (\bar{a},\bar{b}).$$

Заметим, что произведение $|\bar{a}|\cos\varphi$ есть проекция вектора $\bar{a}$ на ось, задаваемую вектором $\bar{b}$. Поэтому скалярное произведение можно записать как

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}. \qquad (3.5.2)$$

Возьмем в качестве вектора $\bar{b}$ орт $\bar{e}$. Тогда из соотношения (3.5.2) получаем формулу для вычисления проекции вектора $\bar{a}$ на ось, задаваемую ортом $\bar{e}$:

$$\text{пр}_{\bar{e}}\,\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{e}. \qquad (3.5.3)$$

Формула (3.5.3), записанная справа налево, определяет так называемый *геометрический смысл скалярного произведения* как проекции вектора на ось.

С помощью скалярного произведения непосредственно вычисляются:

– модули векторов:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}; \qquad (3.5.4)$$

– косинусы углов между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\ . \qquad (3.5.5)$$

Следует иметь в виду, что угол между геометрическими векторами по определению принимает значения от 0° до 180°. Поэтому, в соответствии с формулой (3.5.5), если $\bar{a}\cdot\bar{b} > 0$, то угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ острый, а если $\bar{a}\cdot\bar{b} < 0$, то тупой.

Теорема 3.5.1. (условие перпендикулярности векторов)

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \perp \bar{b}. \qquad (3.5.6)$$

Теорема позволяет связать чисто геометрическое отношение «быть перпендикулярным» с выполнением определенного числового равенства.

Рассмотрим *алгебраические свойства скалярного произведения.*

Теорема 3.5.2.

Скалярное произведение векторов обладает следующими алгебраическими свойствами:

1). $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$, (коммутативность)

2). $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$, (однородность)

3). $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$, (дистрибутивность)

4). $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$, причем $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} = \bar{0}$.

Заметим, что в силу коммутативности скалярного произведения, свойства однородности и дистрибутивности автоматически переносятся и на второй множитель. Алгебраические свойства используются для упрощения и преобразования векторных выражений.

Пример 3.5.1. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, а угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60°.

Решение.

Используя линейные операции над векторами, разложим векторы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$, определяемые как диагонали параллелограмма, через векторы сторон $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (см. рис. 11): $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$.

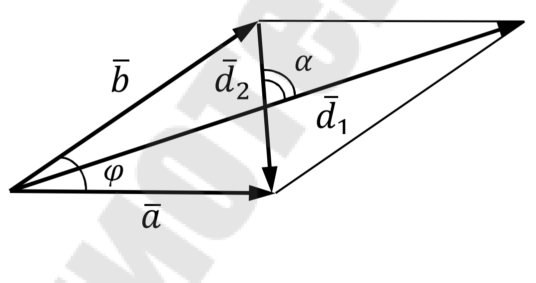


Рис.11. Параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Векторы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ есть векторы-диагонали параллелограмма.

Подставляя вместо векторов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ эти разложения и используя алгебраические свойства скалярного произведения, последовательно находим:

$$\bar{a}^2 \equiv \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 = 2^2 = 4;$$

$$\bar{b}^2 \equiv \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{b}|^2 = 3^2 = 9;$$

$$\bar{a}\bar{b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 3;$$

$$\bar{d}_1\bar{d}_2 \equiv \bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = 4 - 9 = -5.$$

Заметим, что скалярное произведение векторов–диагоналей $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ отрицательно, а значит, угол между ними тупой. Вместе с тем, диагонали, как отрезки, не имеют направления. По этой причине угол между ними определяется аналогично углу между прямыми, а именно, как острый угол, лежащий в пределах от 0° до 90°. Это замечание легко учесть, если для определения угла между диагоналями использовать не сам косинус, а модуль косинуса угла между векторами - диагоналями.

Далее находим длины диагоналей как модули векторов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$:

$$\bar{d}_1^{\,2} = \left(\bar{a} + \bar{b}\,\right)^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2 = 4 + 2 \cdot 3 + 9 = 19 \quad \Rightarrow \quad \left|\,\bar{d}_1\right| = \sqrt{19};$$

$$\bar{d}_2^{\,2} = \left(\bar{a} - \bar{b}\,\right)^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2 = 4 - 2 \cdot 3 + 9 = 7 \quad \Rightarrow \quad \left|\,\bar{d}_2\right| = \sqrt{7}.$$

Обозначим через α угол между диагоналями. Тогда с учетом замечания по формуле (3.5.5) вычисляем:

$$\cos\alpha = \frac{|-5|}{\sqrt{19}\,\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{133}} \approx\ 0{,}4335 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \arccos 0{,}4335 \approx 64{,}3^\circ.$$

. Ответ: $64{,}3^\circ$ ■

Все рассмотренные до сих пор свойства скалярного произведения имели универсальный характер и не зависели от размерности векторного пространства и выбора в нем базиса. Однако если базис зафиксировать и задавать векторы упорядоченными наборами координат, то оказывается, что именно выбор декартового базиса приводит к наиболее простой формуле для вычисления скалярного произведения.

Теорема 3.5.3. (скалярное произведение в декартовом базисе)

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими декартовыми координатами: $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Тогда их скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \qquad (3.5.7)$$

Формула (3.5.7) является прямым следствием ортонормируемости векторов декартового базиса $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$.

Условие перпендикулярности двух векторов в декартовом базисе записывается как

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}\ \perp \bar{b}. \qquad (3.5.8)$$

Пример 3.5.2. Найти значение параметра α, при котором векторы

$$\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - \alpha\bar{k} \text{ и } \bar{b} = \alpha\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + \bar{k}$$

будут перпендикулярными.

Решение.

По условию векторы заданы своими декартовыми координатами:

$$\bar{a} = \{2, 3, -\alpha\} \quad \text{и} \quad \bar{b} = \{\alpha, -4, 1\}.$$

Подставляя координаты векторов в соотношение (3.5.7), находим

$$2 \cdot \alpha - 3 \cdot 4 - \alpha \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 12.$$

Ответ: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будут перпендикулярны при $\alpha = 12$. ■

§ 6. Векторное произведение векторов

Линейные операций над векторами обладают характерным свойством *замкнутости*. Так любая линейная комбинация коллинеарных векторов есть вектор, коллинеарный векторам исходной системы. Аналогично результат имеет место и для линейных комбинаций компланарных векторов. Введем операцию над векторами совсем другого типа.

Опр. 3.6.1. **Векторным произведением** двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, модуль и направление которого определяются как:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\varphi$; (3.6.1)
2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;
3) тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ правая.

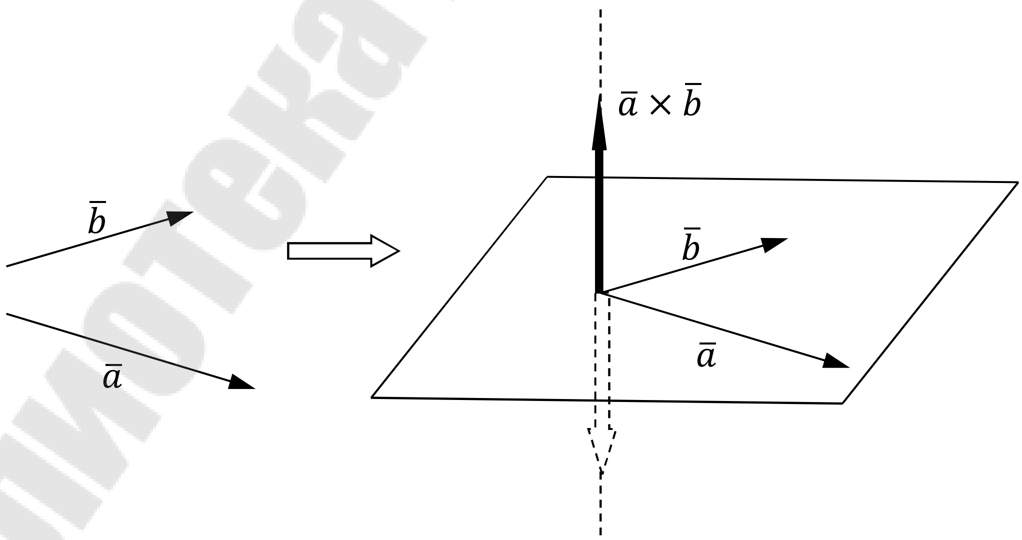


Рис.12. Построение результирующего вектора для векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

значно определяют направление результирующего вектора c. Согласно второму условию вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (после приведения их к общему началу), а третье условие позволяет из двух направлений нормали к плоскости выбрать одно (по правилу правой руки), как показано на рис.12.

Для обозначения векторного произведения кроме знака умножения $\times$ («крестик») используются также и квадратные скобки:

$$\bar{a} \times \bar{b} \equiv [\bar{a}, \bar{b}].$$

Теорема 3.6.1. (*условие коллинеарности векторов*)

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является равенство нулю их векторного произведения:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \parallel \bar{b}\,. \qquad (3.6.1)$$

Действительно, угол между коллинеарными векторами равен 0° или 180°. Но $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, поэтому, согласно определению 3.6.1, модуль их векторного произведения также равен нулю, а значит, векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор.

Теорема 3.6.2. (*геометрический смысл векторного произведения*)

Модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|\,. \qquad (3.6.2)$$

Обозначим через $\bar{n}$ орт в направлении вектора $\bar{a} \times \bar{b}$. Тогда с учетом формулы (3.6.2) векторное произведение можно записать как

$$\bar{a} \times \bar{b} = S\,\bar{n}. \qquad (3.6.3)$$

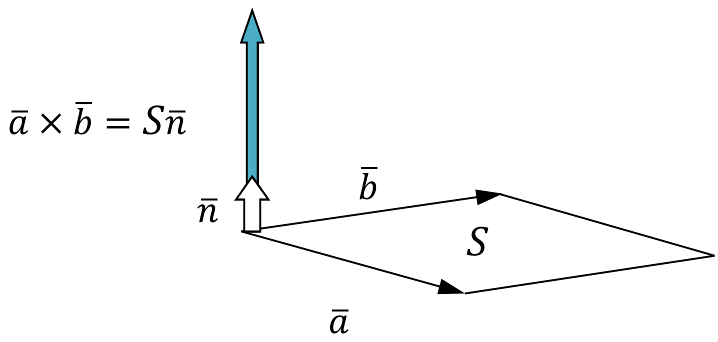


Рис.13. Геометрический смысл векторного произведения векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$.

Теорема 3.6.3. (*алгебраические свойства векторного произведения*)

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1). $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$, (антикоммутативность)
2). $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda[\bar{a} \times \bar{b}]$, (однородность)
3). $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$, (дистрибутивность)
4). $\bar{a} \times \bar{a} = 0$ для $\forall\bar{a}$.

Алгебраические свойства векторного произведения используются для упрощения и преобразования векторных выражений.

Пример 3.6.1. Упростить выражение $(3\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) \times (\bar{a} - \bar{b})$.

Решение.

Для упрощения выражения следует раскрыть скобки, сохраняя порядок сомножителей, и далее при необходимости поменять порядок с учетом того, что векторное произведение антикоммутативно и равно нулю для равных сомножителей:

$$(3\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) \times (\bar{a} - \bar{b}) =$$
$$= 3\bar{a} \times \bar{a} - 3\bar{a} \times \bar{b} + 2\bar{b} \times \bar{a} - 2\bar{b} \times \bar{b} - \bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} =$$
$$= -5\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} - \bar{b} \times \bar{c}. \ \blacksquare$$

Рассмотрим вычисление векторного произведения в случае, если векторы заданы своими декартовыми координатами.

Теорема 3.6.4.

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими декартовыми координатами: $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Тогда их векторное произведение может быть представлено в форме следующего определителя:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (3.6.4)$$

Явный вид разложения и декартовы координаты вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ получаются после разложения определителя по первой строке. Для вывода формулы (3.6.4) полезны следующие соотношения для векторов декартового базиса:

$$\bar{\imath} \times \bar{\jmath} = \bar{k}, \quad \bar{\jmath} \times \bar{k} = \bar{\imath}, \quad \bar{\imath} \times \bar{k} = -\bar{\jmath}. \quad (3.6.5)$$

Пример 3.6.2. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = \{-1, 2, 5\}$ и $\bar{b} = \{3, 4, -1\}$, заданных своими декартовыми координатами.

Решение.

Искомая площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на заданных векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Поэтому сначала по формуле (3.6.4) найдем векторное произведение:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{\imath}(-2 - 20) - \bar{\jmath}(1 - 15) + \bar{k}(-4 - 6) = -22\,\bar{\imath} + 14\bar{\jmath} - 10\bar{k}.$$

Тогда для площади треугольника получаем:

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-22)^2 + 14^2 + (-10)^2} = \sqrt{195} \approx 13{,}96.$$

Ответ: $S = \sqrt{195} \approx 13{,}96$ (кв.ед.)■

§ 7. Смешанное произведение векторов

Рассмотрим композицию скалярного и векторного произведений векторов.

Опр. 3.7.1. **Смешанным произведением** трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется действительное число, определяемое как скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на результирующий вектор векторного произведения векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{a} \cdot [\bar{b} \times \bar{c}].$$

С вычислением смешанного произведения связано решение многих задач в геометрии и линейной алгебре.

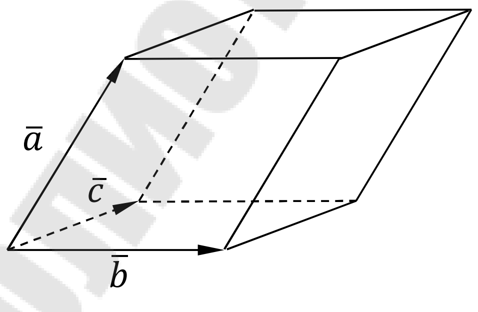
Теорема 3.7.1. (*геометрический смысл смешанного произведения*)

Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах после приведения их к общему началу, и взятому со знаком «+», если тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ правая, и со знаком «−», если левая.

Доказательство теоремы основано на использовании формул (3.5.3) и (3.6.1), определяющих геометрический смысл скалярного и векторного произведений, и стандартной формулы для вычисления объема параллелепипеда: $V_{\text{пар}} = S \cdot H,$ где S – площадь основания, а H – высота. При этом ориентация тройки векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ существенна для определения знака проекции первого вектора, а именно, вектора $\bar{a}$, на ось, задаваемую вектором $\bar{b} \times \bar{c}$ (векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ задают основание параллелепипеда).

Задачи, которые решаются с помощью теоремы 3.6.2.

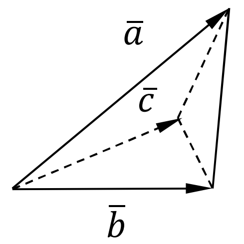
1). Вычисление объемов параллелепипедов:



$$\Longrightarrow \quad V_{\text{пар}} = |\bar{a} \cdot [\bar{b} \times \bar{c}]| \quad (3.7.1)$$

Рис.14. Вычисление объема параллелепипеда.

2). Вычисление объемов треугольных пирамид:



$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]\right| \quad (3.7.2)$$

Рис.15. Вычисление объема треугольной пирамиды.

3). Определение ориентации упорядоченной тройки векторов:

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] > 0 \quad \Rightarrow$ тройка $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ *правая*;

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] < 0 \quad \Rightarrow$ тройка $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ левая.

4) Проверка компланарности векторов и возможности составлять из них базис:

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] = 0 \;\Rightarrow$ векторы $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ *компланарны* и не могут образовывать базис в трехмерном пространстве;

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] \neq 0 \;\Rightarrow$ векторы $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ некомпланарны и *могут образовывать базис в трехмерном пространстве.*

Теорема 3.7.2. (*алгебраическое свойство смешанного произведения*)

Для смешанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ справедливо равенство

$$\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\bar{c}\right] = \left[\,\bar{a}\times\bar{b}\right]\cdot\bar{c}. \quad (3.7.3)$$

Суть этого свойства заключается в том, что результат вычисления смешанного произведения не зависит от расстановки знаков умножения. По этой причине смешанное произведение часто обозначают просто как $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, вообще опуская знаки умножения.

Рассмотрим вопрос вычисления смешанного произведения векторов в случае, когда векторы заданы своими координатами в некотором базисе.

Теорема 3.7.3.

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими декартовыми координатами: $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\bar{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$. Тогда их смешанное произведение может быть вычислено по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.7.4)$$

В правой части равенства (3.7.4) стоит определитель третьего порядка, составленный из декартовых координат векторов.

Теорема допускает простое обобщение и на случай произвольного базиса.

Теорема 3.7.4.

Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими координатами:

$$\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},\ \bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \bar{c} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$$

в некотором базисе $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Тогда их смешанное произведение может быть вычислено по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3, \qquad (3.7.5)$$

где $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ – смешанное произведение базисных векторов.

Заметим, что смешанное произведение базисных векторов декартового базиса равно $\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k} = +1$.

Пример 3.7.1. Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\bar{a} = \{3, -1, 4\}$, $\bar{b} = \{5, 2, -3\}$ и $\bar{c} = \{-4, 6, 2\}$, заданных своими декартовыми координатами.

Решение.

Сначала вычислим смешанное произведение векторов. По формуле (3.7.4) находим:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 + 120 - (-32 - 54 - 10) = 216.$$

Далее для вычисления объема пирамиды воспользуемся формулой (3.7.2):

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \frac{1}{6}\cdot 216 = 36.$$

Ответ: $V = 36$ (куб.ед.)■

ГЛАВА 4
Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в которой простейшие геометрические объекты (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. Основная заслуга в создании метода координат принадлежит великому французскому мыслителю *Рене Декарту (1596 –1650).*

Основные понятия геометрии – *точка, прямая, плоскость,* относятся к категории начальных неопределяемых понятий. Безупречным с научной точки зрения методом введения таких понятий является *аксиоматический подход.* Применительно к геометрии окончательная формулировка системы аксиом, лежащих в основе плоской (евклидовой) геометрии, принадлежит выдающемуся немецкому математику *Давиду Гильберту (1862 – 1943).* Именно аксиоматический подход закладывает фундамент для метода координат. В дальнейшем мы будем считать доказанным возможность установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством действительных чисел.

§ 1. Декартовы координаты точек в пространстве

Когда мы пытаемся указать собеседнику, как добраться до какого-нибудь конкретного пункта назначения, то обычно в качестве первого ориентира указывается общеизвестное место (здание, площадь, памятник, высокая гора и т.п.), а затем предлагается двигаться в определенном направлении (налево, направо, вдоль шоссе и т.п.) на какое-то расстояние. По-существу, при описании маршрута мы бессознательно пользуемся своего рода *системой координат*. Дадим соответствующее математическое определение, предварительно отметив, что для задания направлений наиболее естественно использовать векторы.

Опр. 4.1.1. **Декартовой системой координат** в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ называется система, состоящая из двух объектов $\mathfrak{D} = < O, \mathcal{B} >$, где O – фиксированная точка пространства, называемая *началом отсчета*, а $\mathcal{B} = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ – фиксированный декартов базис, прикрепленный к точке O.

Базисные векторы задают координатные оси, проходящие через начало координат – точку O. Принято ось Ox называть *осью абсцисс*, ось Oy – *осью ординат*, а ось Oz – *осью аппликат*.

Возьмем в пространстве произвольную точку M.

<u>*Опр. 4.1.1.*</u> Вектор $\overline{OM}$ называется **радиус-вектором** точки M:
$$\bar{r}_M = \overline{OM}.$$

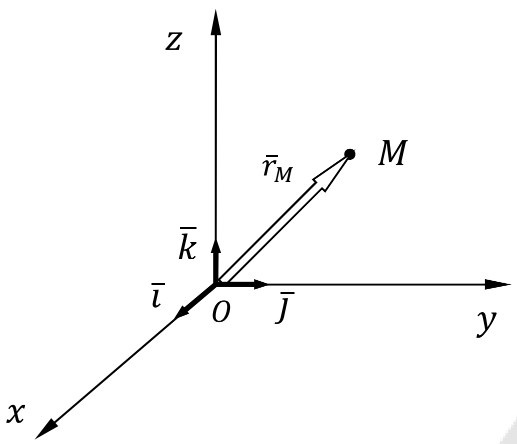


Рис.16. Радиус-вектор точки M.

Тот факт, что *любой* точке пространства можно поставить в соответствие *единственный* вектор лежит в основе аналитической геометрии и позволяет для описания геометрических объектов использовать напрямую математический аппарат векторной алгебры.

Пусть в базисе $\mathcal{B} = \{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ радиус-вектор $\overline{OM}$ имеет разложение:
$$\overline{OM} = X\bar{\imath} + Y\bar{\jmath} + Z\bar{k}.$$

<u>*Опр. 4.1.2.*</u> **Декартовыми координатами точки** M в системе координат $\mathfrak{D} = < O, \mathcal{B} >$ называются координаты ее радиус-вектора:
$$x_M = X,\ y_M = Y,\quad z_M = Z.$$

Координаты точки в отличие от координат вектора принято обозначать *малыми латинскими буквами*. Координаты однозначно определяют положение точки в пространстве *только при заданной системе координат* и обычно указываются как:
$$M(x, y, z).$$

Решение геометрических задач в аналитической геометрии в отличие от школьной геометрии, в которой изложение ведется в рамках аксиоматического подхода, связано с использованием операций над векторами.

Теорема 4.1.1.

Пусть в пространстве $\mathbb{E}^3$ заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда расстояние между точками M_1 и M_2 определяется по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \,. \quad (4.1.1)$$

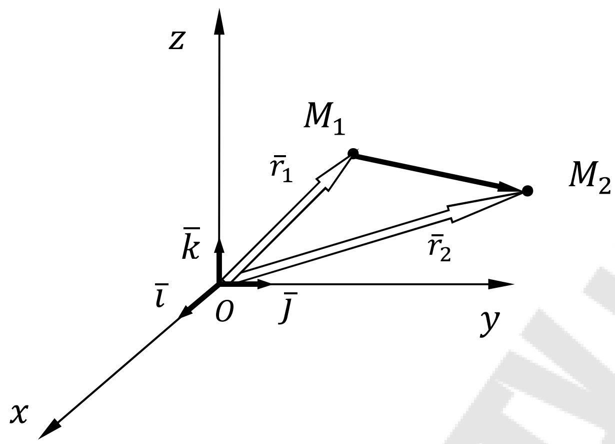


Рис.17. Определение расстояния между точками M_1 и M_2.

На рис.17 указаны геометрические построения, иллюстрирующие метод вычисления расстояний между точками M_1 и M_2. Искомое расстояние ρ, по-существу, определяется как модуль вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\rho = |\overline{M_1M_2}| = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|.$$

В качестве еще одного примера использования методов векторной алгебры рассмотрим *задачу о делении отрезка* в заданном отношении.

Пример 4.1.1. Найти координаты точки C, которая делит отрезок $[AB]$ на два отрезка $[AC]$ и $[CB]$, длины которых относятся друг к другу как $m : n$.

Решение.

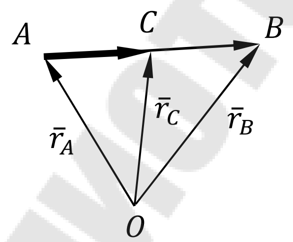


Рис.18. Деление отрезка $[AB]$ в заданном отношении.

Зафиксируем начало координат – точку O. Далее введем радиус-векторы точек A, B и C, а также векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис.18). Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ сонаправлены, то согласно теореме (3.2.2) с учетом того, что по условию $|AC|:|CB| = m:n$, имеем:

$$\overline{AC} = \lambda\,\overline{AB} = \frac{m}{m+n}\overline{AB}.$$

С другой стороны:

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A \quad \text{и} \quad \overline{AC} = \bar{r}_C - \bar{r}_A.$$

Подставляя эти выражения в соотношение между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ после несложных преобразований, находим:

$$\bar{r}_{\mathrm{C}} = \frac{n}{m+n}\bar{r}_A + \frac{m}{m+n}\bar{r}_B.$$

Таким образом, согласно определению (4.1.2) искомые координаты точки C вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{n\,x_A + m\,x_B}{m+n},\ y_C = \frac{n\,y_A + m\,y_B}{m+n},\ z_C = \frac{n\,z_A + m\,z_B}{m+n}. \qquad (4.1.2)$$

В частности, если точка C – середина отрезка $[AB]$ (т. е. делит отрезок в отношении $1:1$ и $m = n = 1$), то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ y = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}. \qquad (4.1.3)$$

■

Пример 4.1.2. Точки $A(-1,4,2)$, $B(5,-2,3)$ и $C(3,2,-4)$ являются вершинами треугольника $\varDelta ABC$. Найти угол при вершине A.

Решение.

Угол при вершине A найдем, как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Сначала определим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \{5 - (-1), -2 - 4, 3 - 2\} = \{6, -6, 1\};$$
$$\overline{AC} = \bar{r}_C - \bar{r}_A = \{3 - (-1), 2 - 4, -4 - 2\} = \{4, -2, -6\}.$$

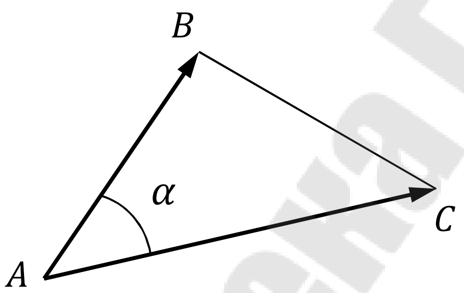


Рис.19. Вычисление угла α при вершине A треугольника ⊿ABC с помощью векторов-сторон.

Далее найдем модули векторов и их скалярное произведение:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{73};$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{56};$$
$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} =$$
$$= 6 \cdot 4 + (-6) \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) = 30.$$

Затем по формуле (3.5.5) вычислим косинус угла α (см. рис. 19):

$$\cos\alpha = \frac{30}{\sqrt{73}\sqrt{56}} = \frac{15}{\sqrt{1022}} \approx 0{,}4692.$$

Так как косинус угла положителен, то угол при вершине A острый и равен

$$\alpha = \arccos(0{,}4692) \approx 62^{\circ}.$$

Ответ: 62° ■

§ 2. Прямая на плоскости

В аналитической геометрии задание прямой l на плоскости связано с поиском соотношения, которому должны удовлетворять координаты точек прямой l в фиксированной системе координат, и, что очень важно, не должны удовлетворять координаты ни одной точки, не лежащей на прямой. Для случая плоскости имеется достаточно много различных типов таких соотношений. Рассмотрим важнейшие из них.

Любой ненулевой вектор $\bar{a}$ на плоскости задает класс прямых, ему параллельных. При этом вектор $\bar{a}$ называется *направляющим вектором* прямых. Чтобы выделить прямую l из класса, необходимо дополнительно задать точку M_0, через которую эта прямая проходит. Действительно, согласно одной из аксиом евклидовой геометрии *через фиксированную точку пространства проходит единственная прямая, параллельная заданной прямой.*

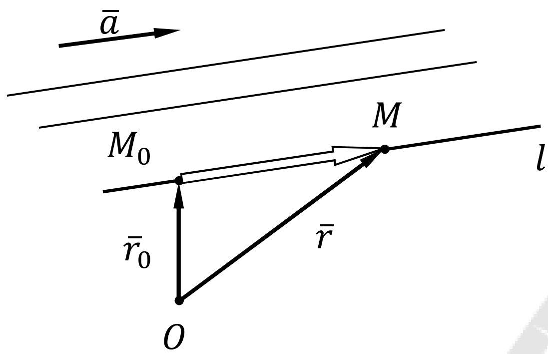


Рис.20. Направляющий вектор $\bar{a}$ задает класс параллельных прямых.

Далее возьмем на прямой l произвольную точку M и зафиксируем начало системы координат O. Введем радиус-векторы $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$ точек M_0 и M, соответственно (рис. 20). Тогда вектор $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ будет коллинеарен направляющему вектору $\bar{a}$:

$$\bar{r} - \bar{r}_0 \parallel \bar{a},$$

а уравнения прямой l будут представлять собой векторные или координатные соотношения, являющиеся простыми следствиями различных форм записи условия коллинеарности векторов.

Уравнения прямой на плоскости,
проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$,
<u>с направляющим вектором $\bar{a} = \{l, m\}$:</u>

1). *Векторное параметрическое уравнение:*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}\,t, \qquad (4.2.1)$$

где $t \in \mathbb{R}$. Уравнение (4.2.1) является преобразованной формой записи соотношения (3.2.3).

2). *Параметрическое уравнение:*

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

где $t \in \mathbb{R}$. Параметрическое уравнение является координатной формой записи векторного уравнения (4.2.1).

3). *Каноническое уравнение:*

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}. \tag{4.2.3}$$

Уравнение (4.2.3) представляет собой условие коллинеарности в координатной форме (3.3.6) применительно к случаю векторов на плоскости.

4). *Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.2.4}$$

Уравнение (4.2.4) следует из канонического уравнения (4.2.3), если заметить, что в качестве направляющего вектора $\bar{a}$ можно выбрать вектор $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$.

На плоскости имеется другая возможность задания класса параллельных прямых, связанная с указанием *вектора нормали* $\bar{N}$. Как и в случае с направляющим вектором для выделения прямой l из класса, достаточно зафиксировать точку M_0 через которую прямая проходит (рис. 21). Согласно одному из свойств евклидовой геометрии *через фиксированную точку пространства проходит единственная прямая перпендикулярная заданной прямой.* Теперь вектор $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ будет перпендикулярен вектору нормали $\bar{N}$:

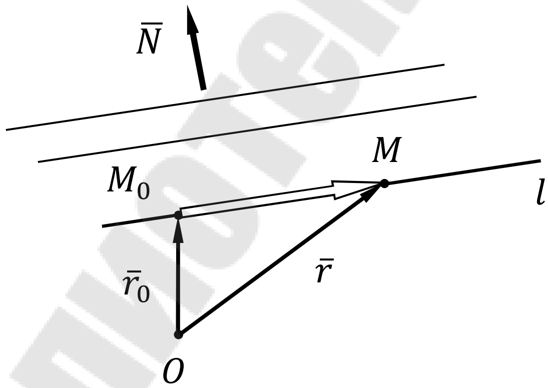


Рис.21. Вектор нормали $\bar{N}$ задает на плоскости класс параллельных прямых.

$$\bar{r} - \bar{r}_0 \perp \bar{N},$$

а уравнения прямой l будут получаться после несложных преобразований как следствия условия перпендикулярности векторов, записанного в векторной или координатной форме.

<u>Уравнения прямой на плоскости,
проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$
перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A, B\}$:</u>

1). *Векторное нормальное уравнение:*

$$\bar{N} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0, \qquad (4.2.5)$$

Уравнение (4.2.5) является частной формой записи условия перпендикулярности векторов (3.5.6). В координатной форме оно имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (4.2.6)$$

Именно в такой форме изначально записывается *уравнение прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$, *перпендикулярно вектору* $\bar{N} = \{A, B\}$.

2). *Общее уравнение прямой на плоскости*:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4.2.7)$$

Уравнение (4.2.7) получается из уравнения (4.2.6) после раскрытия скобок и переобозначения постоянного выражения на константу C.

Рассмотренные два типа уравнений прямой на плоскости являются основными, так как напрямую связаны со свойствами геометрии плоского пространства. Тем не менее, при решении специальных задач удобны и другие формы уравнений. Так, например, при анализе различного рода линейных зависимостей, графическим изображением которых являются прямые линии, первостепенное значение имеет определение скорости роста или падения. Эти характеристики связаны с *углом наклона прямой* в фиксированной системе декартовых координат, который по определению отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки, и принимающим значения от 0° до 180°.

<u>*Опр. 4.2.1.*</u> **Угловым коэффициентом** k прямой l называется тангенс ее угла наклона:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{4.2.8}$$

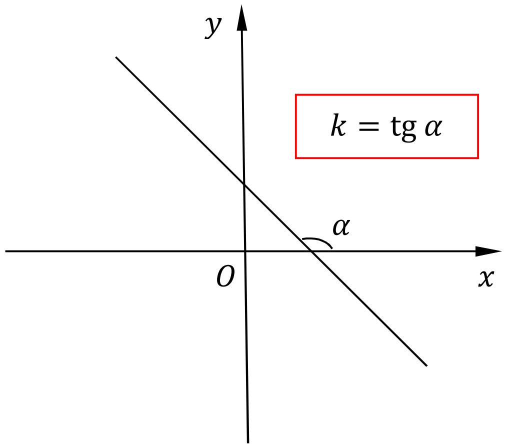


Рис.22. Угловой коэффициент прямой на плоскости

Следует отметить, что не любая прямая на плоскости имеет угловой коэффициент. Действительно, вертикальные прямые угловым коэффициентом не обладают, так как угол их наклона равен 90°, а тангенс угла приближающегося к 90° неограниченно возрастает, при этом $k \to \infty$.

Существует прямая связь между угловым коэффициентом прямой k и декартовыми координатами ее направляющего вектора $\bar{a}$.

Теорема 4.2.1.

Пусть в некоторой декартовой системе координат $\mathfrak{D} =< O, \mathcal{B} >$ прямая $l \nparallel Oy$ и $\bar{a} = \{l, m\}$ – ее направляющий вектор. Тогда угловой коэффициент прямой k вычисляется по формуле:

$$k = \frac{m}{l}. \tag{4.2.9}$$

Для доказательства теоремы необходимо рассмотреть все возможные случаи расположения прямой l и ее направляющего вектора $\bar{a}$ относительно оси Ox (с учетом геометрического смысла декартовых координат как проекций вектора на координатные оси).

Соотношение (4.2.9) позволяет из канонического уравнения (4.2.3) моментально получить *уравнение прямой с угловым коэффициентом* k, *проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$:

$$y = k(x - x_0) + y_0. \qquad (4.2.10)$$

Основные типы задач
на взаимное расположение
точек и прямых на плоскости.

Задача 1. *Угол между двумя прямыми.*

Угол между двумя прямыми на плоскости определяется как угол между их направляющими или нормальными векторами. При этом следует заметить, что в отличие от векторов прямые не имеют выделенного направления. Поэтому в качестве угла φ между прямыми выбирается острый угол, косинус которого положителен, и имеет место соотношение

$$\cos\varphi = |\cos\alpha|, \qquad (4.2.11)$$

где α – угол между направляющими или нормальными векторами.

Пример 4.2.1. Найти угол между прямыми l_1 и l_2, заданными общими уравнениями:

$$2x - 5y + 3 = 0 \text{ и } 3x + 2y - 4 = 0.$$

Решение.

По виду общих уравнений определяем декартовы координаты векторов нормали:

$$\bar{N}_1 = \{2, -5\} \text{ и } \bar{N}_2 = \{3, 2\}.$$

Тогда с учетом соотношения (4.2.11) находим:

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2|}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-5) \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}\ \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{29}\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{277}} \approx 0{,}2060 \;\Rightarrow\; \varphi \approx 78{,}1^\circ.$$

Ответ: $78{,}1^\circ$■

В случае, когда прямые l_1 и l_2, заданы уравнениями с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 типа (4.2.10), угол между прямыми определяется через углы их наклона: $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$. При этом

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (4.2.12)$$

Пример 4.2.2. Найти угол между прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями:

$$y = 3x + 4 \quad \text{и} \quad y = 5x - 6.$$

Решение.

Уравнения имеют вид (4.2.10). По виду уравнений определяем угловые коэффициенты прямых: $k_1 = 3$, $k_2 = 5$.

Далее по формуле (4.2.12) последовательно находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{3-5}{1+3\cdot 5}\right| = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{8} \approx 7{,}1^{\circ}.$$

Ответ: $7{,}1^{\circ}$ ■

Следствием формулы (4.2.12) является условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2, записанное в виде соотношения между угловыми коэффициентами:

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1. \qquad (4.2.13)$$

Пример 4.2.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3, 4)$ перпендикулярно прямой $y = -2x + 7$.

Решение.

Угловой коэффициент заданной прямой равен: $k_0 = -2$. Угловой коэффициент искомой прямой k определяем из соотношения (4.2.16):

$$k_0 \cdot k = -1 \quad \Rightarrow \quad (-2)\cdot k = -1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}.$$

Подставляя в уравнение (4.2.13) координаты точки A и найденное значение углового коэффициента k, находим:

$$y = \frac{1}{2}(x+3) + 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$. ■

Задача 2. *Расстояние между точкой и прямой.*

Расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой l можно найти как модуль проекции вектора $\overline{M_0M}$, где $M_0(x_0, y_0)$ – точка, лежащая на прямой, на нормаль к прямой, задаваемую любым перпендикулярным к l вектором $\overline{N} = \{A, B\}$ (рис. 23).

В случае, если прямая задана общим уравнением (4.2.7), то имеет место формула:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.2.14)$$

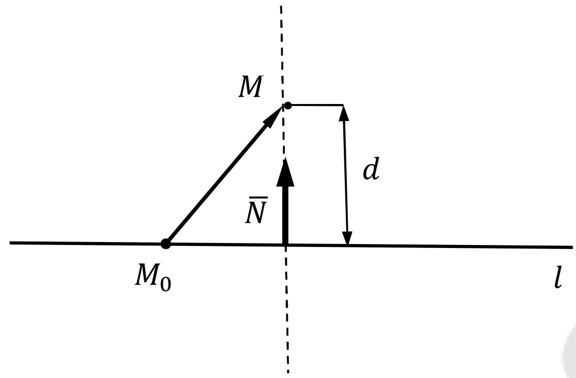


Рис.23. Расстояние между точкой М и прямой l.

Пример 4.2.4. Точки $A(3,-2)$, $B(-2,1)$ и $C(-1,5)$ являются вершинами треугольника. Найти высоту, опущенную из вершины B на противоположную сторону AC.

Решение.

Составим уравнение прямой l, проходящей через сторону AC, используя соотношение (4.2.7) и взяв в качестве точек M_1 и M_2 точки A и C, соответственно:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-(-2)}{5-(-2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{7} \quad \Rightarrow \quad 7x + 4y - 13 = 0.$$

Тогда искомая высота h_B будет равна расстоянию от точки B до прямой l. По формуле (4.2.17) находим

$$h_B = \frac{|7 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 - 13|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{|-23|}{\sqrt{49+16}} = \frac{23}{\sqrt{65}} \approx 2{,}85.$$

Ответ: 2,85. ■

Задача 3. *Расстояние между параллельными прямыми.*

Задачу определения расстояния между двумя параллельными прямыми можно свести к предыдущей задаче, если зафиксировать какую-либо точку на одной из прямых. Тем не менее, если параллельные прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$$Ax + By + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad Ax + By + C_2 = 0,$$

то расстояние между ними можно найти по формуле:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4.2.14)$$

§ 3. Плоскость в пространстве

Любой ненулевой вектор $\overline{N}$ в пространстве задает класс параллельных плоскостей ему перпендикулярных. Чтобы выделить плоскость из класса необходимо указать точку M_0, через которую плоскость проходит (рис. 24). Действительно, согласно одной из теорем стереометрии *через точку проходит единственная плоскость перпендикулярная заданной прямой*. Вектор $\overline{N}$ называется *нормальным вектором плоскости* или просто *вектором нормали*.

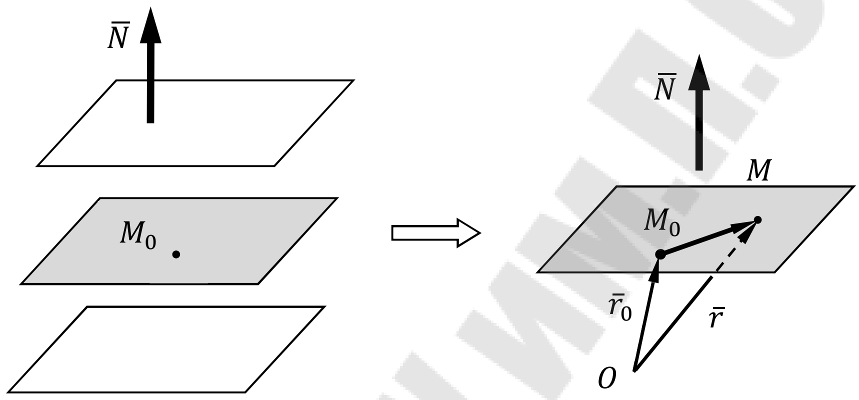


Рис.24. Вектор нормали $\overline{N}$ задает в пространстве класс параллельных плоскостей. Точка M_0 выделяет плоскость из класса.

Возьмем на плоскости произвольную точку M и зафиксируем начало системы координат O. Далее введем радиус-векторы $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$ точек M_0 и M, соответственно. Тогда вектор $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ будет перпендикулярен вектору нормали $\overline{N}$:

$$\bar{r} - \bar{r}_0 \perp \overline{N},$$

а уравнение плоскости будет представлять собой условие перпендикулярности векторов, записанное в векторной или координатной форме.

Уравнения плоскости,
проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$,
<u>перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$:</u>

1). *Векторное нормальное уравнение:*

$$\overline{N} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0. \qquad (4.3.1)$$

Уравнение (4.3.1) является частной формой записи условия перпендикулярности векторов (3.5.6). В координатной форме оно имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.3.2)$$

Именно в этой форме изначально записывается *уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A, B, C\}$.*

2). *Общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (4.3.3)$$

Уравнение (4.3.3) получается из уравнения (4.3.2) после раскрытия скобок и переобозначения постоянного выражения на константу D.

Основные типы задач на взаимное расположение точек и плоскостей.

Задача 1. *Уравнение плоскости, проходящей через три точки.*

Пусть в некоторой декартовой системе координат с началом в точке O заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. В евклидовой геометрии через три точки проходит единственная плоскость. Необходимо составить ее уравнение.

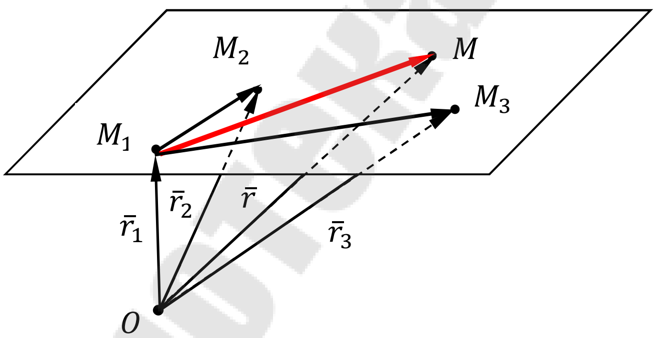


Рис.25. Плоскость, проходящая через три точки M_1, M_2 и M_3.

Возьмем в плоскости произвольную точку M и рассмотрим три вектора (рис. 25):

$$\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1,$$
$$\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1,$$
$$\overline{M_1M_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1.$$

Тогда эти векторы компланарны. Причем, если точка M лежит вне плоскости, то отношение компланарности исчезает. Таким образом, уравнение плоскости будет записываться как условие компланарности наших векторов:

в векторной форме:

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)(\bar{r}_2-\bar{r}_1)(\,\bar{r}_3-\bar{r}_1)=0; \qquad (4.3.4)$$

в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.3.5)$$

После вычисления определителя, например, путем разложения его по первой строке, и элементарных преобразований, уравнение (4.3.5) приводится к виду общего уравнения (4.3.3).

Задача 2. *Расстояние от точки до плоскости.*

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости π определяется как длина перпендикуляра M_1M_1', опущенного из точки M_1 на плоскость (точка M_1' – основание перпендикуляра). Его можно вычислить как модуль проекции вектора $\overline{M_0M_1}$, где M_0 – любая точка, лежащая в плоскости, на прямую с направляющим вектором, совпадающим с вектором нормали плоскости $\bar{N}$ (рис. 26).

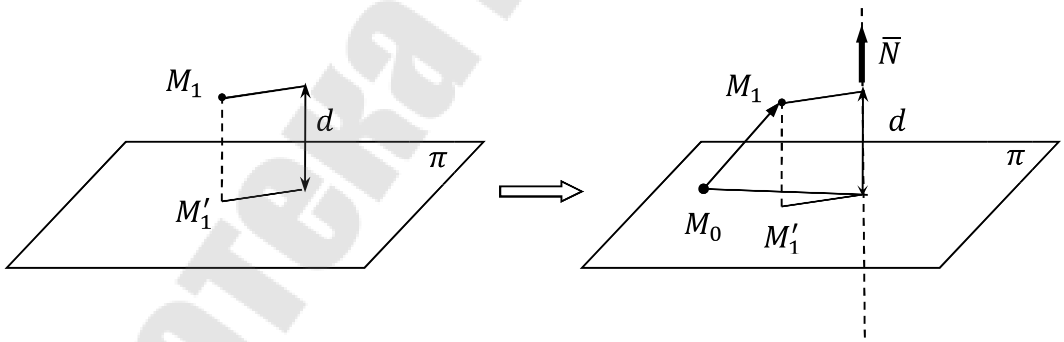


Рис.26. Определение расстояния от точки M_1 до плоскости, как модуль проекции вектора $\overline{M_0M_1}$ на прямую с направляющим вектором $\bar{N}$.

В случае, если плоскость задана общим уравнением (4.3.3), то имеет место формула:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4.3.6)$$

Пример 4.3.1. Вершины треугольной пирамиды расположены в точках $A(3,-,2,2)$, $B(-1,1,-3)$, $C(1,-4,2)$ и $D(2,3,5)$. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из точки D на противоположную грань.

Решение.

Искомую высоту найдем как расстояние от точки D до плоскости, содержащей противоположную грань ABC (рис. 27). Для определения уравнения плоскости грани воспользуемся уравнением (4.3.5). Выберем в качестве первой точки — точку A. Далее, предварительно определим координаты векторов $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ ($M(x,y,z)$ — произвольная точка плоскости):

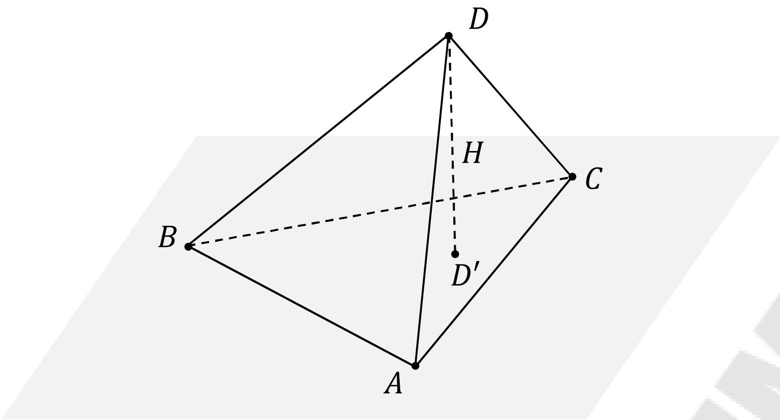


Рис.27. Пирамида с вершиной D и треугольным основанием ABC.

$$\overline{AM} = \{x-3, y+2, z-2\};$$
$$\overline{AB} = \{-1-3, 1+2, -3-2\} = \{-4, 3, -5\};$$
$$\overline{AC} = \{1-3, -4+2, 2-2\} = \{-2, -2, 0\}.$$

Составим из координат векторов определитель и приравняем его к нулю. После вычисления определителя получаем уравнение плоскости в общем виде:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ -4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 5y - 7z - 11 = 0.$$

Высоту H вычисляем по формуле (4.3.16):

$$H = \frac{|5\cdot 2 + (-5)\cdot 3 + (-7)\cdot 5 - 11|}{\sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-7)^2}} = \frac{|-51|}{\sqrt{25+25+49}} = \frac{17}{\sqrt{11}} \approx 5{,}13.$$

Ответ: $H \approx 5{,}13$.. ■

Задача 3. *Расстояние между двумя параллельными плоскостями.*

Определение расстояния между двумя параллельными плоскостями π_1 и π_2 можно свести к предыдущей задаче, если в одной из плоскостей зафиксировать точку (рис.28).

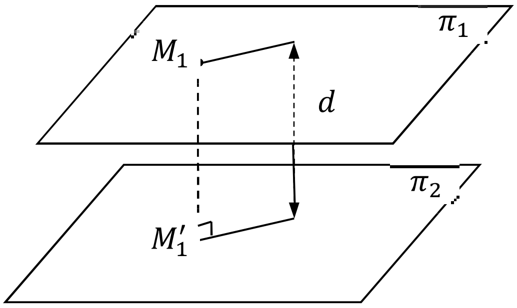


Рис.28. Расстояние d между параллельными плоскостями π_1 и π_2 равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M_1 плоскости π_1 на плоскость π_2.

В случае, если плоскости заданы общими уравнениями:

$$\pi_1: \quad Ax + By + Cz + D_1 = 0;$$
$$\pi_2: \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

то искомое расстояние d можно вычислить по следующей формуле

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{4.3.7}$$

являющейся следствием формулы (4.3.16).

Задача 4. *Угол между плоскостями.*

Изначально угол между плоскостями φ определяется как линейный угол, образованный линиями пересечения плоскостей третьей плоскостью им перпендикулярной, или, что равносильно, перпендикулярной их общей прямой l. Существует и другая возможность определения угла между плоскостями, связанная с использованием угла между их векторами нормали α (рис. 29).

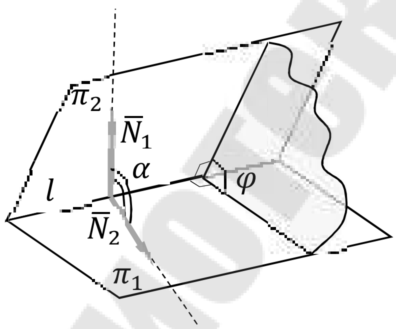


Рис.29. Определение угла между двумя плоскостями

Однако угол между *неупорядоченной* парой векторов может принимать любые значения от 0° до 180°, в то время как угол между плоскостями (если не различать стороны плоскостей) всегда острый: $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$. С учетом этого замечания угол между плоскостями φ находится из равенства:

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2|}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|}. \qquad (4.3.8)$$

Задача определения угла между гранями многогранника, например, пирамиды, отличается от разобранной выше тем, что требует определенного согласования направлений векторов нормали граней. Дело в том, что угол между гранями есть двугранный угол, который образован полуплоскостями, а не плоскостями. Двугранный угол разбивает пространство на два подпространства, а пересекающиеся плоскости — на четыре. Согласование можно провести по следующему правилу: *после помещения векторов нормали в середины граней один из них должен быть направлен внутрь многогранника, а второй во внешнее пространство.*

Пример 4.3.2. Найти угол между гранями ACD и BCD треугольной пирамиды из примера 4.3.1.

Решение.

Векторы нормалей для граней ACD и BCD определим как

$$\bar{N}_1 = \overline{CD} \times \overline{CA},$$
$$\bar{N}_2 = \overline{CD} \times \overline{CB}.$$

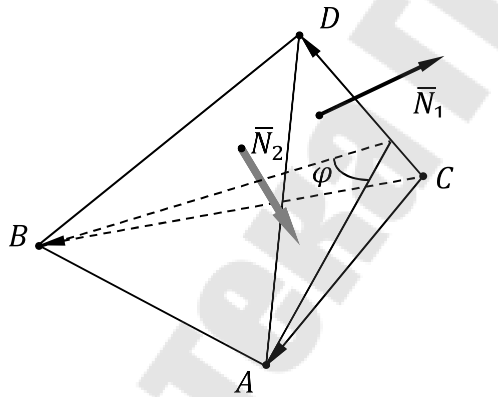


Рис.30. Угол между гранями ACD и BCD треугольной пирамиды. $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ — векторы нормалей граней с согласованными направлениями.

Нетрудно проверить, например, с помощью правила правой руки, что вектор $\bar{N}_1$ направлен во внешнее пространство пирамиды, а вектор $\bar{N}_2$ — во внутреннее (рис. 30). Используя условие примера 4.3.1, найдем координаты векторов-ребер:

$$\overline{CA} = \{2, 2, 0\};$$
$$\overline{CB} = \{-2, 5, -5\};$$
$$\overline{CD} = \{1, 7, 3\}.$$

Далее определяем координаты векторов нормалей $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$:

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 12\bar{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_1 = \{-6, 6, -12\};$$

$$\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -50\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 19\bar{k} \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_2 = \{-50, -1, 19\}.$$

Наконец, находим искомый угол φ, как угол между векторами нормалей:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|} = \frac{(-6)\cdot(-50) + 6\cdot(-1) + (-12)\cdot 19}{\sqrt{36+36+144}\sqrt{2500+1+361}} = \frac{11}{18\sqrt{53}} \approx 0.0839;$$

$$\varphi = \arccos 0{,}0839 \approx 85{,}2^{\circ}.$$

Ответ: $\varphi \approx 85{,}2^{\circ}$. ■

§ 4. Прямая и плоскость в пространстве

Класс параллельных прямых в трехмерном пространстве (в отличие от плоскости) можно задать *только одним способом* – с помощью направляющего вектора $\bar{a}$. Поэтому уравнения прямой в пространстве являются трехмерными обобщениями уравнений (4.2.4) – (4.2.7).

Пусть $\bar{a} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой l, заданный своими координатами в некоторой декартовой системе координат, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка с радиус-вектором $\bar{r}_0$, через которую прямая l проходит. Тогда прямая l может быть задана уравнением в одной из следующих форм.

Уравнения прямой в пространстве,
проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$,
<u>с направляющим вектором $\bar{a} = \{l, m, n\}$:</u>

1). *Векторное параметрическое уравнение:*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}\,t, \tag{4.4.1}$$

где $t \in \mathbb{R}$.

2). Система *параметрических уравнений*:

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \\ z = z_0 + n\,t, \end{cases} \tag{4.4.2}$$

где $t \in \mathbb{R}$.

3). *Каноническое уравнение*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{4.4.3}$$

4). *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.4.4)$$

Все формы уравнений эквивалентны, и легко могут быть преобразованы друг в друга.

Основные типы задач на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Задача 1. *Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые.*

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями в некоторой декартовой системе координат:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

В пространстве имеются три возможных относительных расположения двух прямых:

- прямые могут быть *параллельными*,
- прямые могут *пересекаться*,
- прямые могут *скрещиваться*.

1). Параллельные прямые в пространстве.

Критерий параллельности прямых равносилен условию коллинеарности их направляющих векторов $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (4.4.4)$$

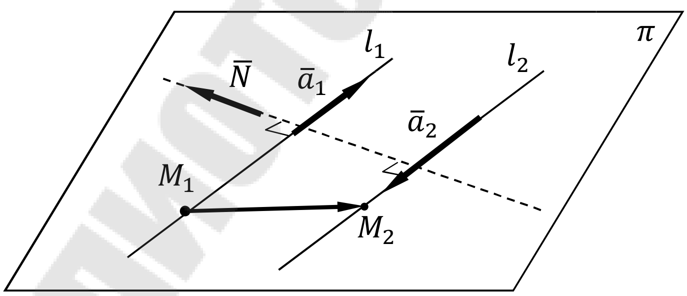


Рис.31. Параллельные прямые в пространстве.

Однако при этом прямые могут совпадать. Для разделения прямых l_1 и l_2 необходимо дополнительно потребовать, чтобы вектор $\overline{M_1M_2}$

не был коллинеарным с направляющими векторами: $\overline{M_1M_2} \nparallel \bar{a}_1, \bar{a}_2$.

Расстояние между параллельными прямыми в пространстве может быть вычислено как абсолютное значение проекции вектора $\overline{M_1M_2}$ на ось, задаваемую вектором нормали прямых — $\bar{N}$, лежащим в их плоскости π (рис. 31). В качестве вектора $\bar{N}$ можно взять, например, следующий вектор:

$$\bar{N} = \bar{a}_1 \times [\bar{a}_1 \times \overline{M_1M_2}]. \qquad (4.4.5)$$

Пример 4.4.1. Установить, при каких значениях параметров α и β прямые l_1 и l_2, заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{\beta} = \frac{z+2}{-2},$$

параллельны. В случае существования таких параметров, найти расстояние между прямыми.

Решение.

Из заданных уравнений выписываем координаты направляющих векторов и точек, через которые прямые проходят:

$$\bar{a}_1 = \{3, 6, \alpha\}, \quad M_1(3, -1, 3);$$
$$\bar{a}_2 = \{2, \beta, -2\}, \quad M_2(-1, 3, -2).$$

Далее, используя условие коллинеарности векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ (4.4.4), вычисляем значения параметров α и β, при которых прямые l_1 и l_2 параллельны:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{\beta} = \frac{\alpha}{-2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4, \quad \alpha = \frac{3 \cdot (-2)}{2} = -3.$$

Для определения расстояния между прямыми d предварительно найдем координаты вектора нормали $\bar{N}$ (4.4.5), лежащего в плоскости прямых:

$$\bar{a}_1 = \{3, 6, -3\}, \quad \overline{M_1M_2} = \{-1-3, 3-(-1), -2-3\} = \{-4, 4, -5\};$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned}\bar{N} = \bar{a}_1 \times [\bar{a}_1 \times \overline{M_1M_2}] &= \bar{a}_1\,(\bar{a}_1 \cdot \overline{M_1M_2}) - \overline{M_1M_2}\,(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1) = \\ &= \left(3\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 3\bar{k}\right)\left(3 \cdot (-4)) + 6 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5)\right) - \\ &\quad -\left(-4\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - 5\bar{k}\right)(3^2 + 6^2 + (-3)^2) = \\ &= 27\left(11\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 7\bar{k}\right).\end{aligned}$$

Здесь использовалась формула для двойного векторного произведения:

$$\bar{a} \times \left[\bar{b} \times \bar{c}\right] = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right). \qquad (4.4.6)$$

Наконец, расстояние d находим как модуль проекции вектора $\overline{M_1M_2}$ на ось, задаваемую вектором $\bar{N}$:

$$d = |\text{пр}_{\bar{N}}\overline{M_1M_2}| = \frac{\left|\bar{N} \cdot \overline{M_1M_2}\right|}{|\bar{N}|} = \frac{27\,|11 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 + 7 \cdot (-5)|}{27\sqrt{11^2 + (-2)^2 + 7^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{174}}{2} \approx 6{,}60.$$

Ответ: $\alpha = -3, \beta = 4;\ d \approx 6{,}60.$ ■

2). Пересекающиеся прямые в пространстве.

Характерным свойством пересекающихся прямых в пространстве является существование определенной плоскости, в которой они лежат. Поэтому *условие пересечения прямых* связано с условием компланарности трех векторов – $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ (рис. 32), которое в координатной форме имеет вид:

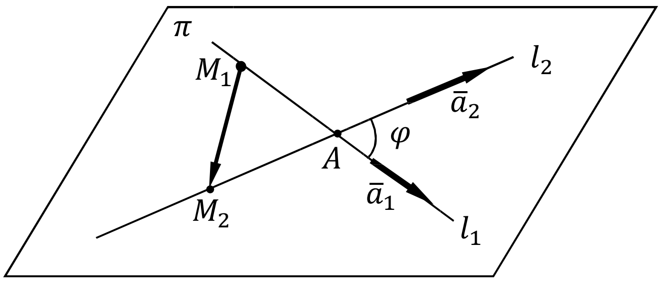


Рис.32. Пересекающиеся прямые в пространстве.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.4.7)$$

Следует отметить, что параллельные прямые также лежат в одной плоскости и удовлетворяют соотношению (4.4.7). Для разделения двух случаев, а именно, пересечения и параллельности, необходимо дополнительно потребовать, чтобы направляющие векторы прямых были неколлинеарными: $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$.

Пример 4.4.2. Прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями

$$l_1:\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad l_2:\ \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Установить пересекаются ли прямые. В случае пересечения найти:
а) угол между прямыми φ; б) координаты точки пересечения A.

Решение.

Согласно условию выписываем координаты направляющих векторов и точек, лежащих на прямых:

$$\bar{a}_1 = \{2, -3,\ 1\}, \quad M_1(-1,\ 1, 2);$$
$$\bar{a}_2 = \{3\ , -1,\ 2\}, \quad M_2(-2, -1, 1).$$

Сразу отметим, что прямые не параллельны, так как координаты их направляющих векторов не пропорциональны, а значит $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$.

Далее проверим выполнение условие пересечения прямых (4.4.7):

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (\mathbf{2}' = \mathbf{2} - \mathbf{3}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

При вычислении определителя мы от второй строки отняли третью, и получили определитель с двумя совпадающими строками, который равен нулю. Таким образом, условие (4.4.7) выполняется и *прямые пересекаются.*

а). Угол между прямыми φ найдем с помощью угла между их направляющими векторами α:

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2|}{|\bar{a}_1||\bar{a}_2|} = \frac{|2\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{11}{14} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{11}{14} \approx 38{,}2^\circ.$$

б). Для определения координат точки пересечения A запишем уравнение какой-нибудь из прямых, например, l_1, в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = \ \ 1 - 3t, \\ z = \ \ 2 + \ t. \end{cases}$$

Параметр t_A, соответствующий точке A, найдем, подставив эти соотношения в левое равенство уравнения прямой l_2 (точка A – общая точка прямых!):

$$\frac{(-1+2t_A)+2}{3} = \frac{(1-3t_A)+1}{-1} \quad \Rightarrow \quad -1\cdot(1+2t_A) = 3\cdot(2-3t_A) \quad \Rightarrow \quad t_A = 1.$$

Таким образом, координаты точки A равны:

$$x_A = -1 + 2\cdot 1 = 1, \qquad y_A = \ 1 - 3\cdot 1 = -2, \qquad z_A = \ 2 + \ 1 = 3$$

Ответ: а) $\varphi \approx 38{,}2^\circ$; б) $A(1,-2,3)$. ■

3). Скрещивающиеся прямые в пространстве.

Критерием скрещивания двух прямых в пространстве является нарушение условия их пересечения (4.4.7). В евклидовой геометрии через любые скрещивающиеся прямые проходят параллельные плоскости. Нормальный вектор плоскостей $\bar{N}$ определяется как векторное произведение направляющих векторов прямых:

$$\bar{N} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2. \qquad (4.4.8)$$

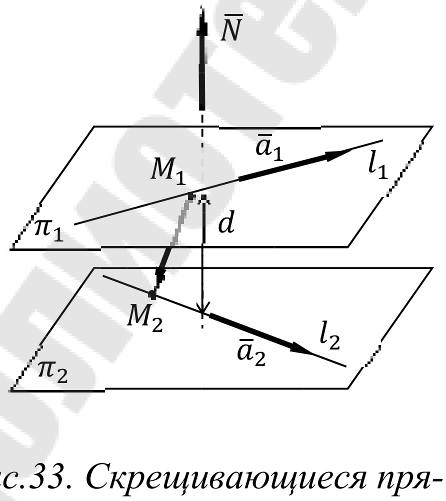


Рис.33. Скрещивающиеся прямые в пространстве.

Расстояние между прямыми d можно найти как модуль проекции вектора $\overline{M_1M_2}$ на ось, задаваемую вектором $\bar{N}$ (рис.33):

$$d = |\text{пр}_{\bar{N}} \overline{M_1 M_2}|. \qquad (4.4.9)$$

Однако возможны и другие способы:
d равно
– расстоянию от точки M_1 до плоскости π_2;
– расстоянию между параллельными плоскостями π_1 и π_2;
и т.п.

Пример 4.4.3. Прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями

$$l_1:\ \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3} \quad \text{и} \quad l_2:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

Установить являются ли прямые скрещивающимися. В случае скрещивания найти: а) уравнения параллельных плоскостей, содержащих прямые; б) расстояние между прямыми.

Решение.

Выпишем координаты направляющих векторов и точек, лежащих на прямых:

$$\bar{a}_1 = \{-1, 2,\ 3\}, \quad M_1(3, -1, 4);$$
$$\bar{a}_2 = \{2\ , 1, -2\}, \quad M_2(1, -2,\ 3).$$

Далее проверим выполнение соотношения (4.4.7):

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 1 - (-4 - 2 - 6) = 3 - (-12) = 15 \neq 0.$$

Соотношение (4.4.7) не выполняется, значит, *прямые* l_1 и l_2 *скрещиваются.*

а) По формуле (4.4.8) определим координаты вектора нормали плоскостей π_1 и π_2, содержащих прямые:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4-3)\bar{\imath} - (2-6)\bar{\jmath} + (-1-4)\bar{k} = -7\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - 5\bar{k}.$$

Затем записываем уравнения плоскостей в форме (4.3.2), и после алгебраических преобразований приводим их к общему виду:

$$\pi_1: \quad -7(x-3) + 4\big(y - (-1)\big) - 5(z-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad -7x + 4y - 5z + 45 = 0;$$
$$\pi_2: \quad -7(x-1) + 4\big(y - (-2)\big) - 5(z-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -7x + 4y - 5z + 30 = 0.$$

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми удобно найти как расстояние между параллельными плоскостями π_1 и π_2. Воспользовавшись формулой (4.3.7), получаем:

$$d = \frac{|45- \quad |}{\sqrt{(-7)^2+4^2+(-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1{,}58.$$

Ответ: а) $\pi_1: \ -7x + 4y - 5z + 45 = 0;$
$\pi_1: \ -7x + 4y - 5z + 30 = 0;$
б) $d \approx 1{,}58$.. ■

Задача 2. Прямая как линия пересечения плоскостей.

Рассмотрим прямую l как линию пересечения двух *не параллельных* плоскостей: $\pi_1 \nparallel \pi_2$, заданных своими общими уравнениями:

$$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

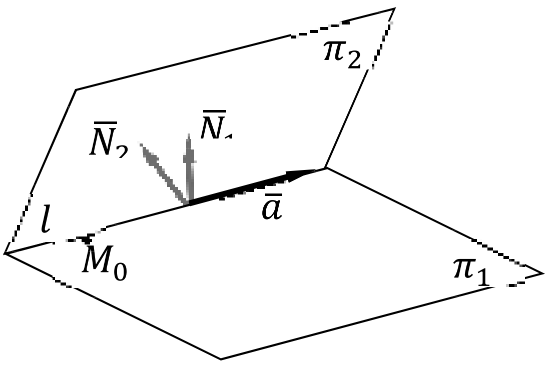


Рис.34. Прямая в пространстве как линия пересечения плоскостей

Тогда координаты точек $M(x, y, z)$, лежащих на прямой, должны удовлетворять линейной системе, составленной из этих уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.4.10)$$

Система (4.4.10) имеет ранг равный двум, поэтому ее пространство решений однопараметрическое. По-существу, она является еще одной самостоятельной формой *уравнения прямой в пространстве*.

Из системы (4.4.10) нетрудно получить уравнение в каноническом виде (4.4.3). Действительно, в качестве направляющего вектора прямой $\bar{a}$ выберем следующий вектор (рис. 34):

$$\bar{a} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2, \qquad (4.4.11)$$

где $\bar{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – нормальные векторы плоскостей π_1 и π_2, соответственно. Координаты фиксированной точки прямой $M_0(x_0, y, z_0)$ определим как частное решение системы (4.4.10). Из соображений простоты предпочтение отдается целочисленным решениям. Другой вариант – занулить одну из неизвестных и решить упрощенную систему, например, с помощью правила Крамера.

Пример 4.4.4. Найти каноническое уравнение прямой, заданной линейной системой:

$$\begin{cases} 4x - y - 2z + 5 = 0, \\ 3x + 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Прямая рассматривается как линия пересечения двух плоскостей. По виду уравнений выписываем координаты нормальных векторов плоскостей:

$$\overline{N}_1 = \{4, -1, -2\}; \quad \overline{N}_2 = \{3,\ 2, -1\}.$$

Затем по формуле (4.4.11) находим координаты направляющего вектора прямой

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\bar{i} - 2\bar{j} + 11\bar{k}.$$

Далее, нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что заданная система допускает следующее целочисленное решение:

$$x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 5.$$

Таким образом, каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{11}.$$

■

Задача 3. Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Расстояние d от точки A до прямой l определяется как длина перпендикуляра AA', опущенного из точки на прямую (рис. 35). Для его определения можно использовать разные способы. Например, так как в евклидовой геометрии через точку проходит единственная прямая l', параллельная заданной прямой, то d равно расстоянию между параллельными прямыми (пример 4.4.3 б)).

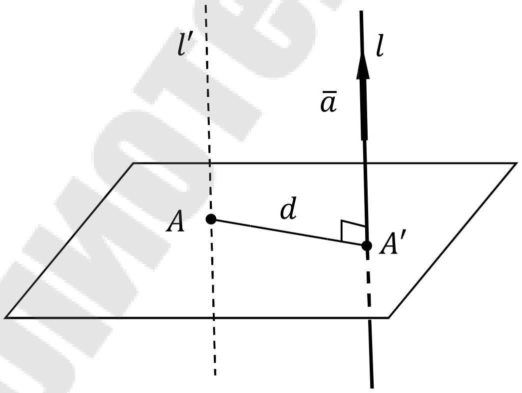


Рис.35. Определение расстояния от точки A до прямой l.

Другая возможность связана с использованием плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой. В качестве нормального вектора плоскости можно взять направляющий вектор прямой: $\overline{N} = \bar{a}$.

Пусть прямая l задана системой параметрических уравнений (4.4.2). Подставляя параметрические выражения для координат точек прямой в уравнение плоскости, находим параметр $t_{A'}$, соответствующий точке пересечения прямой и плоскости A', а затем и ее координаты. Расстояние от точки A до прямой l вычисляется по формуле (4.1.1) как расстояние между точками A и A'.

Пример 4.4.5. Найти расстояние от точки $A(-1, 2, 5)$ до прямой l, заданной каноническим уравнением:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

Решение.

Составим, используя соотношение (4.3.2), уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l, выбрав в качестве вектора нормали $\overline{N}$ направляющий вектор прямой $\bar{a} = \{-3, 1, 4\}$:

$$(-3) \cdot \big(x - (-1)\big) + 1 \cdot (y - 2) + 4 \cdot (z - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 4z + 25 = 0.$$

Далее, запишем уравнение заданной прямой в параметрической форме, приравняв все части канонического равенства параметру t:

$$\begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = \ \ t - 3, \\ z = \ 4t + 1. \end{cases}$$

Подставим эти соотношения в уравнение плоскости и определим параметр t для их общей точки A':

$$3 \cdot (-3t + 2) - (t - 3) - 4 \cdot (4t + 1) + 25 = 0 \ \Rightarrow \ -26t + 30 = 0 \ \Rightarrow \ t \equiv t_{A'} = \frac{15}{13}.$$

Подставляя найденный параметр в параметрические равенства, находим координаты точки пересечения прямой и плоскости:

$$x_{A'} = -3\,\frac{15}{13} + 2 = -\frac{19}{13}; \qquad y_{A'} = \frac{15}{13} - 3 = -\frac{24}{13}; \qquad z_{A'} = 4\frac{15}{13} + 1 = \frac{73}{13}.$$

Расстояние d от точки A до прямой l вычисляем по формуле (4.1.1) как расстояние между точками A и A':

$$d=\sqrt{\left(-\frac{19}{13}-(-1)\right)^2+\left(-\frac{24}{13}-1\right)^2+\left(\frac{73}{13}-5\right)^2}=\frac{10\sqrt{26}}{13}\approx 3{,}92.$$

Ответ: $d\approx 3{,}92$. ■

§ 5. Классификация кривых и поверхностей

Способы задания линий и поверхностей существенно зависят от задач, в которых графические изображения и чертежи являются неотъемлемой частью решения. Так линии чаще всего представляют собой:

1) траектории движения тел или фиксированных точек;

2) границы плоских фигур или областей;

3) графики функций.

В первом случае наиболее естественным является *параметрический способ* задания линий:

$$\bar{r}=\bar{r}(t). \qquad (4.5.1)$$

Здесь $\bar{r}$ – радиус-вектор движущейся точки, а t – эволюционный параметр (как правило, время).

Следует отметить, что параметрический способ позволяет задавать линии не только на плоскости, но и в пространстве. Зафиксируем некоторую декартову систему координат $\mathfrak{D}=<O,\mathcal{B}>$. Тогда векторное соотношение (4.5.1) в координатной форме принимает вид системы

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \text{ – на плоскости;} \qquad (4.5.2)$$

или

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases} \text{ – в пространстве.} \qquad (4.5.3)$$

Дополнительно требуется указать область значений параметра t:

– $t\in[t_1,t_2]$ (*для ограниченных или замкнутых кривых*);

– $t\in[t_0,+\infty)$ *или* $t\in(-\infty,+\infty)$ (*для неограниченных кривых*).

Пример 4.5.1. *Циклоида*.

Зафиксируем точку A на ободе колеса радиуса R, движущегося прямолинейно (рис. 36). Тогда при определенных начальных условиях эта точка будет перемещаться по траектории, параметрическое уравнение которой имеет вид:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \qquad (4.5.4)$$

где $t \in [0, +\infty)$.

Плоская кривая, задаваемая уравнением (4.5.4), называется *циклоидой*.

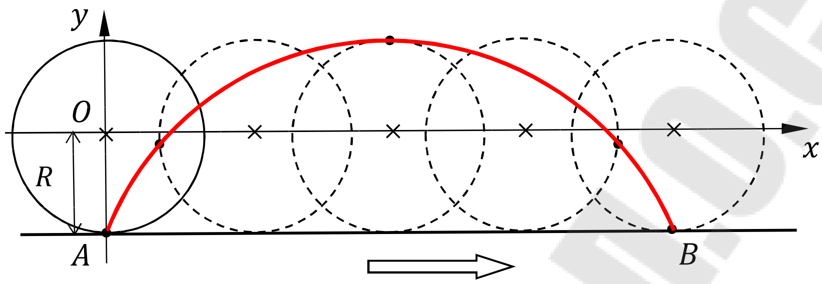


Рис. 36. Траектория движения точки A, закрепленной на ободе колеса. Колесо движется вправо без проскальзывания.

Циклоида встречается во многих приложениях математики, в частности, в механике. Так, циклоида есть линия наибыстрейшего спуска (*задача о брахистохроне*, И. Бернулли, 1696 г.).

■

<u>Пример 4.5.2</u>. *Винтовая линия*.

Винтовые линии относятся к классу пространственных кривых. Различают цилиндрические, конические, сферические и другие винтовые линии. В частности, именно по цилиндрической винтовой линии движется точка, равномерно скользящая вдоль образующей цилиндра, в то время как сам цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

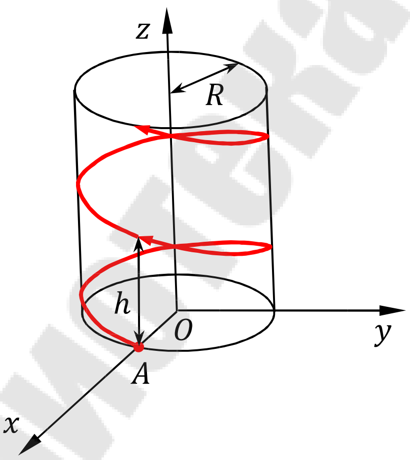


Рис. 37. Винтовая линия.

Выберем декартову систему координат с осью Oz, совпадающей с осью симметрии кругового цилиндра радиуса R (рис. 37). Тогда винтовая линия, проходящая через точку $A(R, 0{,}0)$, будет задаваться следующей системой параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = R\cos t\,, \\ y = R\sin t\,, \\ z = h\,t, \end{cases} \tag{4.5.5}$$

где h – шаг винтовой линии. ∎

Предположим, что, например, первое уравнение параметрической системы (4.5.2) однозначно разрешимо относительно параметра t: $t = t(x)$. Подставляя выражение $t(x)$ во второе уравнение системы вместо параметра t, получим *уравнение кривой в явном виде*:

$$y = y(t(x)) \equiv f(x). \tag{4.5.6}$$

Следует отметить, что в этом случае кривая может быть рассмотрена и как *график функции* $f(x)$. Понятно, что не любая кривая задает функцию (должно выполняться *условие однозначности*). Поэтому форма задания кривой в виде явного уравнения (4.5.6) не является общей.

Преобразуем соотношение (4.5.6), перебросив правую часть равенства влево:

$$y - f(x) \equiv F(x, y) = 0.$$

Такая форма уравнения кривой называется *неявной.* Она допускает естественное обобщение:

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{4.5.7}$$

Уравнение (4.5.7) будет задавать в фиксированной декартовой системе координат $\mathfrak{D} =< O, \mathcal{B} >$ кривую на плоскости, если этому уравнению будут удовлетворять *только* координаты точек $M(x, y)$, лежащих на этой кривой.

<u>*Опр. 4.5.1.*</u> Линия называется *алгебраической кривой порядка* N, если она может быть задана уравнением (4.5.7), где $\Phi(x, y)$ – многочлен двух переменных степени N:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{kl} x^k y^l\ .$$

Всякая не алгебраическая кривая *называется трансцендентной.*

Аналогичные уравнения и классификация существует и для поверхностей:

- *векторное параметрическое уравнение поверхности:*

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v); \tag{4.5.8}$$

- *параметрическое уравнение поверхности:*

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v); \end{cases} \tag{4.5.9}$$

- *уравнение поверхности в явном виде:*

$$z = f(x, y); \tag{4.5.10}$$

- *уравнение поверхности в неявном виде:*

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{4.5.11}$$

Уравнение (4.5.11) будет задавать в фиксированной декартовой системе координат $\mathfrak{D} = < O, \mathcal{B} >$ поверхность в пространстве, если этому уравнению будут удовлетворять *только* координаты точек $M(x, y, z)$, лежащих на этой поверхности.

<u>*Опр. 4.5.2.*</u> Поверхность называется *алгебраической поверхностью порядка* N, если она может быть задана уравнением (4.5.11), где $\Phi(x, y, z)$ – многочлен трех переменных степени N:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{l} a_{krs} x^k y^r z^s \ .$$

Всякая не алгебраическая поверхность *называется трансцендентной.*

Таким образом, согласно общей классификации кривых и поверхностей:

- *прямые – это алгебраические кривые первого порядка*;
- *плоскости – это алгебраические поверхности первого порядка.*

Вообще говоря, произвольные уравнения (4.5.7) и (4.5.11) могут и не иметь действительных решений. В этом случае они не задают никаких геометрических объектов. Глубокая связь между уравнениями, геометрическими линиями и поверхностями изучается в курсе *алгебраической геометрии*. В курсе *аналитической геометрии* изучаются только *алгебраические кривые и поверхности до второго порядка (включительно).*

§ 6. Невырожденные кривые второго порядка

Запишем *общее уравнение кривой второго порядка*:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (4.6.1)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Здесь переменные x и y имеют смысл координат точек, лежащих на кривой. При смене базиса координаты изменятся, а значит, изменится и вид уравнения (4.6.1). Система координат, в которой уравнение (4.6.1) имеет наипростейший вид, называется *канонической.* При этом и само уравнение называется *уравнением в канонической форме* или просто *каноническим уравнением*.

Всего существует девять типов канонических уравнений кривых второго порядка. Два из них не имеют действительных решений. Еще четыре задают на плоскости либо точку, либо пару прямых (пересекающихся, параллельных, совпадающих). Они называются *вырожденными.* Оставшиеся три уравнения задают на плоскости, так называемые, *невырожденные кривые второго порядка*: *эллипс, гиперболу и параболу.* Эти кривые были открыты в Древней Греции как *конические сечения*.

I. Эллипс.

Дадим геометрическое определение эллипса, как линии обладающей определенным свойством.

Опр. 4.6.1. **Эллипсом** называется плоская кривая, для *всех* точек которой сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами эллипса*, есть величина постоянная.

Расстояния от точек эллипса M до фокусов F_1 и F_2 называются *фокальными радиусами*:

$$r_1 = |MF_1|,\ r_2 = |MF_2| \qquad \Rightarrow \quad r_1 + r_2 = const.$$

Замечательно, что из этого определения можно получить все сведения о свойствах эллипса, в том числе и о форме канонического уравнения.

Теорема 4.6.1. (*о каноническом уравнении эллипса*)

Пусть точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса в декартовой системе координат с осью абсцисс, проходящей через фокусы и началом в середине фокального отрезка $[F_1F_2]$, причем

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (4.6.1)$$

Тогда в этой системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.6.2)$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4.6.3)$$

Для доказательства теоремы необходимо записать выражения для фокальных радиусов r_1 и r_2 через координаты точек $M(x, y)$, $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, подставить их в соотношение (4.6.1) и избавиться от иррациональности с помощью алгебраической операции возведения обеих частей равенства в квадрат.

Изображение эллипса
в канонической системе координат (СК).

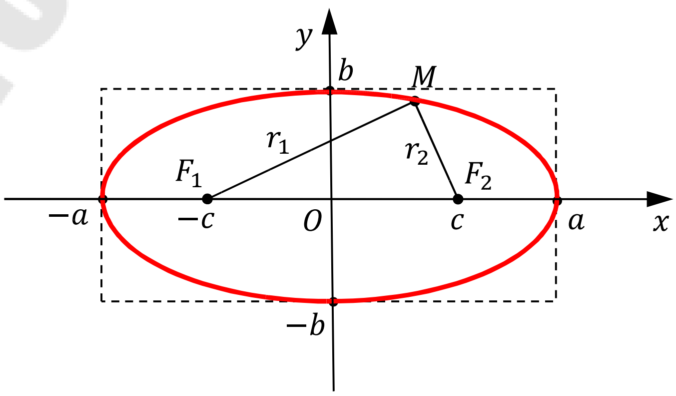


Рис. 38. Эллипс в канонической системе координат.

Эллипс относится к специальному классу замкнутых кривых, а именно, к овалам, и располагается внутри прямоугольника, длины сторон которого равны $2a$ и $2b$ (рис.38). В каноническом уравнении $a > b$, что следует из соотношения (4.6.3). Поэтому a часто называют длиной *большей полуоси эллипса*, а b – длиной *меньшей полуоси*.

Основные общие свойства эллипса.

1. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. В канонической системе координат они совпадают с координатными осями.
2. Середина фокального отрезка $[F_1F_2]$ является центром симметрии эллипса.
3. Фокусы эллипса F_1 и F_2 располагаются на большей его оси.
4. **Эксцентриситет эллипса**, который определяется как отношение длины фокального отрезка к длине большой оси, меньше единицы:
$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \frac{c}{a} < 1. \qquad (4.6.4)$$
Эксцентриситет эллипса характеризует степень его вытянутости вдоль большей оси.
5. В случае $a = b \equiv R$ эллипс вырождается в окружность радиуса R, при этом фокусы эллипса совпадают с центром окружности. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид:
$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (4.6.5)$$

Для составления массива координат точек кривых удобно использовать параметрическую форму уравнений:

– *параметрическое уравнение эллипса (в канонической СК):*

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad \text{где} \quad t \in [0, 2\pi]; \qquad (4.6.6)$$

– *параметрическое уравнение окружности (с центром в начале координат и радиусом R):*

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad \text{где} \quad t \in [0, 2\pi]. \qquad (4.6.7)$$

Пример 4.6.1. Эллипс задан каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Найти координаты фокусов эллипса и его эксцентриситет.

Решение.

Из уравнения находим длины полуосей: $a=\sqrt{9}=3$; $b=\sqrt{4}=2$. Параметр c находим из соотношения (4.6.3): $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

Таким образом, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-\sqrt{5},0)$ и $F_2(\sqrt{5},0)$, а его эксцентриситет (согласно формуле (4.6.4)) равен

$$e=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}7453.$$

Ответ: $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$; $e\approx 0{,}7453$.

■

II. Гипербола.

Дадим геометрическое определение гиперболы, как линии, обладающей определенным свойством.

Опр. 4.6.2. **Гиперболой** называется плоская кривая, для *всех* точек которой модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2, называемых *фокусами гиперболы*, есть величина постоянная:

$$|r_1-r_2|=const,$$

где r_1 и r_2 – фокальные радиусы.

Определение позволяет получить все сведения о свойствах гиперболы, в том числе и о форме канонического уравнения.

Теорема 4.6.2. (*о каноническом уравнении гиперболы*)

Пусть точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы в декартовой системе координат с осью абсцисс, проходящей через фокусы и началом в середине фокального отрезка $[F_1F_2]$, причем

$$|r_1-r_2|=2a. \tag{4.6.6}$$

Тогда в этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.6.7}$$

где

$$b^2=c^2-a^2. \tag{4.6.8}$$

Изображение гиперболы
в канонической системе координат.

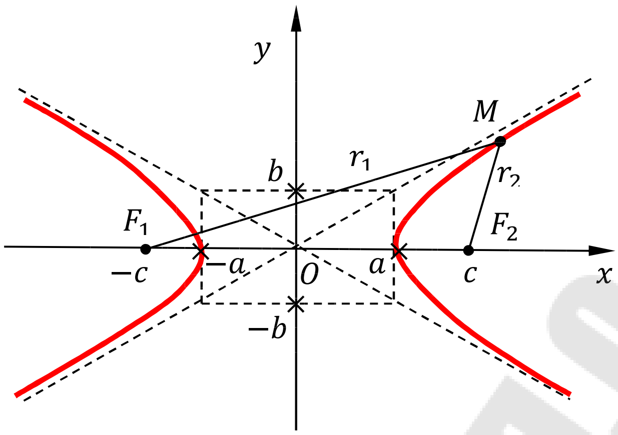


Рис. 39. Гипербола в канонической системе координат.

Гипербола есть двусвязная кривая. Ее ветви располагаются вне прямоугольника, длины сторон которого равны $2a$ и $2b$, и асимптотически приближаются к двум пересекающим прямым (*асимптотам гиперболы*), проходящим через диагонали прямоугольника (рис.39).

Основные общие свойства гиперболы.

1. Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. В канонической системе координат они совпадают с координатными осями.
2. Середина фокального отрезка $[F_1F_2]$ является центром симметрии гиперболы.
3. **Эксцентриситет гиперболы**, который определяется аналогично эксцентриситету эллипса, больше единицы:
$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \frac{c}{a} > 1. \quad (4.6.5)$$
Эксцентриситет гиперболы характеризует степень сжатия ее ветвей к оси, проходящей через вершины (ось Ox в канонической системе координат).
4. Уравнения асимптот гиперболы:
$$y = \pm\frac{b}{a}x. \quad (4.6.6)$$

Параметрическое уравнение гиперболы:

$$\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = \quad b\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases} \quad \text{где} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.6.7)$$

III. Парабола.

Опр. 4.6.3.

Параболой называется плоская кривая, для *всех* точек которой расстояние r до фиксированной точки плоскости F, равно расстоянию d до некоторой фиксированной прямой D:

$$r = d. \tag{4.6.8}$$

Точка F называется *фокусом параболы*, а прямая D – ее *директрисой*.

Определение позволяет получить все сведения о свойствах параболы, в том числе и о форме канонического уравнения.

Теорема 4.6.2. (*о каноническом уравнении параболы*)

Пусть в некоторой декартовой системе координат фокус параболы располагается в точке $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $p > 0$, а директриса задается уравнением:

$$D: \quad x = -\frac{p}{2}. \tag{4.6.9}$$

Тогда в этой системе координат уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{4.6.10}$$

Изображение параболы
в канонической системе координат.

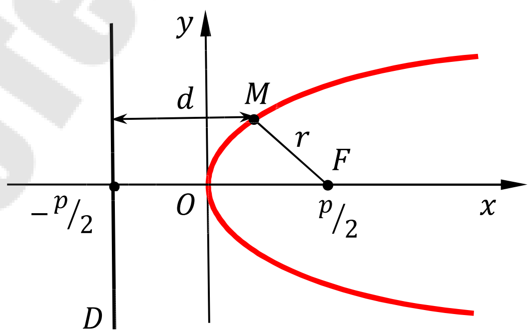


Рис. 40. Парабола в канонической системе координат.

Основные общие свойства параболы.

1. Парабола обладает осью симметрии, которая проходит через ее вершину. В канонической системе координат она совпадает с осью Ox.
2. Эксцентриситет параболы равен единице.
3. Парабола является графиком квадратичной функции $y = x^2$.

Параметрическое уравнение параболы:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \sqrt{2p}\, t, \end{cases} \quad \text{где} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (4.6.11)$$

Пример 4.6.2. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, являющейся графиком функции $y = x^2$.

Решение.

Перейдем в каноническую систему координат, выполнив замену переменных:

$$x = y'; \quad y = x'.$$

Запишем уравнение параболы в каноническом виде (4.6.10):

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad {y'}^2 = x' \quad \Rightarrow \quad {y'}^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x',$$

По виду уравнения определяем параметр p: $p = 1/2$.

Таким образом, в *канонической системе координат* фокус располагается в точке $F(1/4\,, 0)$, а директриса задается уравнением: $x' = -1/4$.

Возвращаясь в исходную систему координат согласно формулам перехода, получаем:

$$x_F = y'_F = 0, \quad y_F = x'_F = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; F(0, 1/4);$$

$$x'_D = y_D = -\frac{1}{4}. \quad \Rightarrow \quad D\colon y = -1/4.$$

Ответ: $F(0, 1/4)$; D: $y = -1/4$. ■

Чрезвычайно интересны оптические свойства параболических зеркал, которые широко используются в радиотехнических устройствах и телескопах. Так лучи света, падающие на параболическое зеркало параллельно его оси симметрии, после отражения соберутся в фокусе зеркала, что позволяет усиливать слабые сигналы.

§ 7. Невырожденные поверхности второго порядка

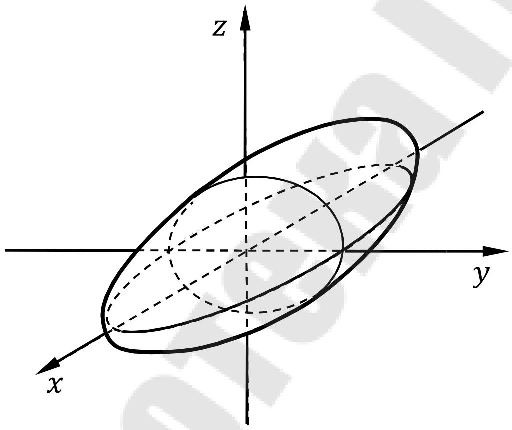
Запишем *общее уравнение поверхности второго порядка*:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + \\ +a_{44} = 0, \quad (4.7.1)$$

Как и в случае плоских кривых, вид уравнения зависит от выбора системы координат, что позволяет ограничиться только изучением канонических уравнений. Всего существует 17 типов канонических уравнений. Восемь из них либо не имеют действительных решений (нет геометрических образов), либо имеют одно решение, геометрическим образом которого является точка, либо задают совокупности прямых и плоскостей. Оставшиеся 9 уравнений задают так называемые *невырожденные поверхности второго порядка.*

Канонические уравнения и изображения невырожденных поверхностей второго порядка в канонической системе координат.

I. <u>Эллипсоид.</u>



Каноническое уравнение:

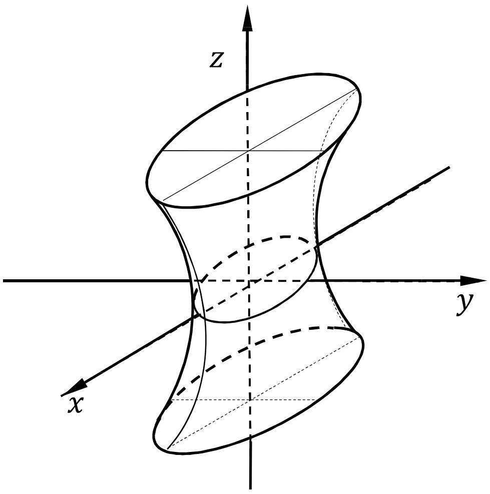
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4.7.2)$$

Рис. 41. Эллипсоид в канонической системе координат.

При $a = b = c \equiv R$ эллипсоид превращается в сферу. Уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R записывается как:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (4.7.3)$$

II. <u>Однополостный гиперболоид.</u>



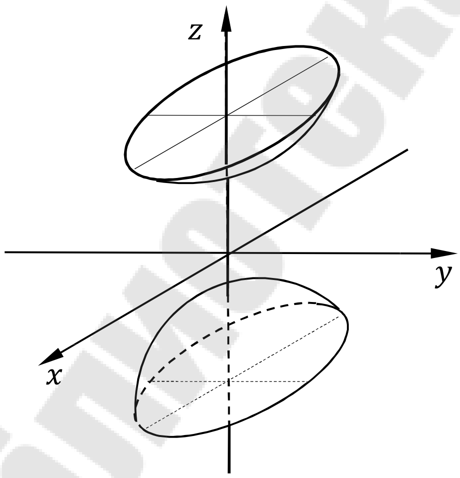
Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4.7.4)$$

Рис. 42. Однополостный гиперболоид в канонической системе координат.

Однополостный гиперболоид относится к классу *линейчатых поверхностей*, которые можно получить с помощью движения прямой линии – *прямолинейной образующей* поверхности. В частности, тело вращения куба вокруг его диагонали имеет боковую поверхность, являющейся частным случаем однополостного гиперболоида. Здесь прямолинейной образующей является ребро куба, непересекающееся с его диагональю.

III. <u>Двуполостный гиперболоид.</u>

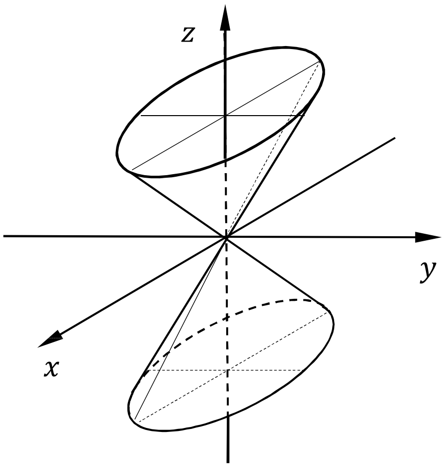


Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (4.7.5)$$

Рис. 43. Двуполостный гиперболоид в канонической системе координат.

IV. Конус.

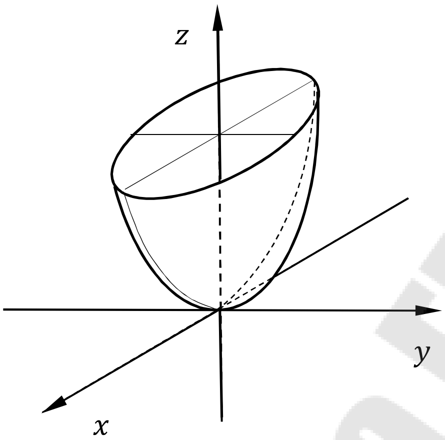


Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (4.7.6)$$

Рис. 44. Конус в канонической системе координат.

V. Эллиптический параболоид.

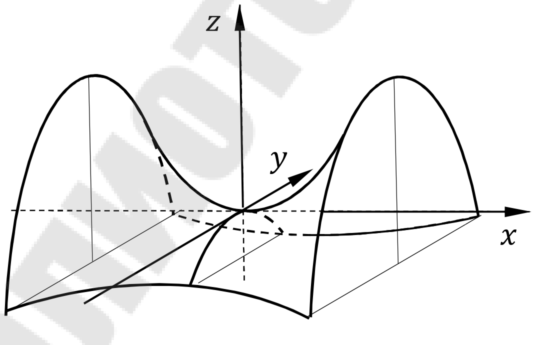


Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (4.7.7)$$

Рис. 45. Эллиптический параболоид в канонической системе координат.

VI. Гиперболический параболоид.

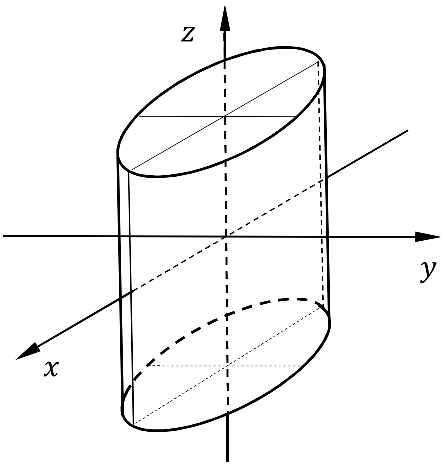


Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (4.7.8)$$

Рис. 46. Гиперболический параболоид в канонической системе координат.

VII. Эллиптический цилиндр

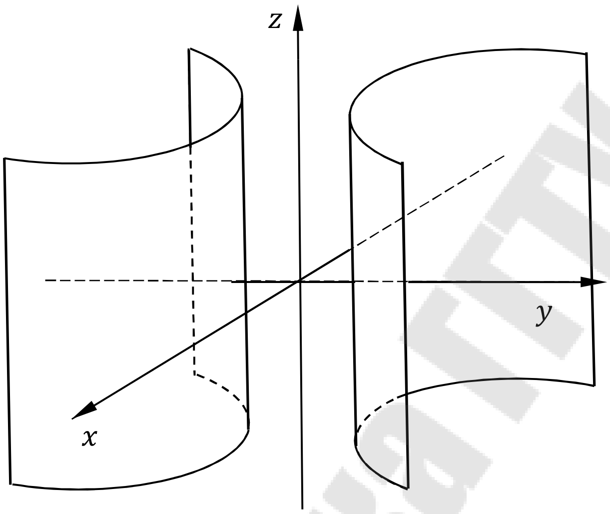


Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.7.9)$$

Рис. 47. Эллиптический цилиндр в канонической системе координат.

VIII. Гиперболический цилиндр

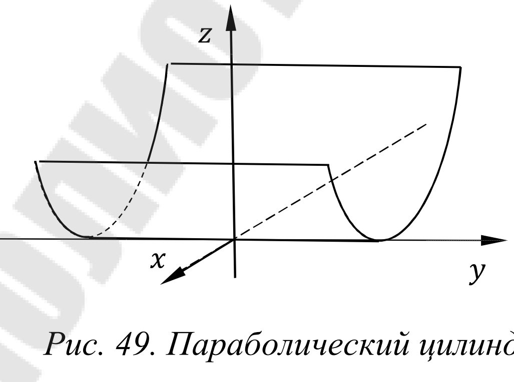


Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.7.10)$$

Рис. 48. Эллиптический цилиндр в канонической системе координат.

IX. Параболический цилиндр



Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}=2z \qquad (4.7.11)$$

Рис. 49. Параболический цилиндр в канонической системе координат.

ГЛАВА 5
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

Обобщение в математике является одним из главных направлений ее развития. Оно сродни взгляду на знакомую местность с высоты, когда при потере детализации выявляются полные очертания объектов, четко проявляются связи между ними, открываются новые перспективы. Так в предыдущих главах были рассмотрены множества матриц и геометрических векторов. Несмотря на различную природу этих математических объектов, операции сложения и умножения на число над ними обладают совершенно одинаковыми свойствами. Теперь, если наделить эти свойства статусом аксиом, причем без учета конкретной реализации самих операций, то все следствия будут автоматически иметь общий характер, что в свою очередь предполагает целесообразность изучения абстрактных математических объектов, на множестве которых определены операции данного типа.

§ 1. Линейные пространства

Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbb{R}$ и непустое множество $\mathcal{L}$ элементов $x, y, z, \ldots$. Пусть на $\mathcal{L}$ заданы бинарная операция, которую назовем *сложением:*

$$\forall\, x, y \in \mathcal{L} \;\rightarrow\; x + y \in \mathcal{L},$$

и операция, которую назовем *умножением на действительное число:*

$$\forall x \in \mathcal{L}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; \lambda x \in \mathcal{L}.$$

Опр. 5.1.1. Множество $\mathcal{L}$ называется **линейным пространством,** если операции сложения и умножения на число обладают следующими свойствами:

L_1:	$\forall\, x, y \in \mathcal{L}$	$x + y = y + x,$
L_2:	$\forall\, x, y, z \in \mathcal{L}$	$x + (y + z) = (x + y) + z,$
L_3:	$\exists 0 \in \mathcal{L} \;\; \forall x \in \mathcal{L}$	$x + 0 = x,$
L_4:	$\forall x \in \mathcal{L} \;\exists -x \in \mathcal{L}$	$x + (-x) = 0,$
L_5:	$\forall x \in \mathcal{L}$	$1 \cdot x = x,$
L_6:	$\forall x \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$
L_7:	$\forall x, y \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$
L_8:	$\forall x \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$

Сразу подчеркнем, что, несмотря на знакомые обозначения и названия операций, в общих линейных пространствах они не конкретизируются и имеют абстрактный характер. Существенными для последующих выводов являются только их свойства – аксиомы $L_1 - L_8$. Конкретная их реализация может быть очень далека от привычных операций сложения и умножения на число в арифметике или в матричной алгебре.

Появление понятия линейного пространства напрямую связано с попытками применения эффективных методов векторной алгебры (главным образом метода координат) для решения задач, сформулированных на языке многомерных пространств, например, арифметических пространств $\mathbb{R}^n$, состоящих из упорядоченных числовых наборов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ длины n. Поэтому линейные пространства часто называют **векторными пространствами**, а их элементы соответственно **векторами**. Для обозначения абстрактных векторов используется либо полужирный шрифт – $\boldsymbol{x}$, либо черта сверху – $\bar{x}$, либо просто буквы латинского алфавита – $x, y, z, \dots$ Числовые коэффициенты обозначаются с использованием букв греческого алфавита – $\lambda, \mu, \nu, \dots$.

К сожалению, при использовании упрощенных обозначений нулевые элементы линейных пространств и нулевые коэффициенты (число нуль) обозначаются одинаково как 0. Их идентификация производится исходя из смысла и содержания рассматриваемого символьного выражения.

Из определения (5.1.1.) следует, что отличительными характеристиками линейных пространств являются:

- замкнутость относительно операции сложения;
- замкнутость относительно операции умножения на число;
- наличие нулевого элемента 0 (аксиома L_3);
- наличие противоположного элемента, обозначаемого как $-x$, для любого элемента x пространства (аксиома L_4).

Пример 5.1.1. Установить является ли множество всех матриц с обычными операциями сложения и умножения на число линейным пространством.

Решение.

Множество всех матриц с бинарной операцией, выбранной как обычная сумма матриц, линейным пространством не является, так как данная операция определена не для любых матриц. Линейное пространство образуют только матрицы одного порядка $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$. ∎

Пример 5.1.2. Установить, можно ли рассматривать множество положительных действительных чисел как линейное пространство.

Решение.

Если в качестве бинарной операции выбрать обычную арифметическую операцию сложения $x+y$, то множество неотрицательных действительных чисел линейное пространство не образует, так как оно не содержит нулевого элемента и элементов, противоположных элементам множества – отрицательных чисел.

Однако, если в качестве бинарной операции выбрать операцию умножения: "$x+y$" $\equiv xy$, а в качестве операции «умножение на число» выбрать операцию возведения в степень: "λx" $\equiv x^{\lambda}$, то множество неотрицательных действительных чисел будет наделено структурой линейного пространства, в чем нетрудно убедиться, проверив выполнение аксиом $L_1 - L_8$. При этом роль нулевого элемента будет играть 1, а роль противоположного элемента – обратный элемент x^{-1}. ∎

Общие свойства линейных пространств.

1. Линейное пространство $\mathcal{L}$ содержит *единственный* нулевой элемент 0.
2. В линейном пространстве $\mathcal{L}$ для любого элемента x существует *единственный* противоположный элемент $-x$.
3. В линейном пространстве $\mathcal{L}$ для элемента $-x$ противоположным является элемент x:
$$-(-x)=x.$$
4. В линейном пространстве $\mathcal{L}$ произведение числа -1 на элемент x есть противоположный элемент $-x$:
$$(-1)\cdot x=-x.$$
5. В линейном пространстве $\mathcal{L}$ произведение любого числа λ на нулевой элемент есть нулевой элемент:
$$\lambda\cdot 0=0.$$
6. В линейном пространстве $\mathcal{L}$, если $\lambda x=0$, то либо $\lambda=0$, а x – любой элемент $\mathcal{L}$, либо $x=0$, а λ – любое число.
7. В линейном пространстве $\mathcal{L}$ уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение:
$$x=b+(-a)\equiv b-a,\ \ \forall a,b\in\mathcal{L}.$$

Все свойства являются следствиями определения линейного пространства (5.1.1).

§ 2. Размерность и базис линейных пространств

Ранее в главе 3 §3 были введены понятия размерности и базиса в пространстве геометрических векторов. Обобщим эти понятия на произвольные линейные пространства.

Выберем некоторую систему m элементов линейного пространства $\mathcal{L}$ – $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, и с помощью основных операций пространства построим из них новый элемент :

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ \dots + \lambda_m x_m \ \in \mathcal{L}. \qquad (5.2.1)$$

Назовем этот элемент **линейной комбинацией**. Возможность представления в виде такой комбинации нулевого элемента пространства наделяет выбранную систему важнейшей качественной характеристикой.

<u>*Опр. 5.2.1.*</u> Система элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется *линейно независимой,* если нулевой элемент пространства 0 может быть представлен в виде их линейной комбинации *только* с использованием нулевых коэффициентов:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ \dots + \lambda_m x_m \ = 0 \qquad (5.2.2)$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

В противном случае система называется *линейно зависимой.*

Набор нулевых числовых коэффициентов часто называют *тривиальным.*

Суть линейной независимости заключается в том, что ни один элемент линейно независимой системы не может быть представлен в виде линейной комбинации *других* элементов этой же системы.

В линейном пространстве имеется только одна линейно зависимая одноэлементная система, а именно, $\{0\}$.

Общие критерии линейной зависимости.

I. Всякая система, содержащая нулевой элемент 0, линейно зависима.

II. Всякая система, содержащая подмножество линейно зависимых элементов, линейно зависима.

В пространстве геометрических векторов существуют достаточно простые и наглядные критерии линейной зависимости систем векторов, использующие отношения коллинеарности и компланарности. В общих линейных пространствах нет возможности напрямую использовать аналоги этих геометрических отношений. Тем не менее, в ряде случаев установить факт линейной независимости можно непосредственно из анализа соотношения (5.2.2).

Пример 5.2.1. *Арифметическое пространство* $\mathbb{R}^n$.

Элементами арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ являются упорядоченные наборы n действительных чисел $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Введем операции сложения элементов и умножения их на число как обычные арифметические действия над соответствующими компонентами:

$$(\bar{x} + \bar{y})_k = x_k + y_k; \quad (\lambda\bar{x})_k = \lambda\, x_k, \quad \forall k = \overline{1, n}. \qquad (5.2.3)$$

Нетрудно убедиться, что введенные операции удовлетворяют аксиомам $L_1 - L_8$., а значит, наделяют $\mathbb{R}^n$ структурой линейного пространства. Рассмотрим следующую систему элементов из $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}, \quad \text{где } (\bar{e}_i)_k = \delta_{ik}.$$

Здесь δ_{ik} – δ-символ Кронекера: $\delta_{ik} = 0$, если $i \neq j$, и $\delta_{ii} = 1$ для $\forall\, i = \overline{1, n}$.

Выясним, является ли система $\mathcal{E}$ линейно независимой. Для этого подставим в левую часть равенства (5.2.2) явный вид наших элементов и выполним все действия. В результате получим:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0 \equiv (0,0, \ldots, 0) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Таким образом, согласно определению (5.2.1) система $\mathcal{E}$ является линейно независимой. ■

Опр. 5.2.2. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется **конечномерным**, если в нем существует система из n линейно независимых элементов, а любая система, содержащая $n+1$ элемент, будет линейно зависимой. При этом число n называется **размерностью** конечномерного пространства:

$$\dim \mathcal{L} = n.$$

Линейное пространство, которое не является конечномерным, называется **бесконечномерным.**

В частности, размерность линейного пространства $\mathcal{L} = \{0\}$, содержащего только один нулевой элемент, равна 0. Размерность пространства $\mathbb{R}^n$ равна n. Размерность конечномерного пространства будем указывать с помощью верхнего индекса: $\mathcal{L}^n$.

Опр. 5.2.3. **Базисом** конечномерного линейного пространства размерности n называется любая система, состоящая из ровно n линейно независимых элементов.

Система $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, рассмотренная в Примере 5.2.1, является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.2.1 (*о базисе*)

Пусть система элементов $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ является базисом в линейном пространстве $\mathcal{L}$ размерности n. Тогда любой элемент x пространства *единственным образом* может быть разложен по базису $\mathcal{B}$:

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ \dots + \lambda_n b_n. \qquad (5.2.4)$$

Важность теоремы заключается в том, что в линейных пространствах независимо от их природы при заданном базисе каждый элемент может быть однозначно идентифицирован по набору чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – коэффициентам разложения (5.2.4), которые называются **координатами элемента** x в базисе $\mathcal{B}$. Задание элементов линейного пространства с указанием наборов их координат позволяет свести операции над элементами линейного пространства к арифметическим действиями над координатами:

$$x + y \;\Rightarrow\; \bar{x} + \bar{y} = \{x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\},$$
$$\lambda x \;\Rightarrow\; \lambda \bar{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}.$$

<u>*Опр. 5.2.4.*</u> **Изоморфизмом линейных пространств** $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ называется всякое правило φ, позволяющее установить взаимно однозначное соответствие между их элементами и сохраняющее линейность определяющих структуру пространств операций сложения и умножения на число:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \tag{5.2.5}$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda\, \varphi(x). \tag{5.2.6}$$

При наличии изоморфизма говорят, что пространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ **изоморфны**. Отношение изоморфизма обозначается как $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$.

Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности. Изоморфные пространства имеют совершенно одинаковую структуру и свойства.

Не любое взаимно однозначное отображение может устанавливать изоморфизм между линейными пространствами.

<u>Пример 5.2.2</u>. Выяснить, устанавливает ли отображение $\varphi: x \to x^3$ между элементами линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, представляющих собой множества действительных чисел $\mathbb{R}$ с линейными операциями, как обычными арифметическими действиями сложения и умножения, изоморфизм.

<u>Решение.</u>

По условию отображение φ задается как
$$w = \varphi(x) = x^3.$$

На множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ это уравнение имеет единственное решение: $x = \sqrt[3]{w}$, поэтому φ – взаимно однозначное отображение.

Далее, проверим выполнение соотношения (5.2.5):

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 \quad \Rightarrow \quad 3xy(x + y) = 0.$$

Полученное равенство не является общим, то есть тождеством, а выполняется только, если $x = 0$, $y = 0$ или $y = -x$.

Таким образом, отображение φ в общем случае линейность операции сложения не сохраняет, а значит, изоморфизм между пространствами $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ не устанавливает.

■

Наборы координат, как следует из примера 5.2.1, являются элементами арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому сопоставление элементам линейного пространства $\mathcal{L}^n$ набора координат *в фиксированном базисе*, по существу, устанавливает изоморфизм $\mathcal{L}^n \cong \mathbb{R}^n$. А так как изоморфизм есть отношение эквивалентности, и потому обладает свойством транзитивности, то все линейные пространства одной размерности изоморфны между собой.

Наборы координат как представления элементов линейных пространств удобны не только для выполнения операций над элементами, но и для решения многих других задач линейной алгебры. Безусловно, важнейшей из них является задача о выборе базиса.

Пусть имеется некоторая система $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ элементов линейного пространства $\mathcal{L}$.

<u>*Опр. 5.2.5.*</u> **Рангом r системы элементов** линейного пространства называется максимальное число, содержащихся в системе линейно независимых элементов.

В случае конечномерных пространств $\mathcal{L}^n$ ранг системы элементов не может превышать размерности пространства $\dim \mathcal{L} = n$. Системы, ранг которых равен размерности пространства: $r = n$, называются **полными**. В частности, полными являются и базисные системы. Но в базисных системах число элементов m в точности равно размерности пространства: $m = n$, в то время как в произвольной полной системе число элементов может быть и больше n. Разложение элементов линейного пространства по полной системе возможно. Однако использование небазисных полных систем приведет к потере единственности разложения. А значит, наборы коэффициентов таких разложений уже не будут *однозначно* представлять элементы линейного пространства ($\mathcal{L}^n \ncong \mathbb{R}^m$, если $m > n$).

Для определения ранга системы элементов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, заданных своими координатами в некотором исходном базисе $\mathcal{B}$: $a_k = \{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k\}$, $\forall k = \overline{1, m}$, предварительно введем матрицу $C_{n\times m}$, столбцами которой являются наборы координат:

$$C = \|A_1\; A_2 \dots A_m\|, \text{ где } A_k^{\mathrm{T}} = (\alpha_1^k\; \alpha_2^k\; \dots\; \alpha_n^k).$$

Для матриц справедлива следующая общая теорема.

Теорема 5.2.2 (*о ранге матрицы***)**

Ранг r системы столбцов (строк) матрицы A равен рангу матрицы:

$$r = \operatorname{rg} A. \tag{5.2.7}$$

Из теоремы следует, что ранги систем столбцов и строк матрицы равны, несмотря на то, что для прямоугольной матрицы размера $m \times n$ они принадлежат разным пространствам $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, соответственно.

Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы называется **базисным**. Столбцы и строки, на пересечении которых располагаются элементы базисного минора, также называются **базисными**.

Таким образом, задача о выборе базиса линейного пространства связана с вычислением ранга матрицы, составленной из координат элементов, входящих в анализируемую систему. Элементы, координаты которых составляют базисные столбцы (строки), будут линейно-независимыми, и, в случае, если ранг системы равен размерности пространства, образуют базис пространства.

Пример 5.2.3. В линейном пространстве $\mathcal{L}^3$ элементы заданы своими координатами в некотором базисе:

$$a_1 = \{1,0,0\},\ a_2 = \{1,1,0\}, a_3 = \{1,1,1\}, a_4 = \{2,-1,1\}.$$

Установить, является ли система $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ полной. В случае ее полноты выбрать из элементов системы базис пространства.

Решение.

Из заданных наборов координат, располагаемых в виде столбцов, составим матрицу $C_{3\times 4}$:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица C имеет трапециевидную форму, поэтому ее ранг равен числу ненулевых строк: $\operatorname{rg} C = 3$. Тогда согласно теореме 5.2.2 ранг системы $\mathcal{A}$ также равен 3. Он совпадает с размерностью линейного пространства, поэтому система элементов $\mathcal{A}$ является полной.

Далее, выберем из элементов системы $\mathcal{A}$ базис пространства. Заметим, что крайний левый минор третьего порядка матрицы C равен 1 и отличен от нуля, а поэтому может быть выбран в качестве базисного минора. Столбцы базисного минора соответствуют базисным элементам. Таким образом, в качестве базиса пространства $\mathcal{L}^3$ можно выбрать систему $\mathcal{A}' = \{a_1, a_2, a_3\}$.

■

§ 3. Переход к другому базису

Для описания изменений, которые происходят с массивом координат элементов линейного пространства $\mathcal{L}^n$ при переходе от одного базиса к другому, удобен язык матриц.

Введем следующие матрицы:

– *координатный столбец* X, составленный из координат элемента x:

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix};$$

– *базисную матрицу-строку* $\bar{\mathcal{A}}$, составленную из элементов базиса $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{A}} = \| \, a_1 \; a_2 \dots \; a_n \|.$$

Заметим, что хотя базисная матрица-строка $\bar{\mathcal{A}}$ не представляет собой массив чисел, формально с ней будем выполнять все операции как с обычной матрицей. Тогда разложение элемента x по базису $\mathcal{A}$ в матричной форме запишется как

$$x = \bar{\mathcal{A}}X. \tag{5.3.1}$$

Рассмотрим другой базис пространства $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Каждый элемент b_k из базиса $\mathcal{B}$ в свою очередь может быть разложен по базису $\mathcal{A}$:

$$b_k = \overline{\mathcal{A}}B_k,$$

где B_k – координатный столбец элемента b_k. Разложение всего базисного набора можно записать в виде

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}B, \tag{5.3.2}$$

где B – матрица, составленная из координатных столбцов:

$$B = \| \, B_1 \; B_2 \dots \; B_n \|. \tag{5.3.3}$$

Матрицу B назовем *координатной матрицей базиса* $\mathcal{B}$. Заметим, что матрица B невырождена (ее ранг равен размерности пространства n), а значит, обратима.

Теперь рассмотрим два базиса $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, элементы которых задаются наборами координат в некотором третьем базисе $\mathcal{B}_0$. Запишем разложения базисных элементов по базису $\mathcal{B}_0$ в матричной форме (5.3.2):

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_0 B; \quad \overline{\mathcal{B}'} = \overline{\mathcal{B}}_0 B'.$$

С учетом обратимости базисных координатных матриц B и B' находим:

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_0 B \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathcal{B}}_0 = \overline{\mathcal{B}} B^{-1} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathcal{B}'} = \overline{\mathcal{B}}(B^{-1}B').$$

<u>*Опр. 5.3.1.*</u> Матрица

$$T_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \equiv T = B^{-1}B', \tag{5.3.4}$$

где B и B' – координатные матрицы базисных систем $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ в некотором базисе $\mathcal{B}_0$, называется **матрицей перехода** от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$.

Таким образом, переход от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ реализуется как соотношение между их базисными матрицами-строками:

$$\overline{\mathcal{B}'} = \overline{\mathcal{B}}T. \tag{5.3.5}$$

Соотношение для обратного перехода $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ нетрудно получить из (5.3.5), умножив это равенство справа на обратную матрицу T^{-1}:

$$\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}'}\, T^{-1}, \tag{5.3.6}$$

где

$$T^{-1} \equiv T^{-1}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = B'^{-1}B. \tag{5.3.7}$$

В приложениях часто встречается ситуация, когда необходимо перейти к новому базису $\mathcal{B}'$, элементы которого задаются координатами в первоначально заданном базисе $\mathcal{B}$. В этом случае $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, и базисная координатная матрица B совпадает с единичной матрицей: $B = E$. Тогда из (5.3.4) для матрицы переход имеем

$$T = B', \tag{5.3.8}$$

то есть она просто совпадает с координатной матрицей нового базиса.

<u>Пример 5.2.3</u>. Найти матрицу перехода T между базисами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ пространства $\mathcal{L}^2$, элементы которых заданы своими координатами в некотором базисе $\mathcal{B}_0$:

$$\mathcal{B}\colon\ b_1 = \{1, 2\},\ b_2 = \{-2, 1\}; \qquad \mathcal{B}'\colon b_1' = \{3, -1\},\ b_2' = \{1, 1\}.$$

<u>Решение.</u>

Из наборов координат, рассматриваемых как координатные столбцы, составим базисные координатные матрицы:

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \ \text{ и } \ B' = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Далее, по формуле (1.7.3) найдем обратную матрицу B^{-1}:

$$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ определим по формуле (5.3.6):

$$T = B^{-1}B' = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица T задает разложение элементов штрихованного базиса по нештрихованному, а ее столбцы, по существу, являются столбцами координат элементов из системы $\mathcal{B}'$ в базисе $\mathcal{B}$:

$$b_1' = \frac{1}{5}b_1 - \frac{7}{5}b_2, \quad b_2' = \frac{3}{5}b_1 - \frac{1}{5}b_2.$$

■

Для установления соотношения между координатами элемента x в разных базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$, запишем соответствующие разложения в матричной форме (5.3.1). С учетом равенства (5.3.5) имеем

$$x = \overline{\mathcal{B}}X = \overline{\mathcal{B}}'X' \;\Rightarrow\; \overline{\mathcal{B}}X = \overline{\mathcal{B}}TX'.$$

В силу единственности разложения по базису из последнего равенства получаем

$$X = TX' \tag{5.3.9}$$

или

$$X' = T^{-1}X. \tag{5.3.10}$$

Пример 5.2.4. Элемент $x = \{3, 4\}$ задан своими координатами в базисе $\mathcal{B}$ из примера 5.2.3. Найти его координаты в базисе $\mathcal{B}'$ из того же примера.

Решение.

Матрица перехода между базисами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ согласно решению примера 5.2.3. имеет вид

$$T = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Предварительно найдем обратную ей матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда координаты элемента x в штрихованном базисе определим по формуле (5.3.10):

$$X' = T^{-1}X = \frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -15/4 \\ 25/4 \end{Vmatrix}.$$

Ответ: $x = \{-\frac{15}{4}, \frac{25}{4}\}$ в базисе $\mathcal{B}'$.

■

§ 4. Линейные подпространства и операции над ними

Опр. 5.4.1. **Линейным подпространством** $\mathcal{V}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется множество его элементов, которое само является линейным пространством относительно линейных операций, определенных в $\mathcal{L}$.

Отношение включения линейного подпространства $\mathcal{V}$ в линейное пространство $\mathcal{L}$ принято обозначать как $\mathcal{V} \lhd \mathcal{L}$.

Всякое линейное подпространство содержит общий нулевой элемент и замкнуто относительно линейных операций. В частности, один нулевой элемент сам составляет простейшее по составу линейное подпространство $\mathcal{O} = \{0\}$, которое называется **нулевым подпространством.**

Пример 5.4.1. Примерами линейных подпространств в пространстве геометрических векторов являются:

- множество коллинеарных векторов;
- множество компланарных векторов.

Множество всех векторов с равными модулями, например множество всех единичных векторов, линейное подпространство не образуют, так как оно не содержит нулевого элемента. ■

Пример 5.4.2. Примерами линейных подпространств в пространстве квадратных матриц $\mathrm{M}_{n\times n}$ порядка n являются:

- множество всех диагональных матриц;
- множество всех верхнетреугольных матриц.

Множество невырожденных матриц линейное подпространство не образуют, так как в нем отсутствует нулевой элемент. ■

Пример 5.4.3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ линейное подпространство образуют, например, все наборы, у которых компонента с номером k равна нулю. ■

Пример 5.4.4. Примерами линейных подпространств в пространстве многочленов степени не выше n являются:

- все многочлены степени не выше $m < n$;
- все многочлены четной степени.

Многочлены нечетной степени линейное подпространство не образуют. ■

Выберем некоторое семейство элементов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ из элементов линейного пространства $\mathcal{L}$. Отметим, что произвольно отобранное семейство $\mathcal{A}$ в общем случае линейное подпространство не образует.

Опр. 5.4.2. **Линейной оболочкой** $[\mathcal{A}]$ семейства элементов $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ называется множество *всех* их линейных комбинаций:

$$[\mathcal{A}] = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m\}.$$

Теорема 5.4.1.

Линейная оболочка $[\mathcal{A}]$ всякого семейства элементов $\mathcal{A}$ из линейного пространства $\mathcal{L}$ является линейным подпространством: $$[\mathcal{A}] \lhd \mathcal{L}.$$

Таким образом, линейные пространства содержат достаточно большое количество линейных подпространств. Теорема 5.4.1 позволяет строить линейные подпространства из любого набора элементов. Некоторые из возможных подпространств будут совпадать друг с другом, так как различные наборы элементов могут иметь одну и ту же линейную оболочку. При этом естественным образом возникает задача *о разложении линейных пространств на подпространства,* по аналогии с разложением элементов по базису. Для ее решения введем операции над подпространствами.

Над линейными подпространствами как множествами элементов можно выполнять любые теоретико-множественные операции. В первую очередь рассмотрим основные бинарные операции, выполняемые над парой линейных подпространств $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \lhd \mathcal{L}$.

<u>*Опр. 5.4.3.*</u>

Пересечением линейных подпространств $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$, где $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \lhd \mathcal{L}$, называется множество всех их общих элементов: $$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{x \mid x \in \mathcal{V}_1, x \in \mathcal{V}_2\}.$$

Свойства операции пересечения подпространств.

I. Пересечение линейных подпространств является линейным подпространством:
$$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \lhd \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \lhd \mathcal{L}.$$

II. Для любых линейных подпространств справедливы соотношения:
1) $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_1$, (коммутативность)
2) $\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_3$, (ассоциативность)
3) $\mathcal{V} \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}$. ($\mathcal{O}$ – нулевое подпространство)

Аналогично можно ввести и операцию объединения подпространств $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, как объединение множеств всех их элементов. Однако простое объединение в общем случае не сохраняет линейную структуру. Другими словами объединение линейных подпространств само линейным подпространством может и не являться.

Пример 5.4.5. Рассмотрим в пространстве геометрических векторов два линейных подпространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, состоящих из векторов, коллинеарных векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, соответственно, причем $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

Сумма $\bar{a} + \bar{b}$ векторов из разных подпространств как вектор диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, не будет коллинеарен ни вектору $\bar{a}$, ни вектору $\bar{b}$, то есть $\bar{a} + \bar{b} \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Поэтому объединение наших подпространств $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ линейным подпространством не является. ■

Опр. 5.4.3. **Суммой** $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ линейных подпространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, называется множество *всех сумм* элементов из $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{u + v \mid u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}.$$

Свойства операции сложения подпространств.

I. Сумма линейных подпространств является линейным подпространством:

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \lhd \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{V} \lhd \mathcal{L}.$$

II. Сумма линейных подпространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ совпадает с линейной оболочкой их объединения:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = [\mathcal{U} \cup \mathcal{V}].$$

III. Для любых линейных подпространств справедливы соотношения:

1) $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_1,$ (коммутативность)
2) $\mathcal{V}_1 + (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) + \mathcal{V}_3,$ (ассоциативность)
3) $\mathcal{V} + \mathcal{O} = \mathcal{V}.$ ($\mathcal{O}$ – нулевое подпространство)

Пример 5.4.6. В пространстве геометрических векторов $\mathcal{L}^3$ возьмем три некомпланарных вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Каждая пара векторов задает подпространство компланарных векторов:

$$\Pi_{ij} = \{\bar{x} \mid \bar{x} = \mu\bar{a}_i + \nu\bar{a}_j, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}. \quad (5.4.1)$$

Для подпространств Π_{13} и Π_{23} имеем:

$$\Pi_{13} \cap \Pi_{23} = \mathcal{V}_3,$$
$$\Pi_{13} + \Pi_{23} = \mathcal{L}^3,$$

где $\mathcal{V}_3 = \{\bar{x} = \lambda\bar{a}_3, \lambda \in \mathbb{R}\}$ – подпространство векторов, коллинеарных вектору $\bar{a}_3$.

Из соотношения для суммы подпространств следует, что любой вектор пространства $\bar{c}$ может быть представлен в виде суммы векторов из Π_{13} и Π_{23}. Однако это представление не является единственным. Действительно, пусть

$$\bar{c} = \bar{u} + \bar{v},$$

где $\bar{u} = \alpha\bar{a}_1 + \beta\bar{a}_3 \in \Pi_{13}$ и $\bar{v} = \mu\bar{a}_2 + \nu\bar{a}_3 \in \Pi_{23}$. Тогда тот же вектор можно представить и в виде другой аналогичной пары векторов, например,

$$\bar{u}' = \alpha\bar{a}_1 + (\beta - 1)\bar{a}_3 \in \Pi_{13} \quad \text{и} \quad \bar{v}' = \mu\bar{a}_2 + (\nu + 1)\bar{a}_3 \in \Pi_{23}.$$

■

Опр. 5.4.4. Сумма линейных подпространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ называется **прямой суммой**, и обозначается как $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, если их пересечение есть нулевое подпространство $\mathcal{O}$.

Для прямых сумм разложение элементов результирующего пространства на сумму элементов, принадлежащих подпространствам-слагаемым, единственно. Разложить линейное пространство в прямую сумму линейных подпространств можно, используя любой базис.

Пусть $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – некоторый базис линейного пространства $\mathcal{L}^n$. Линейные оболочки базисных элементов являются линейными подпространствами пространства $\mathcal{L}^n$:

$$\mathcal{V}_k = \{x | x = \lambda b_k, \lambda \in \mathbb{R}\} \lhd \mathcal{L}^n.$$

Тогда справедливо разложение

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n. \qquad (5.4.2)$$

Пример 5.4.7. В пространстве геометрических векторов задана некоторая тройка некомпланарных векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$. Найти разложения подпространств компланарных векторов Π_{kl} (5.4.1) на прямую сумму линейные подпространств.

Решение.

Тройка некомпланарных векторов образует базис пространства $\mathcal{L}^3$. Векторы, коллинеарные базисным векторам, образуют линейные подпространства:

$$\mathcal{V}_k = \{\bar{x} \mid \bar{x} \parallel \bar{a}_k\} \lhd \mathcal{L}^3.$$

Так как $\mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_l = \mathcal{O}$ для $\forall k \neq l$, то для подпространств компланарных векторов Π_{kl} имеем

$$\Pi_{13} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_3, \quad \Pi_{12} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2, \quad \Pi_{23} = \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3 .$$ ■

В случае разложений пространств в прямые суммы размерность результирующего пространства равна сумме размерностей подпространств-слагаемых:

$$\dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + dim\, \mathcal{V}. \qquad (5.4.3)$$

При этом базис составляется как объединение базисных наборов.

Для размерности простой суммы подпространств имеет место общая **формула Грассмана**:

$$\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) = \dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{V} - \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}). \qquad (5.4.4)$$

Пример 5.4.8. Показать, что в геометрическом пространстве любые два различных подпространства компланарных векторов Π_1 и Π_2 имеют общий набор коллинеарных векторов.

Решение.

Как было указано в решении примера 5.4.6, сумма различных подпространств компланарных векторов совпадает со всем пространством геометрических векторов: $\Pi_1 + \Pi_2 = \mathcal{L}^3$. Тогда для размерностей подпространств имеем

$$\dim\Pi_1 = \dim\Pi_2 = 2; \quad \dim(\Pi_1+\Pi_2) = 3.$$

Используя формулу Грассмана (5.4.3), находим

$$\dim(\Pi_1\cap\Pi_2) = \dim\Pi_1 + \dim\Pi_2 - \dim(\Pi_1+\Pi_2) = 2+2-3 = 1.$$

Таким образом, пересечение подпространств Π_1 и Π_2 одномерно, а значит, состоит из множества коллинеарных векторов. ■

§ 5. Линейные операторы

Пусть имеются два линейных пространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, возможно содержащие объекты различной природы.

Опр. 5.5.1. **Линейным оператором $\widehat{A}$,** действующим из пространства $\mathcal{L}_1$ в пространство $\mathcal{L}_2$, называется всякое правило, позволяющее сопоставить *любому элементу* x из $\mathcal{L}_1$ *единственный* элемент v из $\mathcal{L}_2$ так, чтобы для $\forall x, y \in \mathcal{L}_1$ и $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ выполнялись соотношения:

$$\hat{A}[x+y] = \hat{A}[x] + \hat{A}[y], \quad \text{(аддитивность)} \qquad (5.5.1)$$

$$\hat{A}[\lambda x] = \lambda\hat{A}[x]. \quad \text{(однородность)} \qquad (5.5.2)$$

Результирующий элемент $v = \widehat{A}[x]$ называется **образом** x, а сам элемент x называется **прообразом** v.

Понятие *образа* расширяется на любое подмножество $\mathcal{X}$ элементов из $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{Y} = \hat{A}[\mathcal{X}] = \{v \mid v = \hat{A}[x], \forall x\in\mathcal{X}\},$$

в том числе и на все пространство $\mathcal{L}_1$.

Опр. 5.5.2. **Образом** $\operatorname{Im}\hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ называется образ пространства $\mathcal{L}_1$:

$$\operatorname{Im}\hat{A} = \{v\in\mathcal{L}_2 \mid v = \hat{A}[x], x\in\mathcal{L}_1\}.$$

В случае различных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, говорят, что линейный оператор $\hat{A}$ задает *отображение* $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Важнейшим типом отображений является изоморфизм линейных пространств, рассмотренный в Гл.5 § 2. Если же линейные пространства совпадают и оператор $\hat{A}$ действует в одном пространстве $\mathcal{L}$, то говорят, что $\hat{A}$ задает *преобразование* пространства. Примерами линейных преобразований, например, геометрического пространства, являются – повороты вокруг осей, осевые и зеркальные симметрии, проекции на различные подпространства.

Линейный оператор $\hat{A}$ может быть определен не на всем пространстве $\mathcal{L}_1$, а только на его некотором подпространстве $\mathcal{U} \lhd \mathcal{L}_1$. Тогда подпространство $\mathcal{U}$ есть *область определения оператора* $\hat{A}$.

Пример 5.5.1. **Нулевой оператор**.

Выяснить, является ли *нулевой оператор* $\hat{0}$, отображающий *все* элементы пространства $\mathcal{L}_1$ в нулевой элемент пространства $\mathcal{L}_2$: $\hat{O}[x] = 0$, линейным оператором.

Решение.

Проверим выполнение соотношений (5.5.1) и (5.5.2) для произвольных элементов x и y из пространства $\mathcal{L}_1$:

$$\hat{O}[x+y] = 0;\ \hat{O}[x] + \hat{O}[y] = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{O}[x+y] = \hat{O}[x] + \hat{O}[y];$$
$$\hat{O}[\lambda x] = 0; \quad \lambda\hat{O}[x] = \lambda 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{O}[\lambda x] = \lambda\hat{O}[x].$$

Соотношения (5.5.1) и (5.5.2) выполняются для $\forall x, y \in \mathcal{L}_1$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, поэтому *нулевой оператор является линейным оператором*.

■

Пример 5.5.2. **Тождественный оператор**.

Выяснить, является ли *тождественный оператор* $\hat{I}[x] = x$, действующий в одном линейном пространстве $\hat{I}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, линейным оператором.

Решение.

Проверим выполнение соотношений (5.5.1) и (5.5.2) для произвольных элементов x и y из пространства $\mathcal{L}$:

$$\hat{I}[x+y] = x + y;\ \hat{I}[x] + \hat{I}[y] = x + y \ \Rightarrow \quad \hat{O}[x+y] = \hat{O}[x] + \hat{O}[y];$$
$$\hat{I}[\lambda x] = \lambda x; \quad \lambda\hat{I}[x] = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \hat{O}[\lambda x] = \lambda\hat{O}[x].$$

Таким образом, *тождественный оператор является линейным оператором*. ■

Опр. 5.5.3. **Ядром** $\ker\hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ называется множество *всех* элементов из $\mathcal{L}_1$, которые оператор отображает в нулевой элемент 0_2 пространства $\mathcal{L}_2$:

$$\ker\hat{A} = \{x \in \mathcal{L}_1 |\ \hat{A}[x] = 0_2 \in \mathcal{L}_2\}.$$

В частности, ядро нулевого оператора $\hat{O}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_1$, а его образ содержит только один нулевой элемент:

$$\ker \hat{O} = \mathcal{L}_1, \ \operatorname{Im} \hat{O} = \{0_2\}.$$

Свойства линейных операторов.

I. Линейный оператор $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ отображает нулевой элемент пространства $\mathcal{L}_1$ в нулевой элемент пространства $\mathcal{L}_2$:
$$\hat{A}[0_1] = 0_2.$$

II. Линейный оператор $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ отображает противоположный элемент $-x$ в противоположный элемент $-v$ образа:
$$\hat{A}[-x] = -v = -\hat{A}[x].$$

III. Прообраз $\mathcal{X}$ системы линейно независимых элементов $\mathcal{V}$ из $\mathcal{L}_2$ является линейно независимой системой.

IV. Ядро линейного оператора $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ является линейным подпространством:
$$\ker \hat{A} \lhd \mathcal{L}_1.$$

V. Образ $\mathcal{V} = \hat{A}[\mathcal{U}]$ любого линейного подпространства $\mathcal{U} \lhd \mathcal{L}_1$ является линейным подпространством.

VI. Образ линейного оператора $\operatorname{Im} \hat{A}$ является линейным подпространством:
$$\operatorname{Im} \hat{A} \lhd \mathcal{L}_2.$$

Так как ядро и образ линейного оператора являются линейными подпространствами пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, соответственно, то они обладают определенными размерностями.

Опр. 5.5.4. **Дефектом** линейного оператора $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ называется размерность его ядра $\ker \hat{A}$.

Опр. 5.5.5. **Рангом** линейного оператора $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ называется размерность его образа $\operatorname{Im} \hat{A}$.

Теорема 5.5.1.

Сумма ранга и дефекта линейного оператора $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ равна размерности пространства $\mathcal{L}_1$:

$$\dim\ker\hat{A} + \dim\operatorname{Im}\hat{A} = \dim\mathcal{L}_1. \tag{5.5.3}$$

Пример 5.5.3. Определить ранг и дефект: а) нулевого оператора; б) тождественного оператора.

Решение.

а). Ранг нулевого оператора $\hat{O}$ равен 0, а его дефект совпадает с размерностью пространства, на котором он действует.

б). Ранг тождественного оператора $\hat{I}$ равен размерности пространства, на котором оператор действует, а его дефект равен 0.

■

Изоморфизм между конечномерными линейными и арифметическими пространствами, отмеченный в §3, предполагает, что действие линейного оператора $\hat{A}: \mathcal{U}^n \to \mathcal{V}^m$ можно представить как отображение наборов координат векторов в фиксированных базисах пространств $\mathcal{U}^n$ и $\mathcal{V}^m$. Для установления явного вида этого отображения необходимо в первую очередь выяснить, как действует оператор $\hat{A}: \mathcal{U}^n \to \mathcal{V}^m$ на основные структурные элементы пространства $\mathcal{U}^n$ – базисную систему.

Зафиксируем в пространствах $\mathcal{U}^n$ и $\mathcal{V}^m$ базисы:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ и } \mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}.$$

Далее разложим образ базисного элемента u_k по базису $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$:

$$\hat{A}[u_k] = a_{1k}v_1 + a_{2k}v_2 + \dots + a_{mk}v_m = \bar{B}_{\mathcal{V}}A_k,\ k = \overline{1,n},$$

где $A_k = \begin{Vmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{Vmatrix}$ – координатный столбец образа.

Тогда действие оператора $\hat{A}$ на всю базисную систему $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ можно записать в следующей матричной форме:

$$\hat{A}[\mathcal{B}_{\mathcal{U}}] = \bar{B}_{\mathcal{V}}A, \tag{5.5.4}$$

где

$$A = \|A_1 A_2 \dots A_n\|, \tag{5.5.5}$$

то есть A – матрица, составленная из координатных столбцов образов. При этом действие оператора $\hat{A}$ на произвольный элемент x из пространства $\mathcal{U}^n$ сводится к простому умножению матрицы A на столбец координат X:

$$y = \hat{A}[x] \quad \Rightarrow \quad Y = AX. \qquad (5.5.6)$$

Матрица $A_{m\times n}$ (5.5.5) называется **матрицей линейного оператора** $\hat{A}$.

Справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 5.5.3.

Любому линейному оператору $\hat{A}: \mathcal{U}^n \to \mathcal{V}^m$, действующему в конечномерных линейных пространствах $\mathcal{U}^n$ и $\mathcal{V}^m$ соответствует матрица размера $m \times n$. И наоборот, любая матрица размера $m \times n$ задает некоторый линейный оператор $\hat{A}: \mathcal{U}^n \to \mathcal{V}^m$.

Так как матрица линейного оператора определяется по действию его на базисную систему, то при смене базисов пространств будет меняться и сама матрица. Используя соотношение (5.5.6), установим правило этих изменений:

$$Y = AX \ \Rightarrow \ SY' = ATX' \ \Rightarrow \ Y' = (S^{-1}AT)X' \equiv A'X'$$

или

$$A' = S^{-1}AT, \qquad (5.5.7)$$

где T и S – матрицы перехода к новым базисам $\mathcal{B}'_{\mathcal{U}}$ и $\mathcal{B}'_{\mathcal{V}}$, соответственно.

Важнейшим типом линейных операторов являются операторы, действующие в одном пространстве $\hat{A}: \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}^n$. В этом случае они, по существу, задают некоторое преобразование элементов пространства. Матрицы таких операторов квадратные, а закон их изменения при смене базиса (5.5.7) принимает вид:

$$A' = T^{-1}AT. \qquad (5.5.8)$$

<u>*Опр. 5.5.6.*</u> Квадратные матрицы A и B порядка n называются **подобными**, если найдется невырожденная матрица C того же порядка такая, что

$$B = C^{-1}AC. \qquad (5.5.9)$$

Отношение подобия матриц обозначается как $A \sim B$.

Подобные матрицы являются представлениями одного и того же линейного оператора, но в разных базисах. В случае, если одна из подобных матриц диагональна, то о второй матрице говорят, что она может быть *диагонализирована* в некотором базисе. Диагонализация матриц является важнейшим типом их преобразований, позволяющий решать широкий круг прикладных задач.

Основные свойства подобных матриц.

I. Отношение подобия матриц есть отношение эквивалентности:

1. $A \sim A,$ (рефлективность)
2. $A \sim B \quad \Rightarrow \quad B \sim A,$ (симметричность)
3. $A \sim B, \ B \sim C \quad \Rightarrow \quad A \sim C.$ (транзитивность)

II. Если $A \sim B$, то

$$\det A = \det B,$$
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

Пример 5.5.4. *Оператор параллельного проецирования*.

Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ разложено в прямую сумму линейных подпространств:

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}^l \oplus \mathcal{V}^m,$$

где $l + m = n = \dim \mathcal{L}$. Тогда любой элемент x из $\mathcal{L}$ единственным образом может быть представлен в виде суммы:

$$x = u_x + v_x,$$

где $u_x \in \mathcal{U}^l, v_x \in \mathcal{V}^m$. Сопоставляя элементу x его v - компоненту, мы тем самым определим оператор $\hat{P}[x]$, отображающий пространство $\mathcal{L}$ в его подпространство $\mathcal{V}$.

Опр. 5.5.7. Оператор $\hat{P}: \mathcal{L} = \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, определенный как

$$\hat{P}[x] = v_x, \qquad (5.5.9)$$

называется **оператором проецирования** в подпространство $\mathcal{V}$ параллельно подпространству $\mathcal{U}$.

Оператор параллельного проецирования (5.5.9) принято обозначать как $\hat{P}_{\mathcal{V} \parallel \mathcal{U}}$.

Далее, зафиксируем в подпространствах $\mathcal{U}^l$ и $\mathcal{V}^k$ базисы:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{u_1, u_2, \dots, u_l\}, \ \ \mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Базис полного пространства $\mathcal{L}$ образуем путем их слияния:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}} = \{u_1, u_2, \dots, u_l; v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Тогда в базисе $\mathcal{B}_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}}$ матрица оператора параллельного проецирования $P_{\mathcal{V} \parallel \mathcal{U}}$ имеет вид:

$$P_{\mathcal{V}\parallel\mathcal{U}} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \ddots\\ 0\end{array}}\right\} l \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\ 1\end{array}}\right\} k \end{array}. \qquad (5.5.10)$$

Матрицу оператора параллельного проецирования в произвольном базисе $\mathcal{B}'$ получим из матрицы (5.5.10) с помощью преобразования подобия:

$$P'_{\mathcal{V}\parallel\mathcal{U}} = T^{-1} P_{\mathcal{V}\parallel\mathcal{U}}\, T, \qquad (5.5.11)$$

где T – матрица перехода от базиса $\mathcal{B}_{\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}}$ к базису $\mathcal{B}'$.

■

Пример 5.5.5. Найти проекцию точки $M_1(-1,1,2)$ на плоскость π параллельно вектору $\bar{l} = \{2,1,0\}$, если плоскость π параллельна векторам $\bar{a} = \{3,1,1\}$, $\bar{b} = \{-1,0,2\}$ и проходит через точку $M_0(1,2,1)$. Точки и векторы заданы своими координатами в некоторой системе координат $< O, \mathcal{B}_0 >$.

Решение.

Проекцию M_1' точки M_1 на плоскость π можно найти просто как точку пересечения плоскости π и прямой с направляющим вектором $\bar{l}$, проходящей через точку M_1, используя параметрическое уравнение прямой и общее уравнение плоскости (рис. 50).

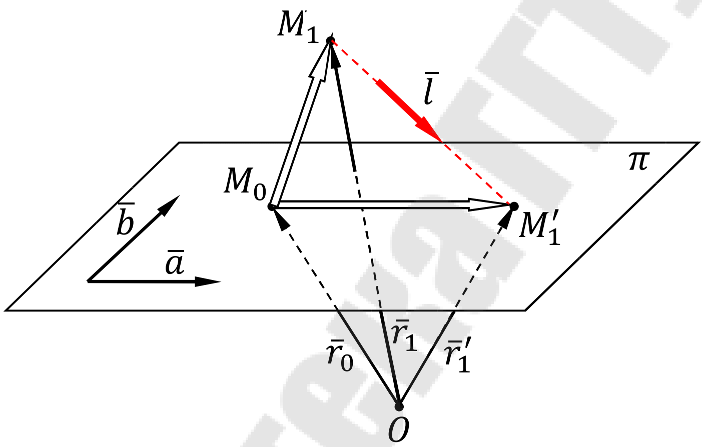


Рис.50. Проекция точки M_1 на плоскость π параллельно вектору $\bar{l}$.

Тем не менее, с целью иллюстрации эффективности общего подхода к проецированию, основанного на теории линейных операторов, и который применим не только к геометрическим задачам, но и к задачам, в которых основные объекты имеют негеометрическую природу, воспользуемся результатами примера 5.5.4.

Рассмотрим в пространстве геометрических векторов $\mathcal{V}$ следующие линейные подпространства:

– подпространство Π_{ab} векторов, компланарных с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
– подпространство $\mathcal{L}_l$ векторов, коллинеарных вектору $\bar{l}$.

Так как векторы $\bar{l}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ некомпланарны, в чем нетрудно убедиться, вычислив определитель, составленный из их столбцов-координат, то $\bar{l} \notin \Pi_{ab}$ и имеет место разложение: $\mathcal{V} = \mathcal{L}_l \oplus \Pi_{ab}$. В качестве базисов подпространств $\mathcal{L}_l$ и Π_{ab} возьмем системы $\mathcal{B}_l = \{\bar{l}\}$ и $\mathcal{B}_{ab} = \{\bar{a}, \bar{b}\}$, соответственно. Тогда объединенная система $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\bar{l}, \bar{a}, \bar{b}\}$ будет базисом всего пространства $\mathcal{V}$.

Матрица проецирования пространства $\mathcal{V}$ в подпространство Π_{ab} параллельно подпространству $\mathcal{L}_l$ в базисе $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ имеет вид:

$$P_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для определения ее вида в исходном базисе $\mathcal{B}_0$ выпишем сначала матрицу перехода $T_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_{\mathcal{V}}}$ от базиса $\mathcal{B}_0$ к базису $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$, взяв в качестве ее столбцов столбцы координат векторов $\bar{l}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных по условию:

$$T_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_{\mathcal{V}}} \equiv S = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

С помощью стандартного алгоритма найдем обратную матрицу:

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Обратная матрица задает переход от базиса $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ к базису $\mathcal{B}_0$, поэтому

$$T_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}} \to \mathcal{B}_0} = S^{-1}.$$

С учетом этого соотношения по формуле (5.5.11) находим матрицу параллельного проецирования в исходном базисе:

$$P_0 = (S^{-1})^{-1} P_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l} S^{-1} = S\, P_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l} S^{-1} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; P_0 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 7 & -14 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Выберем в качестве элемента пространства $\mathcal{V}$ вектор $\overline{M_0M_1}$:

$$\overline{M_0M_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0 = \{-2, -1, 1\}.$$

Оператор проецирования $\hat{P}_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l}$ переводит этот вектор в вектор $\overline{M_0M_1'}$ (см. рис.50), координаты которого согласно формуле (5.5.6) получим, умножив матрицу P_0 на столбец координат вектора $\overline{M_0M_1}$:

$$X_{\overline{M_0M_1'}} = P_0\, X_{\overline{M_0M_1}} \quad \Rightarrow \quad X_{\overline{M_0M_1'}} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 7 & -14 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Наконец координаты искомой точки M_1', найдем как координаты ее радиус-вектора $\bar{r}_1'$:

$$\bar{r}_1' = \bar{r}_0 + \overline{M_0M_1'} = \left\{1 + \frac{2}{3},\; 2 + \frac{1}{3}, 1 + 1\right\} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2\right\} \quad \Rightarrow \quad M_1'\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2\right).$$

Ответ: $M_1'(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2)$.

■

§ 6. Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий в одном конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$.

<u>Опр. 5.6.1.</u> Линейное подпространство $\mathcal{U} \lhd \mathcal{L}$ называется **инвариантным подпространством** для оператора $\hat{A}$, если образ каждого элемента x из $\mathcal{U}$ также принадлежит $\mathcal{U}$:

$$\forall x \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A}[x] \in \mathcal{U}.$$

<u>Свойства инвариантных подпространств.</u>

I. Для нулевого $\hat{O}$ и тождественного $\hat{I}$ операторов инвариантными являются любые подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$.

II. Для любого линейного оператора $\hat{A}$ ядро $\ker \hat{A}$ и образ $\operatorname{Im} \hat{A}$ являются его инвариантными подпространствами:

$$\hat{A}[\ker \hat{A}] = \{0\} \lhd \ker \hat{A},$$
$$\hat{A}[\operatorname{Im} \hat{A}] \lhd \operatorname{Im} \hat{A}.$$

III. Если n - мерное пространство $\mathcal{L}^n$ представлено в виде прямой суммы ненулевых инвариантных относительно действия линейного оператора $\hat{A}$ подпространств

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_\mathrm{k},$$

то существует базис пространства $\mathcal{L}^n$, в котором матрица оператора $\hat{A}$ имеет блочно-диагональный вид:

$$A = \left\| \begin{matrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{matrix} \right\|. \qquad (5.6.1)$$

Заметим, что квадратный блок A_l в матрице (5.6.1) имеет порядок равный размерности соответствующего инвариантного подпространства $\mathcal{U}_l$. Поэтому в случае, когда в разложении пространства все инвариантные подпространства оператора $\hat{A}$ одномерны, то свойство

III решает проблему диагонализации матриц. Поиск элементов, генерирующих одномерные инвариантные подпространства, является основной задачей теории линейных операторов и ее многочисленных приложений.

<u>*Опр. 5.6.2.*</u> *Ненулевой элемент* x из $\mathcal{L}$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\hat{A}$, если найдется действительное число λ такое, что

$$\hat{A}[x] = \lambda x. \qquad (5.6.2)$$

При этом число λ называется **собственным значением** оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору x. Множество *всех* собственных значений называется **спектром** оператора.

<u>Общие свойства собственных векторов.</u>

I. Любой собственный вектор оператора $\hat{A}$ генерирует инвариантное относительно действия оператора одномерное подпространство, совпадающее с линейной оболочкой элемента.

II. Собственные векторы линейного оператора, соответствующие *различным* собственным значениям, линейно независимы.

III. Множество *всех* собственных векторов, соответствующих одному собственному значению λ линейного оператора $\hat{A}$, является линейным подпространством $\mathcal{L}_\lambda \lhd \mathcal{L}$.

IV. Если в линейном пространстве $\mathcal{L}^n$ имеется базис $\mathcal{B}_{\hat{A}}$, составленный из собственных векторов оператора $\hat{A}$, то в этом базисе матрица оператора A имеет диагональный вид:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix}, \qquad (5.6.3)$$

где λ_k – собственное значение оператора $\hat{A}$, соответствующее собственному вектору x_k, входящему в базисную систему.

Не любой линейный оператор имеет действительные собственные значения, а значит, и одномерные инвариантные подпространства. Для поиска возможных собственных значений и соответствующих им собственных векторов зафиксируем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ базис $\mathcal{B}$. Далее запишем операторное равенство (5.6.2) в матричной форме:

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \qquad (A - \lambda E)X = 0, \tag{5.6.3}$$

где A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$. Равенство (5.6.3) представляет собой однородную линейную систему относительно координат собственного вектора. Согласно теореме 2.2.2 для того, чтобы система (5.6.3) имела ненулевые решения, она должна быть вырожденной, то есть определитель ее матрицы коэффициентов должен равняться нулю:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{5.6.4}$$

<u>*Опр. 5.6.3.*</u> Уравнение (5.6.4) называется **характеристическим уравнением**, а матрица $A - \lambda E$ – **характеристической матрицей** линейного оператора $\hat{A}$ в фиксированном базисе $\mathcal{B}$.

После вычисления определителя мы получим в случае n- мерного пространства алгебраическое уравнение n- ой степени относительно λ.

Согласно *основной теореме алгебры* любое алгебраическое уравнение n-ой степени на множестве комплексных чисел имеет ровно n решений с учетом их кратности. Поэтому в комплексных линейных пространствах любой линейный оператор имеет полный набор одномерных инвариантных подпространств, а значит любая квадратная матрица, поскольку она задает некоторый линейный оператор, может быть диагонализирована.

В действительных линейных пространствах оператор может и не иметь действительных собственных значений, а значит, не любая квадратная матрица может быть диагонализирована. В этом случае ставится задача по поиску ее простейшей блочно-диагональной формы типа (5.6.1).

<u>Пример 5.6.1.</u> Найти собственные значения и собственные векторы оператора параллельного проецирования $\hat{P}_{\mathcal{V}\parallel\mathcal{U}}$, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L} = \mathcal{U}^l \oplus \mathcal{V}^m$.

<u>Решение.</u>

В первую очередь заметим, что повторное действие оператора проецирования результат, полученный при первом проецировании, изменить уже не может. Таким образом, для любых операторов проецирования справедливо следующее операторное равенство:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}. \tag{5.6.5}$$

Далее, действуя оператором проецирования на его собственный вектор x, с учетом этого равенства (и линейности оператора) последовательно находим:

$$\hat{P}^2[x] = \hat{P}[x] \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 x = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1)x = 0.$$

Согласно определению 5.6.2 $x \neq 0$, поэтому либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда

$$\hat{P}_{\mathcal{V} \parallel \mathcal{U}}[x] = \lambda x \quad \Rightarrow \quad v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = u_x + 0 = u_x \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{U}.$$

Для $\lambda = 1$ получаем:

$$\hat{P}_{\mathcal{V} \parallel \mathcal{U}}[x] = \lambda x \quad \Rightarrow \quad v_x = x \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{V}.$$

Таким образом, оператор параллельного проецирования $\hat{P}_{\mathcal{V} \parallel \mathcal{U}}$ имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. При этом собственным вектором оператора $\hat{P}_{\mathcal{V} \parallel \mathcal{U}}$, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$, является любой ненулевой элемент из подпространства $\mathcal{U}$, т.е. элемент, задающий направление проецирования, а собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 1$, — любой ненулевой элемент из подпространства $\mathcal{V}$.

■

Пример 5.6.2. Установить, можно ли матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

диагонализировать с помощью преобразования подобия.

Решение.

Будем считать заданную квадратную матрицу A матрицей некоторого линейного оператора $\hat{A}$, действующего в абстрактном пространстве $\mathcal{L}^3$, записанной в фиксированном базисе $\mathcal{B}_0$. Для определения собственных значений этого оператора составим и решим характеристическое уравнение (5.6.4):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3 \; .$$

Так как характеристическое уравнение имеет ровно три действительных корня (с учетом их кратности), то, во-первых, существует базис пространства $\mathcal{L}^3$, составленный из собственных векторов оператора $\hat{A}$, а, во-вторых, в этом базисе матрица оператора согласно общему свойству собственных векторов IV имеет диагональный вид (5.6.3). Другими словами, заданная матрица A может быть диагонализирована с помощью некоторого преобразования подобия. Причем результат можно записать сразу и без конкретизации базиса (но только после упорядочивания множества собственных значений). В нашем случае имеем:

$$A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Безусловно, полное решение задачи предполагает представление явного вида преобразования, диагонализирующего матрицу. Для этого необходимо сначала выделить множества собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, а затем составить из них базис всего пространства.

Подставляя в матричное уравнение (5.6.3) первое значение $\lambda = 0$, для координат x, y, z соответствующих собственных векторов получаем

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad x + y + z = 0\,.$$

Таким образом, ранг системы равен 1, а множество решений представляет собой дважды параметрическое семейство (в соответствии с кратностью собственного значения $\lambda = 0$):

$$\begin{cases} x = -u - v, \\ y = u, \\ z = v. \end{cases}$$

В качестве фундаментальной системы решений, которая войдет в базис полного пространства, можно выбрать любую пару линейно независимую решений, например,

$$X_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \; X_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Линейная независимость данной пары очевидна, так как координаты векторов не пропорциональны друг другу. Но в общем случае она легко устанавливается путем вычисления ранга их координатной матрицы (ранг координатной матрицы должен равняться числу векторов в системе).

Для собственного значения $\lambda = 3$ получаем

$$\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z, \\ y = z. \end{cases}$$

Здесь ранг системы равен 2, а множество решений представляет собой одно параметрическое семейство:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t. \end{cases}$$

В качестве фундаментального решения можно выбрать любое ненулевое решение, например,

$$X_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Система векторов $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ образует базис полного пространства $\mathcal{L}^3$, а координатная матрица этой системы определяет искомое преобразование подобия:

$$C = \|X_1 X_2 X_3\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

С целью проверки правильности вычислений предварительно с помощью стандартной процедуры находим обратную матрицу:

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Далее, выполняя непосредственно преобразование подобия (5.5.9), получаем

$$A' = C^{-1}AC = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix},$$

что совпадает с заявленным ранее результатом.

Важно отметить, что преобразование (а конкретно — выбор матрицы C), диагонализирующее матрицу A, не является однозначно определенным. Выбор любого другого базиса, составленный из собственных векторов оператора $\hat{A}$, решает задачу диагонализации. Однако результирующая диагональная матрица не изменится, несмотря на то, что матрицы, определяющие преобразование подобия C будут отличаться друг от друга. Этот факт находит свое фундаментальное обоснование в специальном разделе высшей алгебры, называемом *теорией групп*.

Список рекомендуемой литературы

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. / Д.В. Беклемишев. – 10-е изд. – М.: Физматлит, 2005.
2. Элементы линейной алгебры. / Р.Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986.
3. Бугров, Я. С. Высшая математика. Т. 1. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс. 2005.
5. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. / Л. И. Головина. - М. : Наука, 1979.
6. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1 : Линейная алгебра и основы математического анализа. / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1993.
7. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре. / И. М. Гельфанд. – 5-е изд., испр. – М. : Добросвет, 1998.
8. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. / А. И. Кострикин. – М. : Наука, 1977.
9. Биркгоф, Г. Современная прикладная алгебра. / Г. Биркгоф, Т. Барти : пер. с англ. – М. : Мир, 1976.
10. Виноградов, И. М. Основы теории чисел. / И. М. Виноградов. – 9-е изд., перераб. – М. : Наука, 1981.
11. Ленг, С. Алгебра. / С. Ленг ; пер. с англ. – М. : Мир, 1968.
12. Харин, Ю. С. Математические и компьютерные основы криптологии. / Ю. С. Харин. Минск : Новое знание, 2003.
13. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – М. : МГУ, 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Бабич Александр Антонович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Пособие
по дисциплине «Математика. Геометрия и алгебра»
для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика
и технологии программирования»
дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 07.10.19.

Рег. № 62Е.
http://www.gstu.by