Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Гомельский государственный технический

университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА.
КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПОСОБИЕ

по курсу «Математика» для студентов специальностей 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования», 1-36 04 02 «Промышленная электроника», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» дневной формы обучения

Гомель 2017

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1я73
М34

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 5 от 22.12.2016 г.)*

Составители: Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, И. В. Иванейчик

Рецензент: доц. каф. «Информационные технологии» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. В. Цитринов*

М34 **Математика.** Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы : пособие по курсу «Математика» для студентов специальностей 1-40 04-01 «Информатика и технологии программирования», 1-36 04 02 «Промышленная электроника», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» днев. формы обучения / сост.: Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, И. В. Иванейчик. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2017. – 117 с.

Предназначено для самостоятельной подготовки студентов дневного отделения к практическим занятиям, контрольным работам и экзамену по математике.
Для студентов технических и экономических специальностей дневной формы обучения.

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.1я73

I. *Кратные интегралы*

1. *Двойной интеграл.*

1.1 Двойной интеграл и его вычисление.

Пусть в некоторой замкнутой области D плоскости xOy определена ограниченная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем область D произвольным образом на n элементарных ячеек $D_1, D_2, \ldots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек. Площадь i-й ячейки обозначим $\Delta\sigma_i$, а диаметр - d_i. Внутри каждой ячейки выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$.

Определение 1. Интегральной суммой для функции $f(x, y)$, по области D называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i \tag{1.1}$$

Определение 2. Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы (1.1) при $d \to 0$, $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ и обозначается

$$\iint_D f(x, y)dxdy.$$

Таким образом, согласно определению 2, справедливо равенство:

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y)dxdy \tag{1.2}$$

Теорема существования двойного интеграла:

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то двойной интеграл существует, т.е. существует предел интегральной суммы (1.1), который не зависит от способа дробления области D на элементарные ячейки и от выбора точек $M_i(x_i, y_i)$ в них.

Свойства двойного интеграла:

- Двойной интеграл от суммы двух функций $f(x, y) + g(x, y)$ по области D равен сумме двойных интегралов от каждой из функций в отдельности:

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)dxdy \tag{1.3}$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла: если $c = \text{const}$, то

$$\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (1.4)$$

- Если область D разбита на две области D_1 *и* D_2, не имеющие общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad (1.5)$$

- Теорема о среднем. Для непрерывной функции $f(x,y)$ в области D, площадь которой S_D, всегда найдется хотя бы одна точка $\mathrm{M}(\zeta,\eta) \in D$, такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\zeta,\eta)S_D \qquad (1.6)$$

Число $f(\zeta,\eta)$ называется средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

- Если в области D для непрерывных функций $f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)$ выполняется неравенство

$$f_1(x,y) \le f_2(x,y) \le f_3(x,y), \text{ то}$$

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \le \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy \le \iint\limits_D f_3(x,y)dxdy \qquad (1.7)$$

- Если функция $f(x,y) \ne const$ непрерывна в области D, $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y), m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, то

$$mS_D < \iint\limits_D f(x,y)dxdy < MS_D \qquad (1.8)$$

Вычисление двойного интеграла.

Пусть область D ограничена сверху и снизу соответственно линиями $y=\varphi_2(x)$ и $y=\varphi_1(x)$, а справа и слева прямыми $x=b$ и $x=a$ (рис. 1),

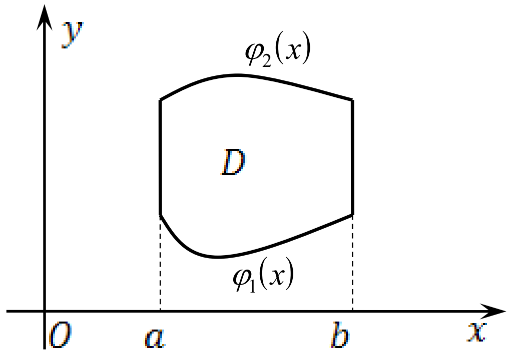


Рис. 1

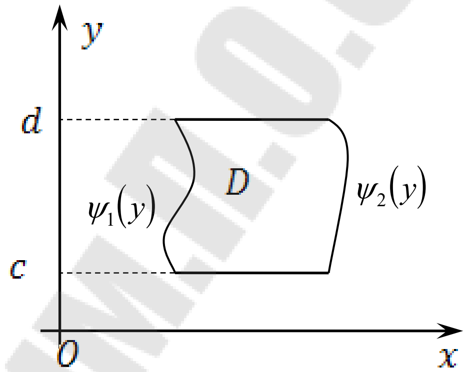


Рис. 2

причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $a<b.$ Такую область назовем правильной в направлении Oy.

Пусть область D ограничена справа и слева линиями $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$, а снизу и сверху прямыми $y=c$ и $y=d$ (рис. 2), причем $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, $c<d$. Такую область назовем правильной в направлении Ox.

Если область D является правильной в направлении Oy, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1.9)$$

Правую часть в формуле (1.9) называют повторным или двукратным интегралом от функции $f(x,y)$. Интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ - внутренним интегралом.

Если область D является правильной в направлении Ox, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{1.10}$$

Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называется приведением двойного интеграла к повторному.

Переход от формулы (1.9) к (1.10) (или наоборот) называется изменением порядка интегрирования.

Если область D не является правильной ни в одном из направлений, то ее необходимо разбить на конечное число правильных областей $D_1, D_2, \ldots D_n$, а затем воспользоваться соответствующим свойством двойного интеграла:

Пример разбиения приведен на рис.3.

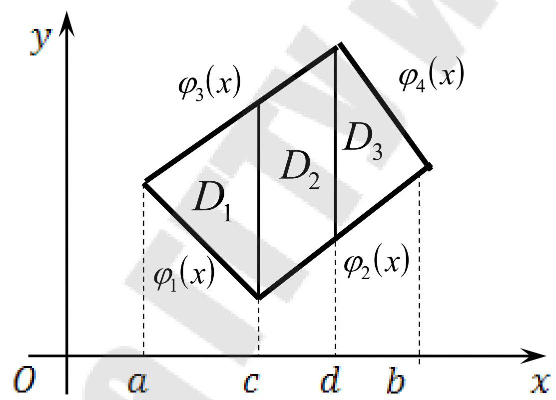


Рис. 3

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^d dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy + \int\limits_d^b dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dy$$

Таким образом, процесс вычисления двойного интеграла состоит из следующих этапов:

- Построить область интегрирования D.

- Выбрать порядок интегрирования. При этом следует руководствоваться либо соображениями краткости, т.е. выбрать такой порядок, при котором нет необходимости разбивать область D на части, либо соображениями простоты вычисления внутреннего интеграла. В случае необходимости произвести разбиение области D на конечное число правильных областей. Записать двойной интеграл в виде повторного.

- Вычислить внутренний интеграл. В случае (1.9) переменную x, а в случае (1.10) переменную y при интегрировании принять за постоянную величину. Результатом интегрирования в случае (1.9) будет функция $\Phi(x)$, в случае (1.10) - функция $\Phi(y)$.Вычислить определенный интеграл по отрезку $[a;b]$ или $[c;d]$ от функции, полученной на предыдущем этапе. Результатом вычислений будет постоянное число.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

Решение: Изобразим область D, по которой производится интегрирование: слева она ограничена прямой $x=0$, справа - прямой $x=1$, снизу кубической параболой $y=x^3$, сверху параболой $y=\sqrt{x}$. Область D изображена на рисунке 4.

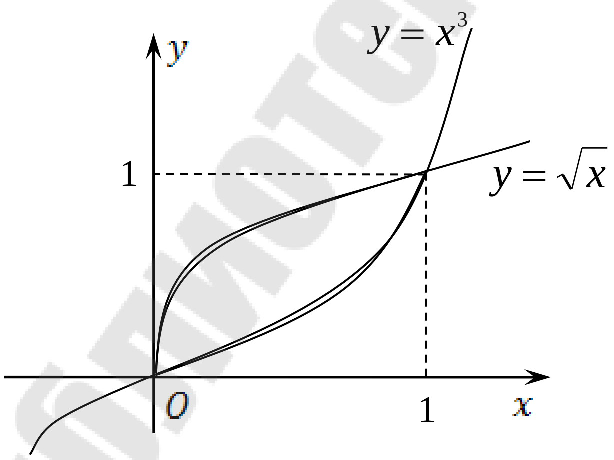


Рис. 4

Для того, чтобы изменить порядок интегрирования, запишем уравнения кривых, ограничивающих область D как функции $x(y)$.

Если $y=x^3$, то $x=y^{1/3}$

Если $y=\sqrt{x}$, то $x=y^2$.

Переменная y меняется от 0 до 1. На отрезке $[0;1]$ $y^2 < y^{1/3}$, поэтому

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)dx.$$

Задача решена.

<u>Пример 2.</u> Изобразить область D и свести $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами; $D\colon \{x=1;\ x=4;\ 3x-2y+4=0;\ 3x-2y-1=0\}$.

<u>Решение:</u> Область D приведена на рисунке 5.

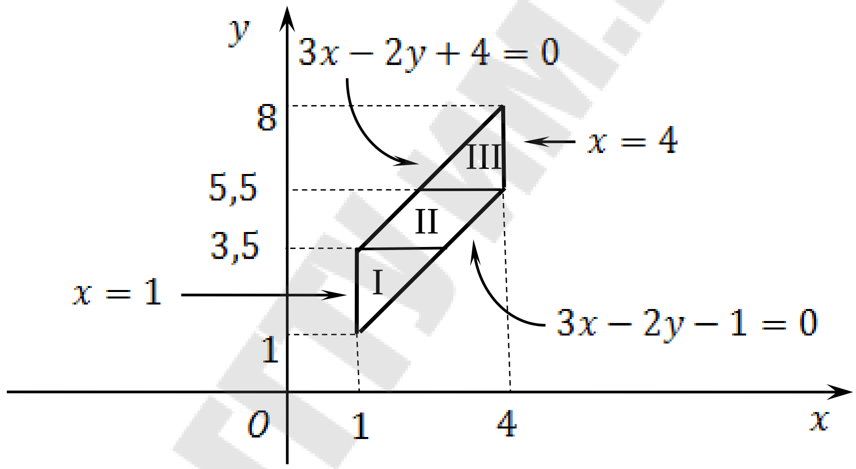


Рис.5

1-й способ. Внешний интеграл по x, внутренний по y. Область слева ограничена прямой $x=1$; справа - прямой $x=4$; снизу – прямой $3x-2y-1=0,\Rightarrow y=\dfrac{3x-1}{2}$; сверху - прямой $3x-2y+4=0,\Rightarrow y=\dfrac{3x+4}{2}$. Область является правильной в направлении Oy. Таким образом,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_1^4 dx \int_{\frac{3x-1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)dy$$

2-й способ. Область D не является правильной в направлении Ox, т.к. при $y \in [0;3{,}5]$ она слева ограничена прямой $x = 1$, справа - прямой $3x - 2y - 1 = 0,\ x = \dfrac{2y+1}{3}$; при $y \in [3{,}5;5{,}5]$ область слева ограничена прямой $3x - 2y + 4 = 0, x = \dfrac{2y-4}{3}$; справа - прямой $x = \dfrac{2y+1}{3;}$;

при $x \in [5{,}5;8]$ область слева ограничена прямой $x = \dfrac{2y-4}{3}$, справа - прямой $x = 4$.

Проведем прямые $y = 3{,}5$ и $y = 5{,}5$. Они разобьют область D на три правильные в направлении Ox области.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$\int_0^{3,5} dy \int_1^{\frac{2y+1}{3}} f(x,y)dx + \int_{3,5}^{5,5} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{\frac{2y+1}{3}} f(x,y)dx + \int_{5,5}^{8} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{4} f(x,y)dx.$$

Таким образом задача решена.

__Пример 3.__ Вычислить двойной интеграл по области D от функции $f(x,y)$, если D:$\{y = x^2, x = y^2\}$, $\quad f(x,y) = x^2 + y$.

Решение: Область D изображена на рисунке 6. Найдем координаты точек пересечения кривых $y = x^2$ и $x = y^2$: $x^2 = \left(x^2\right)^2$; $x^2\left(x^2 - 1\right) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

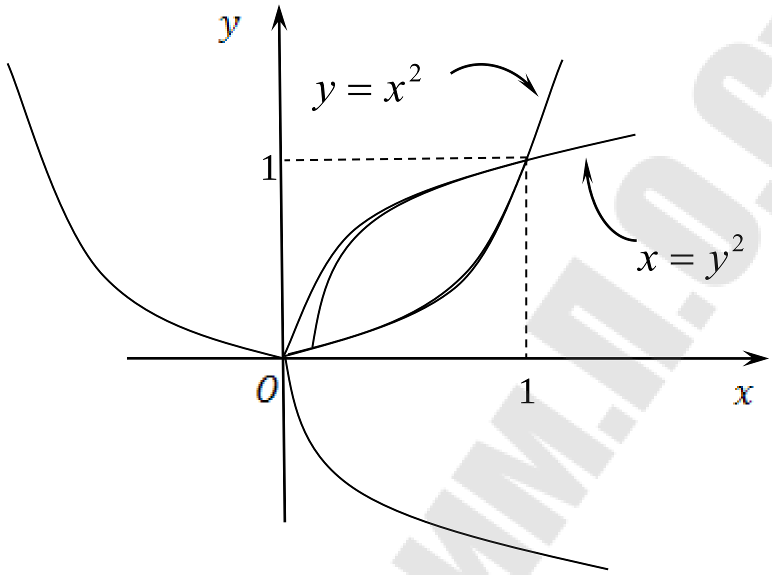


Рис. 6

$$\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\Phi(x) = \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} = x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} -$$

$$-\left(x^2 \cdot x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2}\right) = x^{5/2} + \frac{x}{2} - \left(x^4 + \frac{x^4}{2}\right) = x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4.$$

Подставим $\Phi(x)$ в повторный интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right)dy = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4\right)dx = \left(\frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10}x^5\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

Ответ: $\frac{33}{140}$

Задания

<u>Задание 1.1.</u> Вычислить повторные интегралы:

1) $\int_0^1 dx \int_3^5 \left(x^2 y + xy\right)dy$;

2) $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos y \, dy$;

3) $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy dx$;

4) $\int_1^2 dx \int_0^{2/x} \sqrt{4 - x^2 y^2} \, dy$.

<u>Задание 1.2.</u> Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

5) $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.

6) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$.

7) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

8) $\int_0^3 dx \int_0^{x/3} f(x,y)dy + \int_3^4 dx \int_0^{4-x} f(x,y)dy$.

9) $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)dy$.

10) $\int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f(x,y)dx$.

<u>Задание 1.3.</u> Изобразить область интегрирования D и свести двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если:

11) $D: \{x^2 + y^2 = 4, y = 2x - x^2, x \geq 0\}$.

12) $D: \left\{y = x^2,\ y = 5x^2,\ x + y - 6 = 0,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

13) D - треугольник ABC с вершинами A(-2;-2); B(1;2); C(6;2).

14) D: $\left\{x^2+y^2 \ge 1; \quad x^2+y^2 \le 2;\right\}$.

Задание 1.4. Вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если

15) D: $\{0 \le y \le \pi; \quad 0 \le x \le \sin y\}$ $\quad f(x,y)=x+y$;

16) D: $\left\{y=4x+6, y=\frac{1}{2}x-1, x=-1\right\}$ $\quad f(x,y)=x+2y$;

17) D- треугольник с вершинами $O(0,0), A(10,1), B(1,1)$

$$f(x,y)=\sqrt{xy-y^2};$$

18) D: $\left\{y=\sqrt{x};\, y=x\right\}$ $\quad f(x,y)=e^{x/y}$.

Ответы: **1.** $\frac{20}{3}$; **2.**1; **3.** $\frac{1}{12}$; **4.** $\pi \cdot ln2$; **15.**$\frac{5}{4}\pi$; **16.**$-\frac{49}{12}$; **17.**6; **18.**$\frac{1}{2}e-1$.

1.2 Замена переменной в двойном интеграле.

Пусть прямоугольные координаты x,y преобразуются к новым (криволинейным) координатам u и υ, которые связаны с x и y соотношениями:

$$x=x(u,\upsilon);\; y=y(u,\upsilon), \tag{1.11}$$

где $x(u,\upsilon)$ и $y(u,\upsilon)$ - непрерывные и дифференцируемые функции.

Функциональный определитель

$$J(u,\upsilon)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

называется ***якобианом*** преобразования (1.11).

Если функции $x(u,\upsilon)$и $y(u,\upsilon)$ осуществляют однозначное отображение области D, лежащей в плоскости xOy, на область D', лежащую в плоскости $uO\upsilon$, что равносильно условию $J(u,\upsilon)\neq 0$, то имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\bigl(x(u,\upsilon);y(u,\upsilon)\bigr)\left|J(u,\upsilon)\right|dud\upsilon. \qquad (1.13)$$

Таким образом для замены переменных в двойном интеграле необходимо сделать следующее:

Используя выражения $x = x(u,\upsilon)$, $y = y(u,\upsilon)$найти границы области D' в плоскости $uO\upsilon$. Изобразить область D' на плоскости $uO\upsilon$.

Вычислить якобиан преобразования по формуле (1.12).

Подставить D', $x(u,\upsilon)$, $y(u,\upsilon)$ $\left|J(u,\upsilon)\right|$ в формулу (1.13)**.** Вычислить получившийся в правой части равенства двойной интеграл по переменным u и υ.

<u>Пример 4.</u> Вычислить двойной интеграл
$\iint\limits_{D}\left(x^2-y^2\right)\sin 2\pi(x+y)^2\,dxdy$, где D - параллелограмм с вершинами в точка $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; $B(2;0)$; $C(3;1)$; $E\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

<u>Решение</u>: Построим область D (рис.7а)

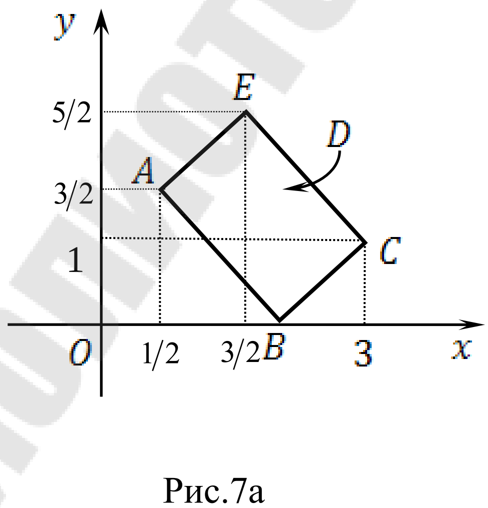


Рис.7а

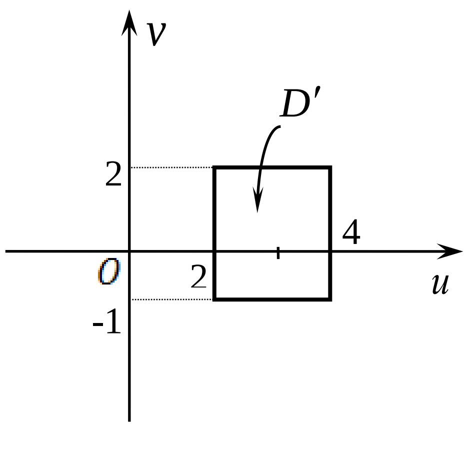


Рис.7б

Непосредственное вычисление интеграла громоздко, поскольку область интегрирования не является правильной ни в направлении Ox, ни в направлении Oy и, следовательно, для вычисления интеграла ее придется разбить на три правильные области. Однако, вычисления заметно упростятся, если сделать подходящую замену переменных.

Найдем уравнения прямых, на которых лежат стороны параллелограмма:

Отрезок AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$; $\quad \dfrac{x-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{0-\frac{3}{2}}$; $\quad x+y=2$.

Отрезок AE: $\dfrac{x-x_A}{x_E-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_E-y_A}$; $\quad \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}$; $\quad x-y=-1$.

Отрезок BC: $\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$; $\quad \dfrac{x-2}{3-2}=\dfrac{y-0}{1-0}$; $\quad x-y=2$.

Отрезок CE: $\dfrac{x-x_C}{x_E-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_E-y_C}$; $\quad \dfrac{x-3}{\frac{3}{2}-3}=\dfrac{y-1}{\frac{5}{2}-1}$; $\quad x+y=4$.

Таким образом, область D ограничена линиями $x+y=2$; $x+y=4$; $x-y=-1$; $x-y=2$.

Введем новые переменные: $\begin{cases} u=x+y \\ \upsilon=x-y \end{cases}$

Тогда область D плоскости xOy отобразится в область D' плоскости $uO\upsilon$, которая представляет собой прямоугольник $2<u<4$, $-1<\upsilon<2$. (рис.7б). Выразим x и y через u и υ:

$$x=\frac{u+\upsilon}{2}; \quad y=\frac{u-\upsilon}{2}.$$

Вычислим якобиан преобразования по формуле (1.12)

$$J(u,\upsilon)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left|J(u,\upsilon)\right|=\frac{1}{2}.$$

Тогда, по формуле (1.13) заданный интеграл преобразуется к виду:

$$\iint\limits_D (x^2-y^2)\sin 2\pi(x+y)^2\,dxdy=\iint\limits_{D'} uv\sin(2\pi u^2)\frac{1}{2}\,dudv=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} vdv\int\limits_{2}^{4}\sin(2\pi u^2)\,udu=\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\bigg|_{-1}^{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\limits_{2}^{4}\sin(2\pi u^2)\,d(2\pi u^2)=$$

$$=\frac{3}{16\pi}(-\cos(2\pi u^2))|_2^4=-\frac{3}{16\pi}(\cos 32\pi-\cos 8\pi)=0.$$

Ответ: 0.

Переход к полярным координатам

Переход к полярным координатам осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi; & y=\rho\sin\varphi; \\ \rho\ge 0; & 0\le\varphi\le 2\pi. \end{array} \qquad (1.14)$$

По формулам (1.12) находим якобиан преобразования $|J|=\rho$.

Таким образом

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (1.15)$$

При переходе к повторному интегралу в правой части формулы (1.15) следует руководствоваться следующими правилами.

- Если полюс O (начало координат) находится вне области D (рис.8а), а область D ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$ кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ $\rho_1 < \rho_2$, то

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{1.16}$$

- Если полюс O находится внутри области интегрирования D' (рис. 8б), а уравнение ее границы имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, тогда

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \tag{1.17}$$

- Если полюс O лежит на границе области D' (рис.8в) и уравнение ее границы имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, тогда

$$\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho, \tag{1.18}$$

где значения α и β определяются непосредственно из вида D'.

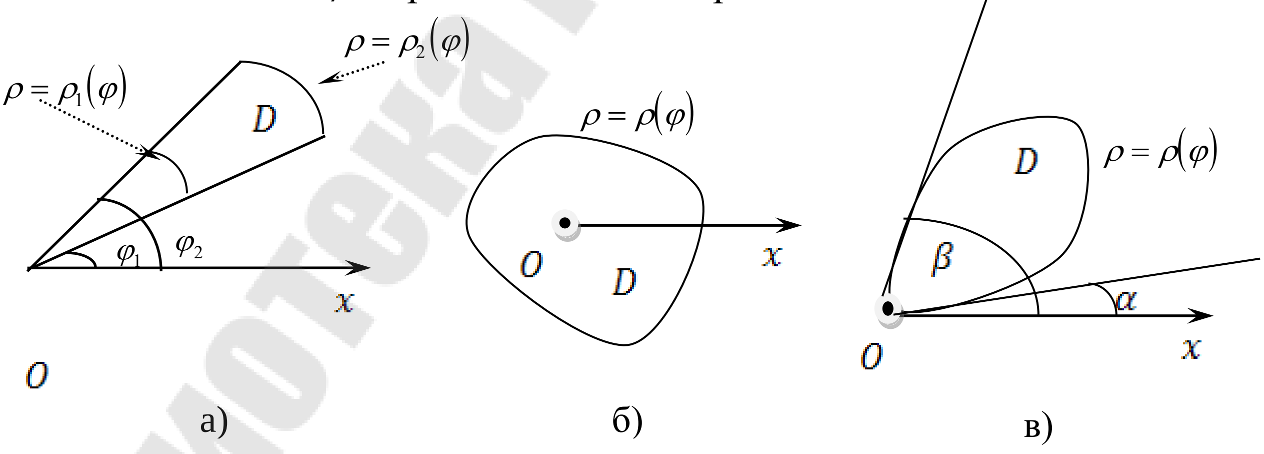


Рис. 8

Переход к полярным координатам удобно использовать, если D есть круг или часть круга.

Пример 5. Вычислить $\iint\limits_D arctg\,\frac{y}{x}dxdy$, где D - часть кольца, ограниченного линиями $x^2+y^2=1;\quad x^2+y^2=9;\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}x;\quad y=\sqrt{3}x.$

Решение: Изобразим область D (рис. 9). Перейдем к полярным координатам по формулам (1.14) $x=\rho\cos\varphi\quad y=\rho\sin\varphi$. Запишем границы области D в полярных координатах

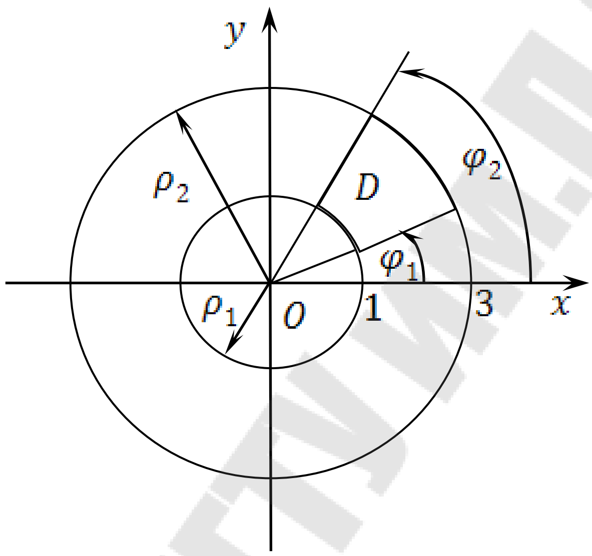


Рис. 9

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho_1=1,$$

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho_2=3,$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow \rho\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{6},$$

$$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=\sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

Полюс O лежит вне области D, поэтому, согласно (1.15) и (1.16) имеем:

$$\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{D'} arctg\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi \int\limits_1^3 \rho d\rho = \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right)(9-1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{6}$.

<u>Пример 6.</u> Вычислить $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где D - область, ограниченная линиями $x^2-2x+y^2=0;\quad x^2-4x+y^2=0;\quad y=x;\quad y=0.$

<u>Решение</u>: Изобразим область D (рис. 10).

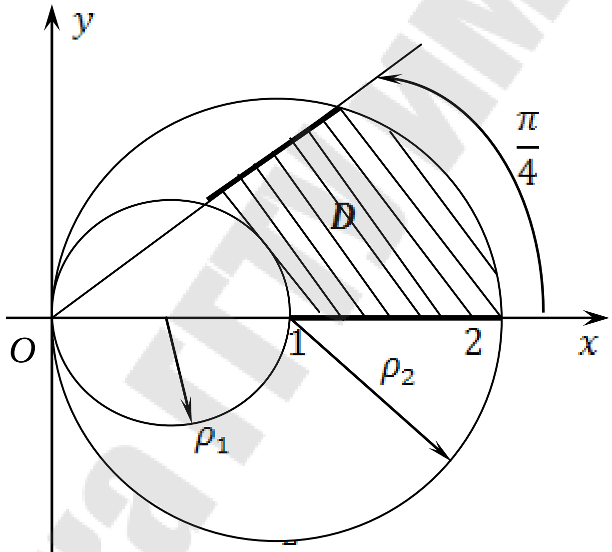


Рис. 10

$x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$ - окружность с центром $O(1,0)$, радиусом $\rho_1=1$.

$x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$ - окружность с центром $O(2,0)$, радиусом $\rho_2=2$.

$y=x$ – биссектриса первого квадранта; $y=0$ - ось Ox.

Перейдем к полярным координатам и запишем границы области D в полярных координатах.

$$x^2-2x+y^2=0 \Longrightarrow (\rho\cos\varphi)^2-2\rho\cos\varphi+(\rho\sin\varphi)^2=0,$$
$$\rho_1=2\cos\varphi;$$

$$x^2-4x+y^2=0 \Longrightarrow (\rho\cos\varphi)^2-4\rho\cos\varphi+(\rho\sin\varphi)^2=0,$$
$$\rho_2=4\cos\varphi;$$

$$y=0 \Rightarrow \rho\sin\varphi=0 \Rightarrow tg\varphi=0 \Rightarrow \varphi_1=0,$$

$$y=x \Rightarrow \rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi=1 \Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{4}.$$

Полюс O лежит вне области D, поэтому, согласно (1.15) и (1.16) имеем:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D'}\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}\,\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\rho^2d\rho=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\right)d\varphi=\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4}cos^3\varphi d\varphi=$$
$$=\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4}cos^2\varphi d(\sin\varphi)=\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4}(1-sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=\frac{56}{3}\left.\left(\sin\varphi-\frac{sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\pi/4}=$$
$$=\frac{56}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{12}\right)=\frac{70\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{70\sqrt{2}}{9}$.

Обобщенные полярные координаты.

Обобщенными полярными координатами (эллиптическими) называются переменные ρ и φ, связанные с прямоугольными координатами x и y соотношениями:

$$x=a\rho\cos\varphi \quad y=b\rho\sin\varphi. \tag{1.19}$$

$$\rho\geq 0;\ 0\leq\varphi\leq 2\pi;\quad a>0, b>0;\ a\neq b.$$

Якобиан преобразования J в этом случае имеет вид:

$$J(\rho,\varphi) = ab\rho \ . \qquad (1.20)$$

Таким образом, согласно (1.13) двойной интеграл в обобщенных полярных координатах принимает вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \ . \qquad (1.21)$$

При расстановке пределов интегрирования в повторном интеграле в (1.21) следует руководствоваться теми же правилами, что и в случае перехода к полярным координатам. Переход к обобщенным полярным координатам удобнее в случае, когда или уравнение границы области, или подынтегральная функция, или то и другое одновременно содержат выражение $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k$.

Пример 7. Вычислить $\iint\limits_{D} xydxdy$, если область D ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $x=0,\ y=0\ (x\geq 0, y\geq 0)$.

Решение: Изобразим область D (рис. 11). Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам (1.18): $x = a\rho\cos\varphi \quad y = b\rho\sin\varphi$. Тогда граница области D примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow \frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \ \Rightarrow \rho^2=1, \quad \rho=1,$$

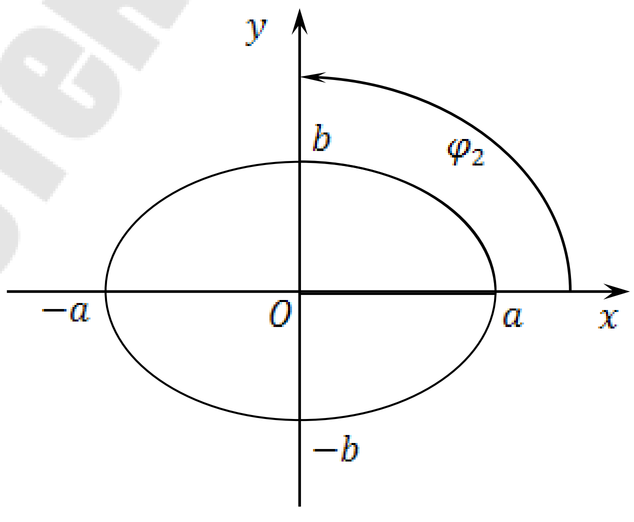


Рис. 11

$$y = 0 \quad \Rightarrow a\rho\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = 0,$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow a\rho\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Полюс O лежит на границе области, поэтому воспользуемся формулой, аналогичной (1.18). Таким образом:

$$\iint\limits_D xydxdy = ab\iint\limits_{D'} a\rho\cos\varphi \cdot b\rho\sin\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= a^2b^2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3\cos\varphi\sin\varphi\, d\rho = \frac{a^2b^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{a^2b^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{a^2b^2}{16}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{a^2b^2}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2b^2}{8}$.

Задания

Задание 1.6. Вычислить двойной интеграл по указанной области:

19) $\iint\limits_S \sin 2\varphi d\rho d\varphi$; $\quad S$ определена неравенствами

$\pi/4 \le \varphi \le \pi/2; \quad 3 \le \rho \le 5.$

20) $\iint\limits_S \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi$; $\quad S$ - ограничена линиями:

$\rho = 1; \rho = 2(1+\cos\varphi)$, полярной осью и расположена выше этой оси.

21) $\iint_S \rho\cos\varphi\, d\rho d\varphi$, где S - круговой сектор, ограниченный линиями $\rho = R, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

22) $\iint\limits_S \rho^3 \sin\varphi d\rho d\varphi$; $\quad S$- область ограничена полярной осью, линией $\rho = 1 + \cos\varphi$ и расположенная выше полярной оси.

Задания 1.7. Переходя к полярным координатам вычислить интегралы:

23) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy; \quad S: x^2 + y^2 = 2ax.$

24) $\iint\limits_S xydxdy;$ S – ограничена линиями

$y = -x,\ y = \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 = ax;\ x^2 + y^2 = bx,\ (b > a).$

25) $\iint\limits_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy;$ S ограничена лемнискатой:

$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$

26) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}};$ S - круг $x^2 + y^2 \le 16.$

Задание 1.8. Переходя к обобщенным полярным координатам вычислить интегралы.

27) $\iint\limits_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy;$ S - ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

28) $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}}};$ S - ограничена эллипсом $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Ответы: **19.**1; **20.**6; **21.** $\frac{R^2}{2}$; **22.** $\frac{8}{3}$; **23.**$2a^4\pi$; **24.**$\frac{7(b^4-a^4)}{1536}$; **25.**$\frac{a^4}{3}$; **26.**4π; 27.$\frac{2\pi ab}{3}$; **28.**$24\pi(2-\sqrt{3})$.

1.3 Геометрические приложения двойного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь плоской фигуры D вычисляется по формуле

$$S_D = \iint\limits_D dxdy \tag{1.22}$$

Пример 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$x + y = 4;\ x - 3y = 0;\ x + y = 8;\ 3x - y = 0$

Решение: Построим область (рис.12), площадь которой необходимо вычислить.

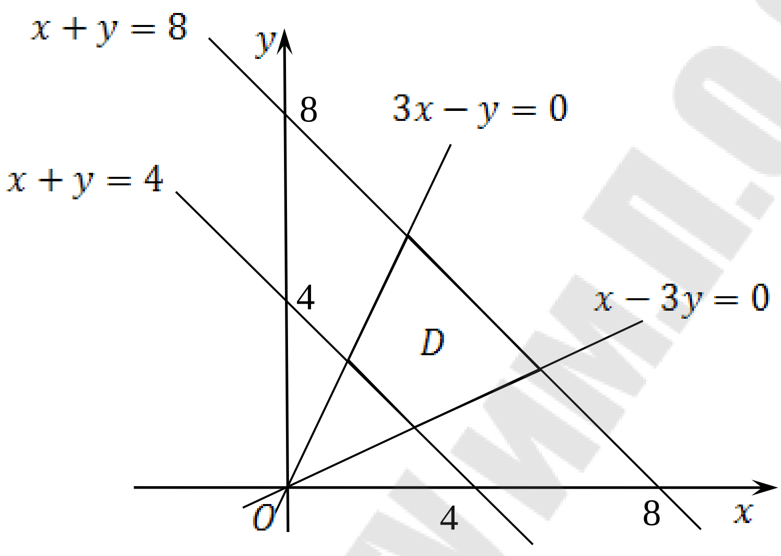


Рис. 12

Согласно (1.22) искомая площадь $S_D = \iint\limits_D dxdy$

Для вычисления двойного интеграла сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x + y = u \\ \dfrac{y}{x} = \upsilon \end{cases}, \quad \text{тогда} \begin{cases} x = \dfrac{u}{1+\upsilon} \\ y = \dfrac{u\upsilon}{1+\upsilon} \end{cases}$$

Область D' на плоскости $uO\upsilon$ примет вид: $4 \le u \le 8$, $\dfrac{1}{3} \le \upsilon \le 3$ - прямоугольник.

Якобиан преобразования вычислим по формуле (1.12)

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+\upsilon} & -\dfrac{u}{(1+\upsilon)^2}\\ \dfrac{\upsilon}{1+\upsilon} & \dfrac{u}{(1+\upsilon)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+\upsilon)^3}+\frac{u\upsilon}{(1+\upsilon)^3}=\frac{u}{(1+\upsilon)^2}.$$

Таким образом:

$$S_D=\iint\limits_{D'}\frac{u}{(1+\upsilon)^2}dud\upsilon=\int\limits_4^8 udu\int\limits_{1/3}^{3}\frac{d\upsilon}{(1+\upsilon)^2}=\frac{u^2}{2}\Bigg|_4^8\left(-\frac{1}{1+\upsilon}\right)\Bigg|_{1/3}^{3}=$$

$$=\frac{64-16}{2}\cdot\left[-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]=\frac{48}{2}\cdot\frac{1}{2}=12.$$

Ответ: $S_D=12\ ed^2$.

<u>Пример 9.</u> Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией: $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$.

<u>Решение:</u> Согласно (1.22)

$$S_D=\iint\limits_D dxdy,$$

перейдем к полярным координатам по формулам (1.14) $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$, тогда уравнение границы имеет вид:

$$\left(\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi\right)^2=2a^2\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi,$$

$$\rho^4=2a^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\rho^2=a^2\sin2\varphi,\qquad \rho=a\sqrt{\sin2\varphi},$$

$$\rho^2\ge0,\Rightarrow\sin2\varphi\ge0\quad 2\pi n\le2\varphi\le\pi+2\pi n,$$

$\pi n\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, при $n=0$ $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, при $n=1$ $\pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$.

Таким образом, область D, представляет собой две симметричные области, лежащие в I и III четвертях (рис. 13).

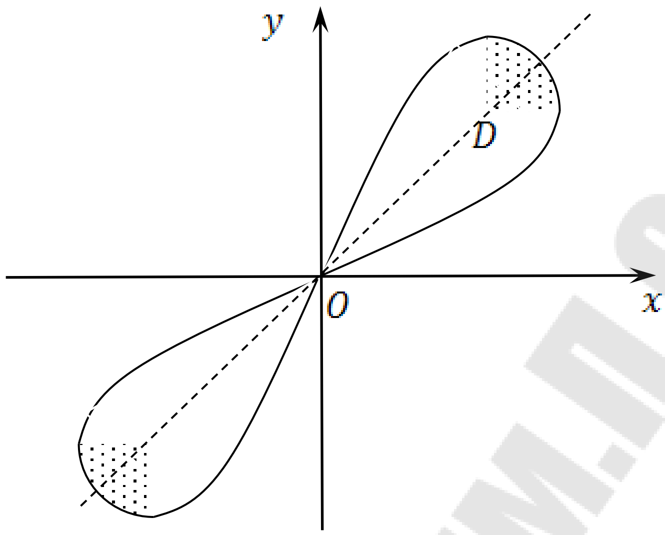


Рис. 13

Таким образом искомая площадь равна:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} a^2 \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(-\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = a^2.$$

Ответ: $S = a^2 (ед)^2$.

Вычисление объемов тел.

Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области D плоскости xOy равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$по области D.

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{1.23}$$

Если тело, объем которого ищется ограничено сверху поверхностью $z = f_2(x,y) \geq 0$, а снизу $z = f_1(x,y) \geq 0$,причем проекцией обеих поверхностей на плоскость xOx является одна и та же область D, тогда объем тела определяется формулой

$$V = \iint\limits_D \left[f_2(x,y) - f_1(x,y) \right] dxdy \ . \tag{1.24}$$

Если внутри области D функция $f(x,y)$меняет знак, то область D надо разбить на две области: D_1, где $f(x,y) \geq 0$ и D_2, где $f(x,y) \leq 0$.

<u>Пример 10.</u> Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4,\ y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$.

<u>Решение:</u> Построим заданное тело и его проекцию на плоскость xOy. (рис. 14)

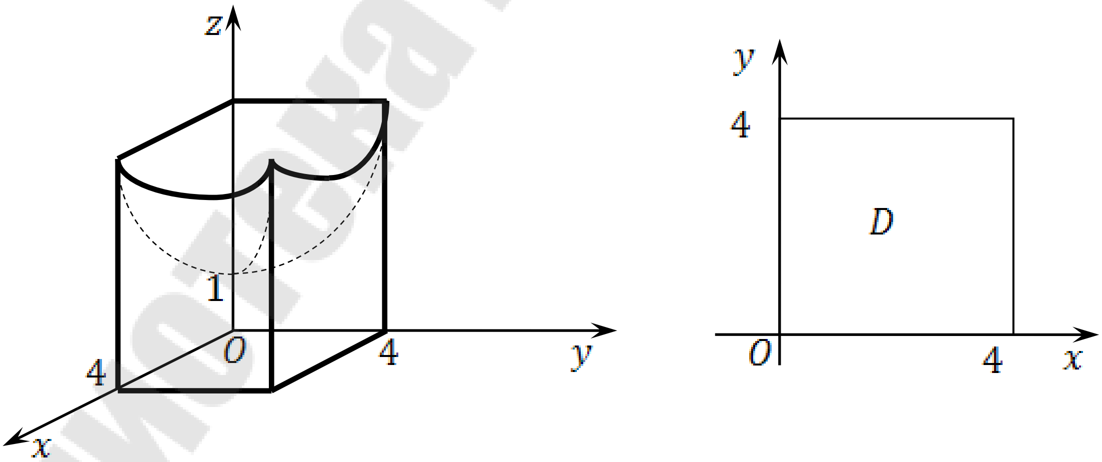


Рис.14

Искомый объем найдем по формуле (1.23)

$$V=\iint\limits_D\left(1+x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^4\left(1+x^2+y^2\right)dy=\int\limits_0^4 dx\left(y+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\int\limits_0^4\left(4+4x^2+\frac{64}{3}\right)dx=\int\limits_0^4\left(\frac{76}{3}+4x^2\right)dx=\left(\frac{76}{3}x+\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{76\cdot 4}{3}+\frac{4\cdot 64}{3}=\frac{560}{3}.$$

Ответ: $V=\dfrac{560}{3}ед^3$.

Вычисление площадей поверхности.

Пусть в области D_z плоскости xOy задана непрерывная функция $z=f(x,y)$, имеющая непрерывные частные производные. Функция $f(x,y)$ определяет гладкую поверхность Q_z, проекцией которой на плоскость xOy является область D_z. Площадь поверхности Q_z определяется формулой:

$$Q_z=\iint\limits_{D_z}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{1.25}$$

В случае, когда гладкая поверхность задается функциями $x=f(y,z)$ (в области D_x плоскости yOz) или $y=f(x,z)$ (в области D_y плоскости xOz), то ее площадь вычисляется по формулам, аналогичным (1.25):

$$Q_x=\iint\limits_{D_x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz. \tag{1.26}$$

$$Q_y=\iint\limits_{D_y}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz. \tag{1.27}$$

Пример 11. Вычислить площадь части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая расположена в первом октанте.

Решение: Изобразим заданную поверхность и ее проекцию D_z на плоскость xOy (рис.15).

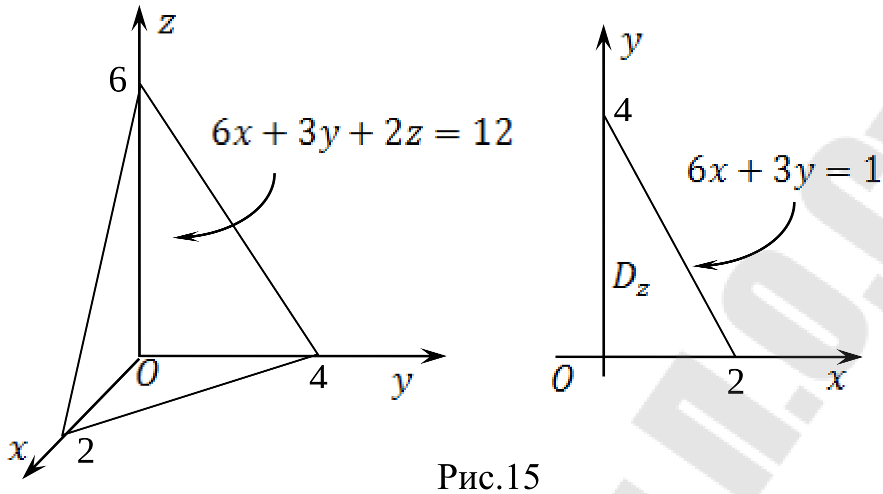


Рис.15

Выразим z из заданного уравнения плоскости:

$$z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y.$$

Вычислим $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x} = -3$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$.

По формуле (1.25) находим:

$$Q_z = \iint_D \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}}dxdy = \frac{7}{2}\iint_D dxdy = \frac{7}{2}\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy = \frac{7}{2}\int_0^2 dx y\Big|_0^{4-2x} =$$

$$= \frac{7}{2}\int_0^2 (4 - 2x)dx = 7\int_0^2 (2 - x)dx = 7\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 7(4 - 2) = 14$$

Ответ: $Q_z = 14 ед^2$.

Задания

Задание 1.9. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями:

29) $D: y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; x = 4$.

30) $D: y^2 = 10x + 25; y^2 = -6x + 9$.

31) $D: x^2 + y^2 = 4; y = 2x - x^2; (x \ge 0, y \ge 0)$.

32) $D: y = x^2 + 1; y = 3 - x$.

33) $D: y = \cos x; y \le x + 1; y \ge 0.$.

Задание 1.10. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

34) $D: x^2 + y^2 = 2ax;\ x^2 + y^2 = 2ay$.

35) $D: (x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$.

36) $\rho = 2; \rho = 2(1 - \cos\varphi)$, (вне кардиоиды).

37) $D: (x^2 + y^2)^3 = 16x^4$.

Задание 1.11. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

38) $2x + y - z = 0;\ x - 2y + 5 = 0;\ 2x + 3y - 18 = 0;\ z = 0$.

39) $x^2 + y^2 - z + 2 = 0; x^2 + y^2 = 1;\ z = 0$.

Задание 1.12. Найти площадь поверхности:

40) Плоскости $x + y + z = 6$, отсекаемой плоскостями $x = 0, y = 0, x = 3$.

41) Плоскости $x + y + z = 2a$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

42) Конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, расположенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

43) Части параболоида $2x = z^2 + y^2$, лежащего внутри цилиндра $z^2 + y^2 = 1$.

Ответы: **29.** $\frac{16}{3}$; **30.** $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; **31.** $\pi - \frac{4}{3}$; **32.** $\frac{9}{2}$; **33.** $\frac{3}{2}$;

34. $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$; **35.** 8; **36.** $8 - \pi$; **37.** 6π; **38.** $388\frac{5}{24}$; **39.** $\frac{5}{2}\pi$; **40.** $\frac{27}{2}\sqrt{3}$;
41. $\pi a^2\sqrt{3}$; **42.** π; **43.** $\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

1.4 Физические приложения двойного интеграла

Вычисление массы плоской фигуры.

Пусть D - область (пластинка) на плоскости xOy, на которой распределена масса с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$. Тогда масса пластинки m_D определяется формулой:

$$m_D = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy. \tag{1.28}$$

Пример 12. Найти массу пластинки, ограниченной линиями $xy = 9$, $xy = 16$, $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$, если в каждой точке поверхностная плотность пропорциональна среднему геометрическому ее координат.

Решение: Изобразим область D, ограниченную линиями на плоскости xOy (рис.16):По условию $\gamma(x, y) = \sqrt{xy}$, тогда, согласно (1.28) масса пластинки равна:

$$m = \iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменных
$$\begin{cases} yx = u \\ \dfrac{y^2}{x} = \upsilon \end{cases}$$

тогда область D плоскости xOy перейдет в область D' плоскости $uO\upsilon$. D' представляет собой прямоугольник $9 \le u \le 16; \quad 2 \le \upsilon \le 3$.

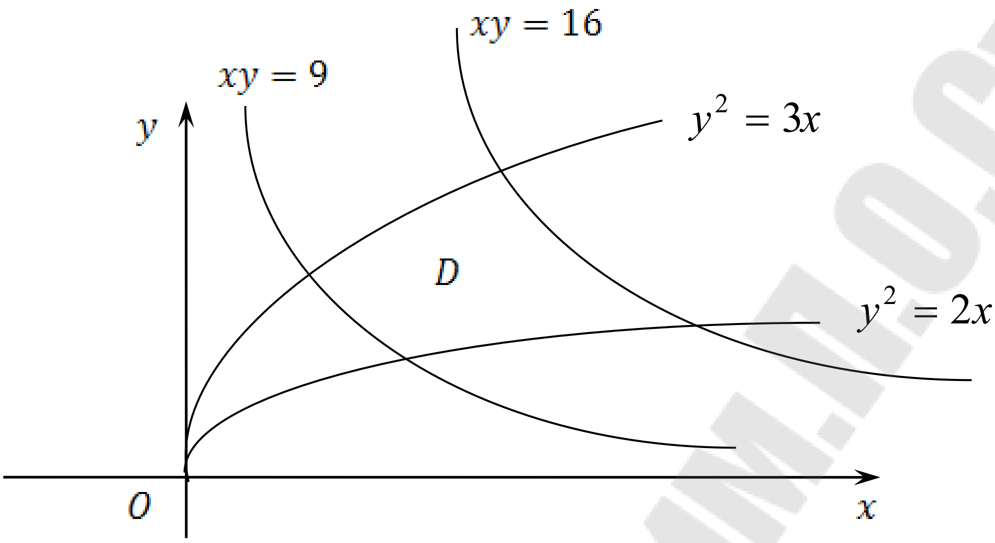


Рис. 16

Выразим x и y через u и υ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^{2/3}}{\upsilon^{1/3}} \\ y = u^{1/3}\upsilon^{1/3} \end{cases}.$$

Якобиан преобразования вычислим по формуле (1.12)

$$J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{u^{1/3}\upsilon^{1/3}} & -\dfrac{1}{3}\dfrac{u^{2/3}}{\upsilon^{4/3}} \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\upsilon^{1/3}}{u^{2/3}} & \dfrac{1}{3}\dfrac{u^{1/3}}{\upsilon^{2/3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{9}\frac{1}{u^{1/3}\upsilon^{1/3}}\frac{u^{1/3}}{\upsilon^{2/3}} + \frac{1}{9}\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{4/3}}\frac{\upsilon^{1/3}}{u^{2/3}} =$$

$$= \frac{2}{9}\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{9}\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{3\upsilon}.$$

Таким образом, с учетом формулы (1.13), получаем

$$m=\iint\limits_{D'}\sqrt{\frac{u^{2/3}}{\upsilon^{1/3}}\cdot u^{1/3}\cdot\upsilon^{1/3}}\,\frac{1}{3\upsilon}\,dud\upsilon=\frac{1}{3}\int\limits_{9}^{16}\sqrt{u}du\int\limits_{2}^{3}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=\frac{2}{9}u^{3/2}\Big|_{9}^{16}\cdot\ln\upsilon\Big|_{2}^{3}=$$

От

$$=\frac{2}{9}\left(16^{3/2}-9^{3/2}\right)\left(\ln 3-\ln 2\right)=\frac{2}{9}\cdot 37\cdot\ln\frac{3}{2}=\frac{74}{9}\ln\frac{3}{2}.$$

вет: масса пластинки $m=\dfrac{74}{9}\ln\dfrac{3}{2}$.

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоских фигур.

Статические моменты плоской фигуры с поверхностной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$ относительно осей координат определяются по формулам:

$$S_x=\iint\limits_{D} y\gamma(x,y)dxdy,$$

$$S_y=\iint\limits_{D} x\gamma(x,y)dxdy. \qquad (1.29)$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются формулами:

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\iint\limits_{D} x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy},$$

$$y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\iint\limits_{D} y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)dxdy}. \qquad (1.30)$$

Пример 13. Определить центр масс пластины, ограниченной кордеоидой $\rho=1+\cos\varphi$, считая плотность $\gamma(x,y)=1$.

Решение: Вычислим массу пластинки по формуле (1.28). Пластина, ограниченная заданной кривой изображена на рисунке 17.

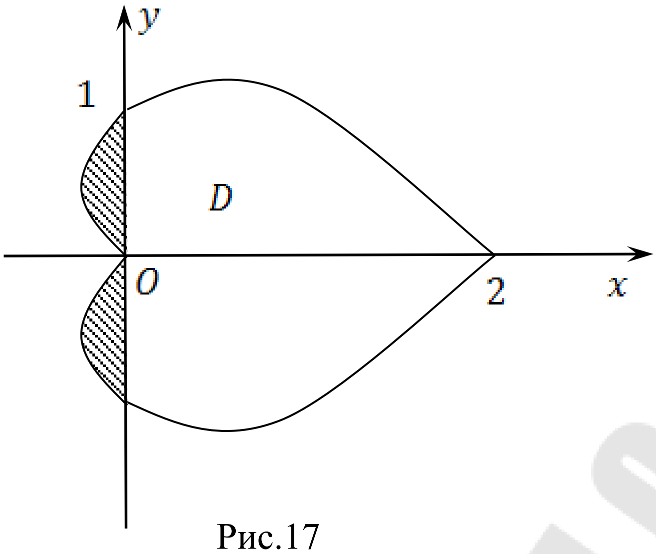


Рис.17

Полюс $O(0{,}0)$ лежит на границе области, область симметрична относительно оси Oy, поэтому, согласно (1.18), двойной интеграл по области D' преобразуется к повторному следующим образом:

$$m = \gamma\iint\limits_{D'} \rho d\rho d\varphi = 2\gamma\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{1+\cos\varphi} \rho d\rho = \gamma\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \gamma\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi = \gamma\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \gamma\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \gamma\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi\gamma\,\frac{3}{2}.$$

Вычислим статические моменты пластинки по формулам (1.29):

$$S_x = \iint\limits_D y\gamma dxdy = \gamma\iint\limits_{D'} \rho\sin\varphi\rho d\rho d\varphi = \gamma\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{1+\cos\varphi}\rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\gamma\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{3}\gamma\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3 d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{12}\gamma(1+\cos\varphi)^4\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

$$S_y = \iint\limits_D x\gamma dxdy = \gamma\iint\limits_{D'} \rho\cos\varphi\,\rho d\rho d\varphi = \gamma\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{1+\cos\varphi}\rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{\gamma}{3}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$=\frac{\gamma}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+3cos^2\varphi+3cos^3\varphi+cos^4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi+\frac{3}{2}(1+\cos2\varphi)+3(1-sin^2\varphi)\cos\varphi+\frac{1}{4}(1+\cos2\varphi)^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\left[\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi+3\int_0^{2\pi}(1-sin^2\varphi)d(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+2\cos2\varphi+cos^2\varphi)d\varphi\right]=\frac{\gamma}{3}\left[\sin\varphi|_0^{2\pi}+\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}+\right.$$

$$\left.+3\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}sin^3\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}+\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos4\varphi)d\varphi\right]=$$

$$=\frac{\gamma}{3}\left[3\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}\right]=\frac{\gamma}{3}\left(3\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi\gamma}{4}.$$

Координаты центра тяжести вычислим по формулам (1.30)

$$x_C=\frac{S_y}{m}=\frac{5\pi\gamma}{4}:\frac{3\pi\gamma}{2}=\frac{5}{6};\ y_C=\frac{S_x}{m}=0.$$

Ответ: центр масс кардиоиды находится в точке $\left(\frac{5}{6};0\right)$.

Вычисление моментов инерции материальной пластинки.

Моменты инерции относительно начала координат, осей Ox и Oy материальной пластинки D, с непрерывно распределенной поверхностной плотностью $\gamma(x,y)$ определяются по следующим формулам:

$$I_0=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dxdy,$$

$$I_x=\iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy\,, \qquad (1.31)$$

$$I_y = \iint_D x^2 \gamma(x,y)dxdy.$$

Пример 14. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и координатных осей пластинки, плотностью $\gamma(x,y) = x^2 y$, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1$.

Решение: Изобразим область D:

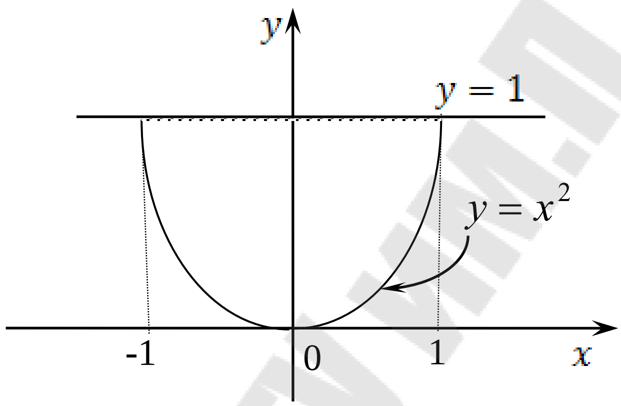


Рис. 18

Момент инерции найдем по формуле (1.31)

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)x^2 ydxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \left(x^4 y + x^2 y^3\right)dy =$$

$$= 2\int_0^1 dx\left(\frac{x^4 y^2}{2} + \frac{x^2 y^4}{4}\right)\Bigg|_{x^2}^1 = 2\int_0^1 dx\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{10}}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^9}{18} - \frac{x^{11}}{44}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{44}\right) = \frac{104}{495}.$$

$$I_x=\iint\limits_D y^2x^2y\,dxdy=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^1 x^2y^3dy=2\int\limits_0^1 dx\frac{x^2y^4}{4}\Bigg|_{x^2}^1=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^2-x^{10}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^{11}}{11}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{33}.$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2x^2y\,dxdy=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^1 x^4y\,dy=2\int\limits_0^1 dx\frac{x^4y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^1=\int\limits_0^1\left(x^4-x^8\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^9}{9}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}.$$

Ответ: $I_0=\frac{104}{495}$; $I_x=\frac{4}{33}$; $I_y=\frac{4}{45}$.

Задания

Задание 1.13. Вычислить массу плоской фигуры D, поверхностная плотность которой равна γ:

44) $D: x+y=1; x+y=2; 2x-y=0; 4x-y=0; \gamma(x,y)=1$.

45) $D: x^2+y^2\geq 9; x^2+y^2\leq 16; x\geq 0; y\leq 0; \gamma=xy$.

46) Вычислить массу пластинки, ограниченной лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$, если поверхностная плотность пластинки в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

Задание 1.14. Найти координаты центра тяжести однородных пластин, ограниченных линиями:

47) $x-y=0; x+y-4=0; x-2y-4=0$.

48) $y^2=4x+4; y^2=-2x+4$.

Ответы: **44.** $\frac{1}{5}$; **45.** $\frac{175}{8}$; **46.** 2π; **47.** $C\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$; **48.** $C\left(\frac{2}{5};0\right)$;

2. Тройной интеграл

2.1 Тройной интеграл и его вычисление прямоугольных координатах.

Пусть функция $u = f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой области $V \in R^3$, ограниченной некоторой кусочно-гладкой поверхностью S. С помощью произвольных гладких поверхностей разобьем область V на n элементарных ячеек V_i. Объем каждой ячейки обозначим через ΔV_i, диаметр - через d_i. Внутри каждой ячейки V_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и построим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ . \qquad (2.1)$$

Построенная сумма называется n-ой интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ в области V.

Определение: Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V называется предел интегральных сумм (2.1) при $d \to 0$, где $d = \max\{d_1, d_2, ..., d_n\}$

Таким образом, согласно определению

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ . \qquad (2.2)$$

Свойства тройного интеграла полностью аналогичны свойствам двойного интеграла. (см. 1.1)

Геометрический смысл тройного интеграла

Тройной интеграл по трехмерной области V от $f(x,y,z) = 1$ равен объему области V.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \qquad (2.3)$$

- Если $\gamma(x,y,z)$ считать объемной плотностью вещества, распределенного в области V, то тройной интеграл (2.2) численно равен массе всего вещества, заключенного в объеме V:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz \ . \tag{2.4}$$

- Статические моменты тела относительно координатных плоскостей равны:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz; \quad S_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz;$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dxdydz. \tag{2.5}$$

- Координаты центра масс тела:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz},$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz}, \tag{2.6}$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)dxdydz}.$$

- Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x,y,z)dxdydz; \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x,y,z)dxdydz;$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x,y,z)dxdydz; \tag{2.7}$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}; \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}; \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}; \tag{2.8}$$

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}. \tag{2.9}$$

Вычисление тройных интегралов.

Пусть область V ограничена сверху и снизу однозначными и непрерывными поверхностями $z = z_2(x,y)$ и $z = z_1(x,y)$, а с боков цилиндрической поверхностью, параллельной оси Oz. Она обладает следующими свойствами:

- Всякая прямая, проведенная через внутреннюю точку области V параллельно оси Oz пересекает границу области ровно два раза.
- Вся область V проецируется на плоскость xOy в двумерную область D.

Аналогичным образом определяется область, правильная в направлении Ox *и* Oy. Область, правильная в направлениях Ox, Oy, Oz одновременно, называется правильной областью. Если область является правильной в направлении Oz (ограниченной сверху и снизу функциями $z_2(x,y)$ и $z_1(x,y)$) и проектируется в область D_{xy} плоскости xOy (рис.19), то тройной интеграл по области V вычисляется следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.10}$$

Если область D ограничена сверху и снизу кривыми $y = y_2(x)$ и $y = y_1(x)$, а справа и слева прямыми $x = a$ *и* $x = b$, то тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V вычисляется следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{2.11}$$

Интеграл стоящий в правой части (2.11) называется трехкратным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V.

Если область V не является правильной ни в одном из направлений, то проведя плоскости, параллельные координатным плоскостям, ее разбивают на конечное число правильных областей.

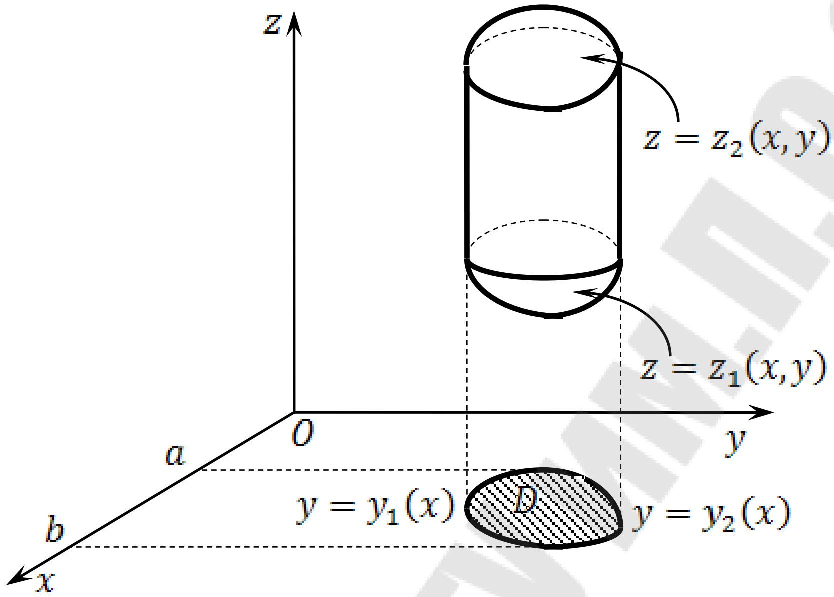


Рис. 19

Таким образом, для вычисления тройного интеграла от функции $f(x, y, z)$ по области V следует:

- Изобразить область интегрирования. Определить, является ли она правильной. Если область не является правильной, разбить ее на конечное число правильных областей. Найти явные выражения для границ области.
- Построить проекцию области на соответствующую координатную плоскость (построить двумерную проекцию D). Определить границы области D.
- Записать тройной интеграл либо в виде (2.10), либо в виде (2.11). Вычислить внутренний интеграл. Например, в случае области, правильной в направлении Oz вычисляется внутренний интеграл по переменной z при фиксированных, но произволь-

ных в области D_{xy} x и y. В результате получается некоторая функция $f_1(x,y)$.

- Вычисляем получившийся двойной интеграл по правилам, изложенным ранее.

Пример 15. Вычислить трехкратный интеграл

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(4x+3y+z-2)^6}.$$

Решение: Вычисляем внутренний интеграл по z

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(4x+3y+z-2)^6}=\int_0^{1-x-y}\frac{d(4x+3y+z-2)}{(4x+3y+z-2)^6}=$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{1}{(4x+3y+z-2)^5}\Bigg|_0^{1-x-y}=-\frac{1}{5}\Bigg(\frac{1}{(4x+3y+1-x-y-2)^5}-$$

$$-\frac{1}{(4x+3y-2)^5}\Bigg)=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(3x+2y-1)^5}-\frac{1}{(4x+3y-2)^5}\right).$$

Найденную функцию $f_1(x,y)$ подставим в заданный трехкратный интеграл:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{5}\right)\left[\frac{1}{(3x+2y-1)^5}-\frac{1}{(4x+3y-2)^5}\right]dy=$$

$$=-\frac{1}{5}\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(3x+2y-1)^4}\Bigg|_0^{1-x}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(4x+3y-2)^4}\Bigg|_0^{1-x}\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{(3x+2(1-x)-1)^4}-\frac{1}{(3x-1)^4}\right)dx-$$

$$-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{(4x+3(1-x)-2)^4}-\frac{1}{(4x-2)^4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{(3x-1)^4}\right)dx-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{(4x-2)^4}\right)dx\right]=$$

$$= \frac{1}{20}\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{(3x-1)^4} + \frac{1}{3}\frac{1}{(4x-2)^4}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{20}\left[\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(x+1)^3}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(3x-1)^3}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(4x-2)^3}\Big|_0^1\right] =$$

$$= -\frac{1}{60}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8}\right] = -\frac{1}{144}$$

Пример 16. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями:

$y = x, \quad y = 0, x = 1, \quad z = 1, \quad z = 1 + x^2 + y^2$.

Решение: Построим заданную область и ее проекцию D на плоскость xOy (рис.20), учитывая, что $y = x$ - плоскость пересекающая плоскость xOy по прямой $y = x$, параллельная оси Oz.

$y = 0$ - плоскость xOz

$x = 1$ - плоскость, параллельная yOz , xOy проходящая через $x = 1$

$z = 1$ - плоскость, параллельная xOy, проходящая через $z = 1$

$z = 1 + x^2 + y^2$ - параболоид с вершиной в т. $(0;0;1)$.

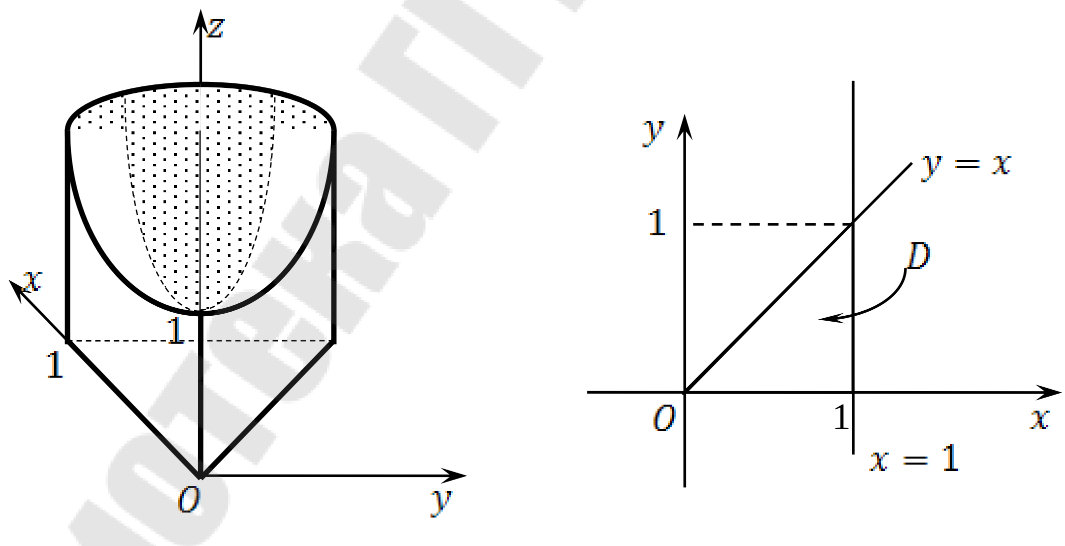


Рис. 20

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_1^{1+x^2+y^2} f(x,y,z)dz =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_1^{1+x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$$

<u>Пример 17.</u> Найти объем области, ограниченной указанными поверхностями:

V: $2z = y^2$, $3x + 2y = 12$, $x = 0$, $z = 0$.

<u>Решение:</u> Построим заданную область V, учитывая, что

$2z = y^2$ - параболический цилиндр (желоб), «надетый» на ось Ox,

$3x + 2y = 12$ - плоскость, параллельная оси Oz, $x = 0$ - плоскость yOz

$z = 0$ - плоскость xOy. Таким образом: (рис.21)

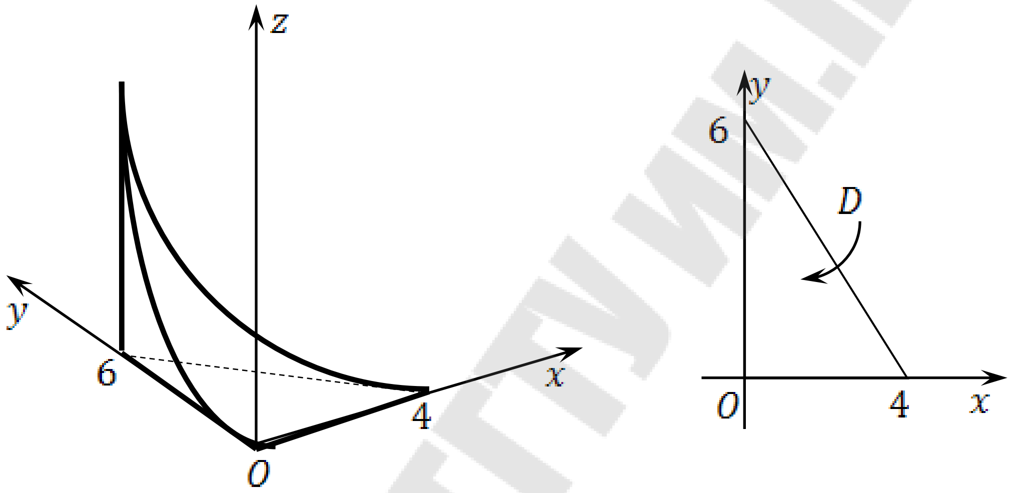


Рис. 21

Согласно (2.3) искомый объем равен:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy\int_0^{y^2/2} dz = \iint\limits_D dxdyz\Big|_0^{y^2/2} = \frac{1}{2}\iint\limits_D y^2dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 dx\int_0^{6-\frac{3}{2}x} y^2dy = \frac{1}{2}\int_0^4 dx\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^{6-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{6}\int_0^4\left(6-\frac{3}{2}x\right)^3dx =$$

$$\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{4}\left(6-\frac{3}{2}x\right)^4\Big|_0^4 = -\frac{1}{36}\left[(6-6)^4-6^4\right] = 36\ ед^3.$$

<u>Пример 18.</u> Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение: Для решения задачи воспользуемся формулами (2.6)

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m},$$

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)dxdydz, S_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)dxdydz, S_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

По условию задачи $\gamma(x,y,z) = \gamma$.

Построим область V и ее проекцию на плоскость xOy - область D (рис.22).

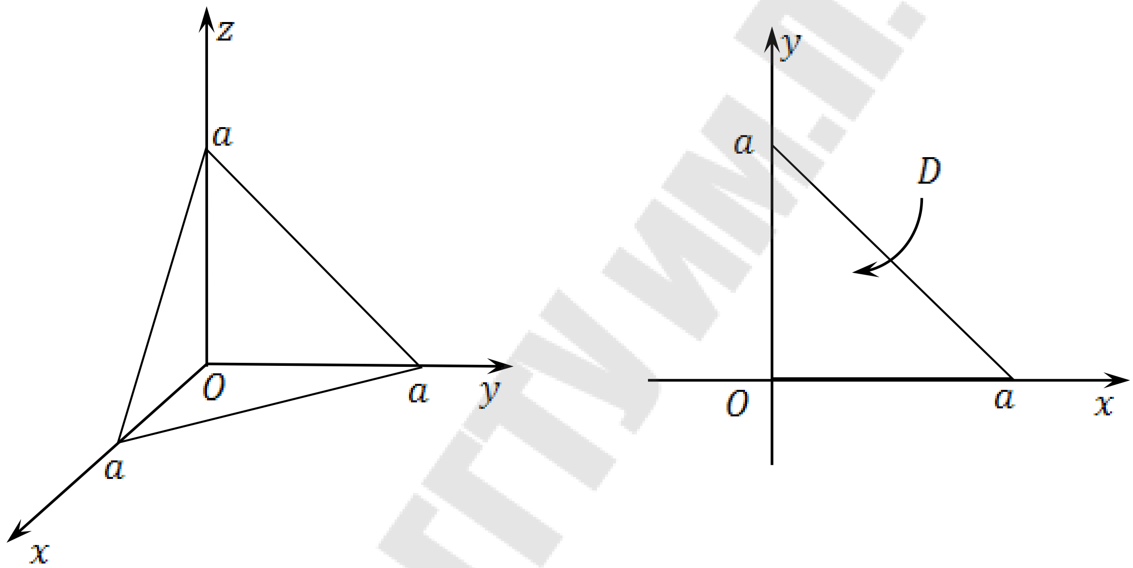


Рис. 22

В силу симметрии области $S_{xy} = S_{xz} = S_{yz}$

$$m = \iiint\limits_V \gamma dxdydz = \gamma \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} dz = \gamma \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} (a - x - y)dy =$$

$$= \gamma \int\limits_0^a dx \left[(a - x)y - \frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_0^{a-x} = \gamma \int\limits_0^a \left[(a - x)^2 - \frac{(a - x)^2}{2} \right] dx =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int\limits_0^a (a - x)^2 dx = -\frac{\gamma}{2} \frac{(a - x)^3}{3} \Bigg|_0^a = \frac{\gamma a^3}{6}.$$

$$S_{yz}=\iiint\limits_V x\gamma\,dxdydz=\gamma\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{a-x}dy\int\limits_0^{a-x-y}dz=\gamma\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{a-x}(a-x-y)dy=$$

$$=\gamma\int\limits_0^a\frac{x(a-x)^2}{2}dx=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^a\left(xa^2-2ax^2+x^3\right)dx=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{2ax^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{a^4}{2}-\frac{2a^4}{3}+\frac{a^4}{4}\right)=\frac{\gamma\,a^4}{24}.$$

Таким образом $x_c=\dfrac{\gamma a^4}{24}\Big/\dfrac{\gamma a^3}{6}=\dfrac{a}{4};\quad x_c=y_c=z_c.$

Ответ: координаты центра масс тела $\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$.

Задания

<u>*Задание 2.1.*</u> Изобразить область V и расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями:

49) $V:-1\le x\le 1;0\le y\le 1;0\le z\le 2$.

50) $V:x+y+z=1x=0;y=0;z=0$.

51) $V:z=2-x^2\,x+y=1;x=0;y=0;z=0$.

52) $V:z=\sqrt{1-x^2-y^2};z=0;y=x;y=2x$.

<u>*Задание 2.2.*</u> Вычислить следующие тройные интегралы:

53) $\iiint\limits_V(2x+3y+z+1)dxdydz$, где (V) куб $0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1;\ 0\le z\le 1$.

54) $\iiint\limits_V(x+y+z+1)dxdydz$, где (V) - призма, ограниченная плоскостями $x+y=a,\quad z=0,\quad z=c,\quad x=0,\quad y=0.$

55) $\iiint\limits_V\dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где (V) - треугольная пирамида, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$.

56) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где (V)- ограничена поверхностями: $z = xy$, $z = 0$, $y = x^2$ и $x = y^2$.

Задание 2.3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:
57)$x + y = 2;\ y = 3;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0.$
58) $y^2 = 4x + 4;\ y^2 = -2x + 4; z = 3;\ z = 0.$

59) $6x + 4y + 3z = 12;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0.$

60) $z = 1 - y^2;\ z = \sqrt{1 - y^2};\ \ x = 0;\ x = 6.$

Задание 2.4. Найти координаты центра масс тела, ограниченного указанными поверхностями, при заданной плотности $\gamma(x, y, z)$.
61) $2x + 3y - 12 = 0;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ z = \frac{1}{2}y^2;\ \gamma(x, y, z) = 1.$

Ответы: **53.** 4;54.$\frac{ca^2}{12}(6 + 4a + 3c)$; **55.** $\frac{1}{2}\left(ln2 - \frac{5}{8}\right)$; **56.** $\frac{1}{96}$; **57.**4; **.** 6;

59. 24; **60.** $8 + 3\pi$; **61.**$C\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5};\frac{8}{5}\right)$.

2.2 Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ прямоугольные координаты x,y,z преобразуются к новым координатам u,υ,w, связанным с x,y,z соотношениями:

$$x = x(u;\upsilon;w);\quad y = y(u;\upsilon;w);\quad z = z(u;\upsilon;w); \tag{2.11}$$

При этом область V пространства $Oxyz$ отображается на область V' пространства $O'u\upsilon w$.

Если функции (2.11) имеют в V' непрерывные частные производные и якобиан преобразования

$$J(u,\upsilon,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \upsilon} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix} \qquad (2.12)$$

не обращается в ноль, то отображение V на V' взаимно-однозначно. Справедлива следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f\left(x(u,\upsilon,w),y(u,\upsilon,w),z(u,\upsilon,w)\right)\times$$
$$\times\left|J(u,\upsilon,w)\right|dud\upsilon dw. \qquad (2.13)$$

В практических расчетах наиболее частым является переход к цилиндрическим и сферическим координатам.

Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах положение точки $M(x_0,y_0,z_0)$ в пространстве определяется следующими тремя величинами (рис. 23).

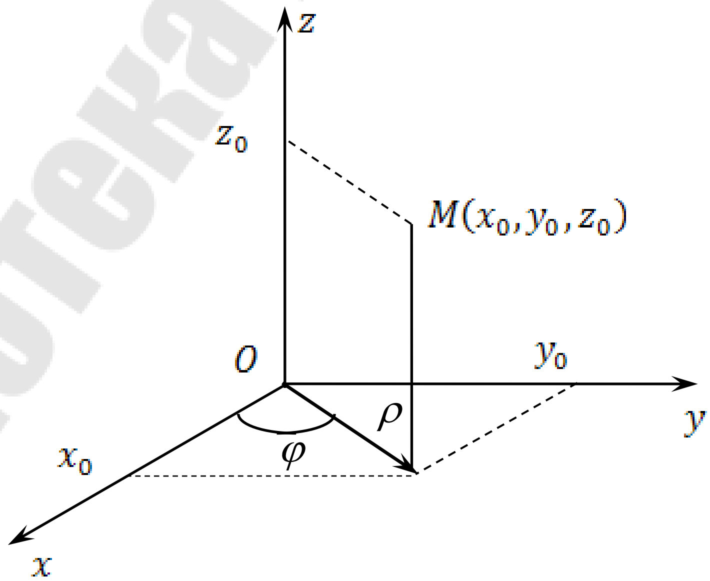


Рис. 23

- ρ - модулем радиус-вектора ρ проекции точки M на выбранную плоскость $\rho \geq 0$
- углом φ между радиус-вектором проекции точки М на плоскость и выбранным на ней направлением полярной оси Ox $0 \leq \varphi < 2\pi$
- расстоянием z от точки М до выбранной плоскости $-\infty < z < +\infty$.

Если в качестве плоскости выбрать плоскость xOy, а в качестве полярной оси Ox, то согласно рисунку 23, цилиндрические и декартовы координаты связаны следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (2.14)$$

Якобиан преобразования, вычисленный по формуле (2.12) равен $J(\rho,\varphi,z) = \rho$, поэтому переход к цилиндрическим координатам осуществляется, согласно (2.13) по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (2.15)$$

Следует отметить, что переход к цилиндрическим координатам целесообразен в случае, когда область V проецируется на одну из координатных плоскостей в виде круга или его части.

Пример 19. Вычислить тройной интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам

$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz;$ (V) ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, плоскостями $z = 0, \quad z = c$.

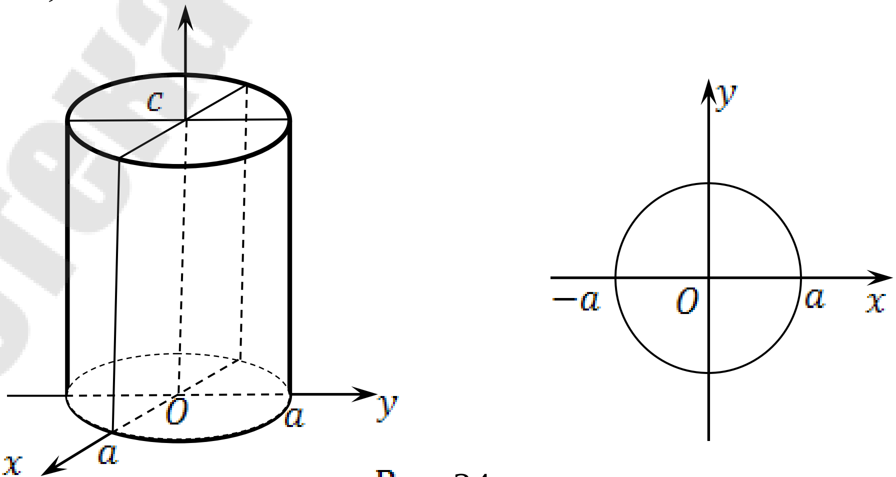


Рис. 24

<u>Решение:</u> Проекцией области V на плоскость xOy будет круг $x^2 + y^2 = a^2$, сверху и снизу область V ограничена плоскостями

$z = 0, \quad z = c$ (рис. 24). Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам (2.14) и (2.15).

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = \iiint\limits_{V'} \left(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2\right) \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho \int\limits_0^c \left(\rho^2 + z^2\right) dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho \left(\rho^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^c =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\rho^3 c + \rho \frac{c^3}{3}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} c + \frac{\rho^2}{6} c^3\right)\Bigg|_0^a = \left(\frac{a^4 c}{4} + \frac{a^2 c^3}{6}\right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2 c\left(3a^2 + 2c^2\right)}{12} \varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2 c}{6}\left(3a^2 + 2c^2\right)\pi.$$

Ответ: $\dfrac{a^2 c}{6}\left(3a^2 + 2c^2\right)\pi.$

Сферические координаты.

Сферическими координатами точки $M(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве являются следующие 3 величины (рис. 25).

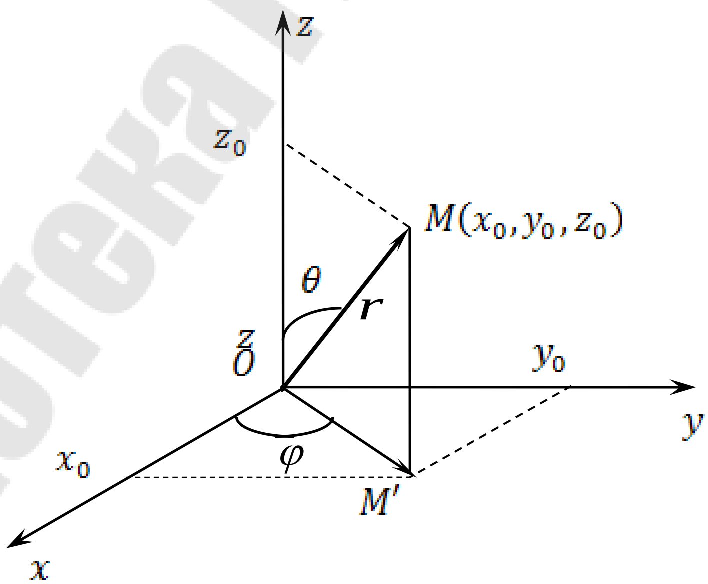


Рис. 25

- Длина r радиус-вектора $\vec{OM}$, где O - выбранное начало координат, $z \geq 0$.

- Угол φ между проекцией радиус-вектора $\vec{OM}$ на выбранную плоскость, содержащую начало координат, и выбранным на этой плоскости направлением полярной оси $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

- Угол θ между радиус-вектором $\vec{OM}$ и положительным направлением прямой, перпендикулярной выбранной плоскости и проходящей через 0. $0 \leq \theta \leq \pi$.

Если в качестве заданной плоскости выбрать плоскость xOy, в качестве полярной оси выбрать ось Ox, а положительным направлением прямой считать направление оси Oz, то декартовы координаты точки М связаны со сферическими соотношениями:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta; \quad y = r\sin\varphi\sin\theta; \quad z = r\cos\theta. \tag{2.16}$$

Вычисляя якобиан преобразования по формуле (2.12), находим $|J(r,\varphi,\theta)| = r^2 \sin\theta$. Таким образом, при переходе к сферическим координатам, формула (2.13) принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2 \times$$
$$\times \sin\theta dr d\varphi d\theta. \tag{2.17}$$

Переход к сферическим координатам удобен, если или уравнение границы области, или подинтегральная функция, или и то и другое одновременно содержат выражение $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^k$, которое в сферических координатах принимает вид $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^k = r^{2k}$.

Если уравнение границы области или подинтегральная функция, или и то и другое одновременно содержат выражение вида $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^k$, то целесообразно переходить к **обобщенным сферическим координатам** (эллиптическим) по следующим формулам:

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta; \quad y = br\sin\varphi\sin\theta; \quad z = cr\cos\theta. \tag{2.18}$$

$$r \geq 0;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi;\ 0 \leq \theta \leq \pi;\ a,b,c > 0$$

Модуль якобиана такого преобразования равен:
$|J(r,\varphi,\theta)| = abcr^2 \sin\theta$ и формула (2.13) принимает вид:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = abc\iiint\limits_{V'} f(ar\cos\varphi\sin\theta, br\sin\varphi\sin\theta, cr\cos\theta)r^2 \times$$
$$\times\sin\theta drd\varphi d\theta. \qquad (2.19.)$$

Пример 20. Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл
$\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}dxdydz$; (V)- верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Решение: Перейдем к сферическим координатам по формулам (2.16). По условию задачи $0\le r\le R$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ (верхняя половина шара $z\ge 0$) (рис. 26). Тогда, согласно (2.17

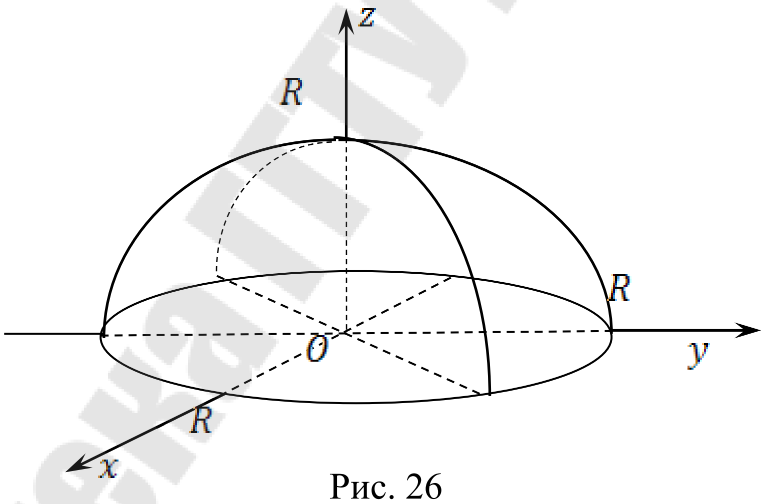


Рис. 26

$$\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}dxdydz = \iiint\limits_{V'} r^3r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^5 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2}\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^6}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi R^6}{3}$.

Пример 21. Вычислить объем пространственной области V, если

$$V:\left\{\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}\right)^2=xyz\right\}$$

Решение. Объем пространственной области V равен, согласно (2.3)

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам (2.18)

$$x=\sqrt{3}r\cos\varphi\sin\theta;\quad y=2r\sin\varphi\sin\theta;\quad z=\sqrt{5}r\cos\theta.$$

$$\left|J(r,\varphi,\theta)\right|=2\sqrt{15}r^2\sin\theta.$$

Область V отобразится в область V', ограниченную:

$$r^4=2\sqrt{15}r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\cos\theta \text{ или}$$

$$r=2\sqrt{15}\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\cos\theta.$$

Из условия $r\geq 0$, получаем следующие разрешенные области для θ и φ

$$\begin{cases}0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ \pi<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\\ \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\\ \dfrac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi\end{cases};$$

Очевидно, что объем всей области $V'=4V_1$, где V_1' - объем области V_1:

$$0\leq r\leq\sqrt{15}\sin 2\varphi\sin^2\theta\cos\theta,$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2},$$

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\sqrt{15}\sin 2\varphi \sin^2\theta\cos\theta} 2\sqrt{15} r^2 dr =$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta\, r^3 \Big|_0^{\sqrt{15}\sin 2\varphi \sin^2\theta\cos\theta} =$$

$$\frac{8\cdot 225}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^3\theta d\theta;$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\, d(\cos 2\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2 2\varphi - 1\right) d(\cos 2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3 2\varphi}{3} - \cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3\pi}{3} - \cos\pi - \frac{\cos^3 0}{3} + \cos 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}.$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^3\theta d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^2\theta d(\sin\theta) = \{\sin\theta = t\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(1 - t^2\right) t^7 dt = \int\limits_0^1 \left(t^7 - t^9\right) dt = \left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}.$$

Таким образом, искомый объем V равен:

$$V = \frac{8\cdot 225}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{40} = 10\,(ед)^3$$

Задания

Задание 2.5. Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам.

62) $\iiint\limits_V (5x - 3z)dxdydz$, где (V) ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 4,\ 2x - 3y + z = 0$.

63) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, где (V) ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y = 0,\ z = 0,\ z = 3$.

64) $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где (V) ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 4y$ и плоскостями $y + z = 4,\ z = 0\ (z \ge 0)$.

65) $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, где (V) ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$; параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$.

Задание 2.6. Вычислить тройной интеграл, переходя к сферическим координатам.

66) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, (V) ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$.

67) $\iiint\limits_V xyzdxdydz,$ (V) ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и координатными плоскостями.

68) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ где (V) -часть шара $x^2+y^2+z^2=4$, расположенная в первом октанте .

69) $\iiint\limits_V \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,где$(V)$: $1\le x^2+y^2+z^2\le 9, y\ge 0, z\ge 0, y\le \frac{1}{\sqrt{3}}x$

Задание 2.7. Переходя к цилиндрическим или сферическим координатам, вычислить объемы заданных областей:

70) $V: x^2+y^2=Rx;\ x^2+y^2+z^2=R^2;\ z=0.$

71) $V: 2-z-x^2-y^2=0;\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

72) V - область, полученная удалением из шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$, конуса $3(x^2+y^2)\le z^2$.

73)V: $z\ge o, x^2+y^2=4, z=x^2+y^2$

74)V: $y\ge 0, z\ge 0, z=x, x=\sqrt{9-y^2}, x=\sqrt{25-y^2}$.

Ответы: **62.** $-\frac{133}{8}\pi$; **63.** 8; **64.** $\frac{64}{3}$; **65.** $\frac{\pi}{32}$; **66.** πR^4; **67.** $\frac{1}{48}$; **68.** $\frac{16\pi}{5}$; **69.** $\frac{13\pi}{8}$; **70.** $\frac{R^3}{9}(3\pi-4)$; **71.** $\frac{5}{6}\pi$; **72.** $\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; **73.** 8π; **74.** $\frac{98}{3}$.

II. Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Криволинейные интегралы

1.1 Криволинейный интеграл первого рода.

Пусть на плоскости xOy расположена некоторая гладкая или кусочно-гладкая кривая L_{AB}. Пусть на этой кривой определена и ограничена некоторая функция $z = f(x, y)$. Разобьем кривую L_{AB} произвольным образом на n частей l_i, длиной Δl_i. На каждой дуге l_i произвольным образом выберем точку $M_i(x_i; y_i)$.

Построим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i \,. \qquad (1.1)$$

Сумма (1.1) называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по дуге L_{AB}.

Определение. Криволинейным интегралом I-го рода от функции $f(x, y)$ по кривой L_{AB} называется предел интегральной суммы (1.1) при $\Delta l_i \to 0$ (или $n \to \infty$).

Таким образом, согласно определению:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i \,. \qquad (1.2)$$

где L_{AB} - путь интегрирования; dl - дифференциал дуги. Если кривая L_{AB} замкнута, то используется символ $\oint$ - «интеграл по замкнутому контуру».

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

- Если кривая L состоит из двух линий L_1 и L_2, то

$$\int_{L} f(x, y)dl = \int_{L_1} f(x, y)dl + \int_{L_2} f(x, y)dl \,. \qquad (1.3)$$

- При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего значения

$$\int_{L_{AB}} f(x, y)dl = \int_{L_{BA}} f(x, y)dl \,. \qquad (1.4)$$

- Криволинейный интеграл первого рода от суммы функций равен сумме криволинейных интегралов первого рода от слагаемых:

$$\int_{L_{AB}} \left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right)dl = \int_{L_{AB}} f_1(x,y)dl + \int_{L_{AB}} f_2(x,y)dl. \qquad (1.5)$$

- Константу можно выносить за знак интеграла

$$\int_{L_{AB}} cf(x,y)dl = c\int_{L_{AB}} f(x,y)dl. \qquad (1.6)$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению соответствующих определенных интегралов по следующим правилам:

- Если кривая L_{AB} задана явным уравнением $y = y(x), \quad (a \le x \le b)$, тогда $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\ . \qquad (1.7)$$

- Если кривая L_{AB} задана параметрически: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad (\alpha \le t \le \beta)$, тогда

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (1.8)$$

- Если кривая L_{AB} задана уравнением в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi); \quad (\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2)$, тогда

$$dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$$

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho(\varphi)\cos\varphi;\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \quad (1.9)$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \sqrt{1+x^6}\,dl$, где L - дуга линии $4y = x^4$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1/4)$.

<u>Решение:</u> По условию задачи кривая L задана явным уравнением

$y = \dfrac{x^4}{4}, \quad (0 \le x \le 1).$

Найдем dl согласно (1.7)

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx = \sqrt{1 + (x^3)^2}\,dx = \sqrt{1 + x^6}\,dx.$$

Тогда, по формуле (1.7)

$$\int_{L_{AB}} \sqrt{1 + x^6}\,dl = \int_0^1 \sqrt{1 + x^6} \cdot \sqrt{1 + x^6}\,dx = \int_0^1 (1 + x^6)dx = \left(x + \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{7}$$

Ответ: $\dfrac{8}{7}$.

Пример 2. Вычислить $\int_L \sqrt{2y}dl$, если L - первая арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad a > 0.$$

Решение: Кривая L задана параметрическими уравнениями (рис. 27), поэтому воспользуемся формулой (1.8): $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$

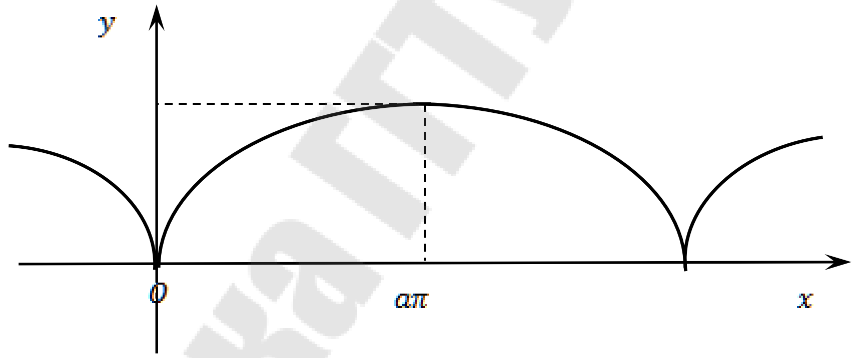


Рис. 27

$x'_t = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t),\ y'_t = (a(1 - \cos t))' = a \sin t,$

$dl = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}dt = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}dt =$

$= a\sqrt{2 - 2\cos t}dt = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}dt.$

По условию $0 \le t \le 2\pi$.

Таким образом, согласно (1.8) имеем:

$$\int\limits_L \sqrt{2y}dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)dt = 2a\sqrt{a}(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi a\sqrt{a}.$$

Ответ: $4\pi a\sqrt{a}$.

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl;$ L - верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение: Дуга L задана уравнением в полярных координатах, причем $0 \le \varphi \le \pi$ (условие - верхняя половина кардиоиды) (рис. 28).

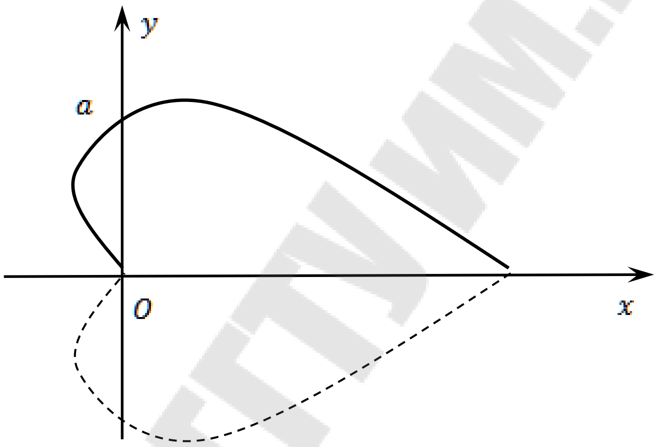


Рис. 28

Воспользуемся формулой (1.9): $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi$; $\rho' = -a\sin\varphi$,

$$dl = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi d\varphi} = a\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi dl} =$$

$$= a\sqrt{2+2\cos\varphi d\varphi} = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi d\varphi}.$$

Запишем подинтегральную функцию в полярных координатах:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{\rho^2} = \rho = a(1+\cos\varphi).$$

Таким образом,

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^{3/2}d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \sin\frac{\varphi}{2} = t, t_B = 1, t_H = 0 \\ \cos^2\frac{\varphi}{2} = 1-\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-t^2 \end{array}\right\} = 8a^2\int_0^1(1-t^2)dt = 8a^2\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{3}a^2.$$

Ответ: $\frac{16}{3}a^2$.

Следует отметить, что для более рационального вычисления интеграла часто бывает удобно, а порой и необходимо, перейти от одной формы задания кривой к другой, например, от явного вида уравнения кривой к параметрическому или уравнению в полярных координатах.

<u>Пример 4</u>. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \left(x^2+y^2\right)^{3/2}dl;$ L - дуга лемнискаты

$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy \quad (x \ge 0, y \ge 0).$

<u>Решение.</u> Запишем уравнение дуги L в полярных координатах

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$

$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2a^2\rho\cos\varphi\rho\sin\varphi,$

$\left(\rho^2\right)^2 = 2a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi, \ \ \rho^2 = a^2\sin 2\varphi.$

Таким образом, уравнение лемнискаты (рис. 29) в полярных координатах имеет вид: $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$. Из условия $x \ge 0, \quad y \ge 0$ следует, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Воспользуемся формулами (1.9)

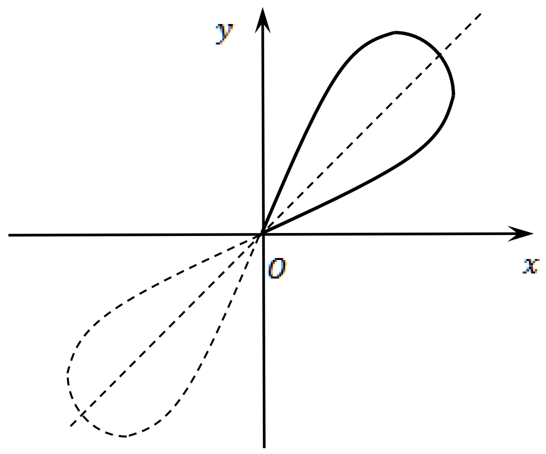


Рис. 29

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi,$$

$$\rho'=\frac{1}{2}a(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2=\frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},$$

$$dl=\sqrt{a^2\sin 2\varphi+\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi=a\sqrt{\frac{\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Подинтегральная функция примет вид:

$$\left(x^2+y^2\right)^{3/2}=\left(\rho^2\right)^{3/2}=\rho^3=a^3(\sin 2\varphi)^{3/2}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dl=\int\limits_0^{\pi/2}a^3(\sin 2\varphi)^{3/2}\frac{a\,d\varphi}{(\sin 2\varphi)^{1/2}}=a^4\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{a^4}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=a^4.$$

Ответ: a^4.

Криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой

Пусть в пространстве задана кусочно-гладкая кривая. Пусть на этой кривой задана непрерывная ограниченная функция трех переменных $u=f(x,y,z)$. Строится интегральная сумма в полной аналогии со случаем плоской кривой.

Криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой l от функции трех переменных $f(x,y,z)$ равен:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i \,. \qquad (1.10)$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода по пространственной кривой необходимо записать параметрические уравнения этой кривой.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

Тогда $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$ (1.11)

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt \,. \qquad (1.12)$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int_{L_{AB}}(3x+4y+2z-2)dl$, где L - отрезок прямой между точками $A(4;-3;6)$ и $B(2;-5;5)$.

Решение. Запишем уравнение прямой L_{AB} в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 6 - t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Вычислим dl по формуле (1.11)

$$dl = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}\,dt = \sqrt{4+4+1}\,dt = 3dt\,.$$

Подинтегральная функция примет вид:

$$3x + 4y + 2z - 2 = 3(4-2t) + 4(-3-2t) + 2(6-t) - 2 =$$
$$= 12 - 6t - 12 - 8t + 12 - 2t - 2 = 10 - 16t.$$

Таким образом

$$\int_{L_{AB}}(3x+4y+2z-2)dl = \int_0^1 (10-16t)3dt = 3\left(10t - 8t^2\right)\Big|_0^1 = 3\cdot(10-8) = 6.$$

Ответ: 6.

Приложения криволинейных интегралов первого рода:

Геометрические приложения

- Длина дуги L, заключенная между точками AB численно равна криволинейному интегралу первого рода по L_{AB} от $f(x,y) \equiv 1$.

$$\ell = \int_{L_{AB}} dl \ . \qquad (1.13)$$

- Если $f(x,y)$ неотрицательна везде вдоль кривой L_{AB}, то $\int_{L_{AB}} f(x,y)dl$ численно равен площади цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Oz и проходящими через точки дуги L_{AB}, ограниченной снизу кривой L_{AB}, сверху кривой - являющейся пересечением цилиндрической поверхности с поверхностью $z = f(x,y)$, а с боков прямыми, проходящими через точки A и B параллельно оси Oz.

Физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

Если дуга L_{AB} материальна и ее линейная плотность в каждой точке M дуги L задана как $\gamma(x,y,z)$, то

- Масса материальной дуги L вычисляется по формуле

$$m = \int_{L_{AB}} \gamma(x,y,z)dl \, . \qquad (1.14)$$

- Координаты цента масс дуги определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{L_{AB}} x\gamma(x,y,z)dl; \quad y_c = \frac{1}{m}\int_{L_{AB}} y\gamma(x,y,z)dl;$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_{L_{AB}} z\gamma(x,y,z)dl; \qquad (1.15)$$

где m вычислена по формуле (1.14)

- моменты инерции относительно начала координат O, координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей xOy, xOz, yOz, вычисляются по формулам:

$$I_0 = \int_{L_{AB}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)dl.$$

$$\left.\begin{aligned}
&I_x = \int\limits_{L_{AB}} \left(z^2 + y^2\right)\gamma(x,y,z)dl; I_y = \int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)dl;\\
&I_z = \int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y,z)dl;\\
&I_{xy} = \int\limits_{L_{AB}} z^2\gamma(x,y,z)dl; I_{xz} = \int\limits_{L_{AB}} y^2\gamma(x,y,z)dl;\\
&I_{yz} = \int\limits_{L_{AB}} x^2\gamma(x,y,z)dl.
\end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

Пример 6. Найти координаты центра тяжести дуги винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность в точке $M(x,y,z)$ пропорциональна произведению всех ее координат.

Решение. По условию $\gamma = kxyz$, где k - коэффициент пропорциональности. Вычислим массу по формуле (1.14)

$$m = k\int\limits_L xyz\,dl =$$

$$= \left\{\begin{aligned} dl &= \sqrt{((a\cos t)')^2 + ((a\sin t)')^2 + (bt')^2} = \\ &= \sqrt{a^2 sin^2 t + a^2 sin^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}\right\} =$$

$$= k\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{1}{2}ka^2b\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\sin 2t\,dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{c|c} u = t & du = dt \\ dv = \sin 2t & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2t\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left(-\frac{t}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Координаты центра масс вычислим по формулам (1.15)

$$x_c = \frac{8}{k\pi a^2b\sqrt{a^2+b^2}}k\int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a^2\cos t\cdot\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= \frac{8a}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} t\cdot cos^2 t\cdot\sin t\,dt = \left\{\begin{array}{c|c} u = t & du = dt \\ dv = cos^2 t\sin t & v = -\dfrac{1}{3}cos^3 t\end{array}\right\} =$$

$$=\frac{8a}{\pi}\left(-\frac{t}{3}cos^3t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} cos^3t\,dt\right)=\frac{8a}{3\pi}\int_0^{\pi/2} cos^2t\,d(\sin t)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\sin t=u, cos^2t=1-u^2\\ \sin\frac{\pi}{2}=1, \sin 0=0\end{matrix}\right\}=\frac{8a}{3\pi}\int_0^1(1-u^2)du=\frac{8a}{3\pi}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{8a}{3\pi}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16a}{9\pi}.$$

$$y_c=\frac{8}{k\pi a^2b\sqrt{a^2+b^2}}k\int_0^{\pi/2} a\sin t\cdot a^2\cos t\cdot\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{8a}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cdot sin^2t\cdot\cos t\,dt=\left\{\begin{matrix}u=t\\ dv=sin^2t\cos t\end{matrix}\left|\begin{matrix}du=dt\\ v=\frac{1}{3}sin^3t\end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=\frac{8a}{\pi}\left(\frac{t}{3}sin^3t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} sin^3t\,dt\right)=\frac{8a}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} sin^2t\,d(\cos t)\right)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\cos t=u, sin^2t=1-u^2\\ \cos\frac{\pi}{2}=0, \cos 0=1\end{matrix}\right\}=\frac{8a}{\pi}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-u^2)du\right)=$$

$$=\frac{8a}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1\right)=\frac{8a}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4a}{9\pi}(3\pi-4).$$

$$z_c=\frac{8}{k\pi a^2b\sqrt{a^2+b^2}}k\int_0^{\pi/2} b^2t^2\cdot a^2\cos t\cdot\sin t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$$

$$=\frac{4b}{\pi}\int_0^{\pi/2} t^2\cdot\sin 2t\,dt=\left\{\begin{matrix}u=t^2\\ dv=\sin 2t\,dt\end{matrix}\left|\begin{matrix}du=2tdt\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2t\end{matrix}\right.\right\}=$$

$$=\frac{4b}{\pi}\left(-\frac{t^2}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2} t\cos 2t\;dt\right)=\frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\int_0^{\pi/2} t\cos 2t\;dt\right)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=t\\ dv=\cos 2t\,dt\end{matrix}\left|\begin{matrix}du=dt\\ v=\frac{1}{2}\sin 2t\end{matrix}\right.\right\}=\frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{t\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{2}\,dt\right)=$$

$$= \frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{4b}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right) = b\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right).$$

Ответ: $x_c = \frac{16a}{9\pi}$, $y_c \frac{4a}{9\pi}(3\pi - 4)$, $z_c = b\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right)$.

Задания

<u>*Задание 1.1.*</u> Вычислить криволинейный интеграл I рода.

1) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$; L- отрезок прямой, соединяющей точкм $A(2;4)$ и $B(1;3)$.

2) $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x}}dl$; L - дуга полукубической параболы $y^2 = \frac{4x^3}{9}$ от точки $A(3;2\sqrt{3})$ до точки $B\left(8;\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$.

3) $\int\limits_L y^2 dl$; L - дуга линии $x = \ln y$ между т. $A(0;1)$ и $B(1;e)$.

4) $\int\limits_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}dl$; L - дуга кривой $y = ctgx$; $\pi/4 \le x \le \pi/2$.

5) $\int\limits_L ydl$; L - первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$; $y = 3(1 - \cos t)$.

6) $\int\limits_L \left(3x - 2\sqrt[3]{a^2 y}\right)dl$; L -часть астроиды $x = a\cos^3 t; y = a\sin^3 t$ расположенная в первой координатной четверти.

7) $\int\limits_L (x + 2y - 3z)dl$; L - отрезок прямой между точками $A(1;3;-1)$ и $B(3;5;-1)$.

8) $\int_L \sqrt{1+4y+9xz}\ dl$; $L -$ дуга кривой $x = t; y = t^2; z = t^3; (0 \le t \le 1)$

9) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}dl$; L - дуга спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ между точками $A(0;0)$ и $B\left(a^2; a\right)$.

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$; L - дуга лемнискаты $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ $(x \ge 0; y \ge 0)$.

<u>*Задание 1.2.*</u> Найти длину:

11) дуги цепной линии $y = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$; $x \in [0;1]$.

12) линии $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$; $0 \le t \le \beta$.
13) дуги пространственной кривой $x = cos^3 t$; $y = sin^3 t$; $z = \cos 2t$.
14) дуги линии пересечения поверхностей $x^3 = 3a^2 y$; $2xz = a^2$, заключенной между плоскостями $y = \frac{1}{3}a$ и $y = 9a$.

Ответы: **1.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$; **2.** $\frac{2152}{45}$; **3.** $\frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2} - 2^{3/2}\right)$; **4.** $\left(\frac{5\sqrt{2}}{12} - \ln\left(tg\frac{\pi}{8}\right)\right)$; **5.** 96; **6.** $\frac{1}{5}a^2$; **7.** $26\sqrt{2}$; **8.** $\frac{62}{15}$; **9.** $a^3\left(\frac{a^2}{3}+1\right)$; **10.** $\frac{1}{4}a^2\pi$; **11.** $\frac{e^2-1}{2e}$; **12.** $\frac{1}{2}a\beta^2$; **13.** 10; **14.** $9a$.

1.2 Криволинейный интеграл второго рода.

Пусть на плоскости xOy задана гладкая кривая L_{AB}. Пусть на этой кривой задана непрерывная функция $z = f(x,y)$. Разобьем кривую L_{AB} на n элементарных частей точками $M_0, M_1, \ldots M_n$ $(A = M_0, B = M_n)$.

Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ на оси Ox и Oy. На каждой частичной дуге $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ выберем произвольную точку $M_i^*\left(x_i^*, y_i^*\right)$. Составим интегральные суммы для $f(x,y)$ следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i \text{ и } \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i \ . \qquad (1.17)$$

Пределы интегральных сумм (1.17) при $n \to \infty$ называются криволинейными интегралами от $f(x,y)$ по координатам на кривой L_{AB} или криволинейными интегралами второго рода.

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i,$$
$$\int_{L_{AB}} f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i . \qquad (1.18)$$

Пусть на плоскости xOy задана векторная функция $\vec{a}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, координаты которой - функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - непрерывные функции на кривой L_{AB}. Проведем разбиение кривой L_{AB} тем же способом, что и указано выше. Вектор $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ обозначим через $\Delta\vec{\ell}_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$. Для функции $\vec{a}(x,y)$ построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta\vec{l}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i. \qquad (1.19)$$

Отметим, что в правой части равенства (1.19) стоят интегральные суммы типа (1.17) для функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Криволинейным интегралом второго рода от функции $\vec{a}(x,y)$ называется предел интегральных сумм (1.19) при $n \to \infty$.

$$\int\limits_{L_{AB}}\left(\vec{a}d\vec{l}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta\vec{l}_i\right) = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (1.20)$$

В случае, если задана пространственная кривая L_{AB}, и векторная функция $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, криволинейный интеграл второго рода записывается в виде:

$$\int\limits_{l}\vec{a}\,\overrightarrow{dl} = \int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\ . \qquad (1.21)$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода:

- Свойство аддитивности:

  Если кривая L представляет собой объединение нескольких кривых $L_1, L_2, \ldots L_n$, то

$$\int\limits_{L}\vec{a}\,\overrightarrow{dl} = \int\limits_{L_1}\vec{a}\,\overrightarrow{dl} + \int\limits_{L_2}\vec{a}\,\overrightarrow{dl} + \ldots + \int\limits_{L_n}\vec{a}\,\overrightarrow{dl}\ . \qquad (1.22)$$

- Свойство линейности:

$$\int\limits_{L}\left(c_1\vec{a} + c_2\vec{b}\right)\overrightarrow{dl} = c_1\int\limits_{L}\vec{a}\,\overrightarrow{dl} + c_2\int\limits_{L}\vec{b}\,\overrightarrow{dl}, \qquad (1.23)$$

где c_1 и c_2 - произвольные константы, $\vec{a}$, $\vec{b}$ - заданные непрерывные векторные функции.

- При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_{L_{AB}}\vec{a}d\vec{l} = -\int\limits_{L_{BA}}\vec{a}d\vec{l}\ . \qquad (1.24)$$

Если криволинейный интеграл вычисляется по замкнутому контуру, то положительным принято считать направление обхода против часовой стрелки.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода сводится к вычислению соответствующих определенных интегралов, полученных по следующим правилам:

- Если плоская кривая L_{AB} задана явным уравнением L_{AB}: $y = y(x)$, $x_A = a, x_B = b$ то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x) \right] dx. \quad (1.25)$$

- Если плоская кривая L_{AB} задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, точке A соответствует значение $t = \alpha$, а точке B - $t = \beta$, тогда

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt.$$

(1.26)

- Если плоская кривая L_{AB} задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, причем в т. угол $\varphi = \varphi_A$, в т. В угол $\varphi = \varphi_B$, то

$$dx = \cos\varphi d\rho - \rho \sin\varphi\, d\varphi = \left(\cos\varphi \cdot \rho'(\varphi) - \rho \sin\varphi\right) d\varphi,$$

$$dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi = \left(\sin\varphi \cdot \rho'(\varphi) + \rho\cos\varphi\right) d\varphi,$$

и криволинейный интеграл (1.20) примет вид:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_A} \Big\{ P(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \times$$

$$\times \left[\cos\varphi \cdot \rho'(\varphi) - \rho\sin\varphi\right] + Q(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \times \quad (1.27)$$

$$\times \left[\sin\varphi \cdot \rho'(\varphi) + \rho\cos\varphi\right] \Big\} d\varphi.$$

- Если L_{AB} - пространственная кривая, то для вычисления криволинейного интеграла второго рода (1.21) следует записать уравнение кривой в параметрическом виде

$$L_{AB}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_A = \alpha, \quad t_B = \beta, \\ z = z(t) \end{cases}$$

и вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$
$$+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt. \qquad (1.28)$$

Пример 7. Вычислить $\int\limits_L (y + x^2)dx + (2x - y)dy$, где L - дуга параболы $y = 2x - x^2$ от точки $(1;1)$ до точки $(3;-3)$.

Решение: Кривая L задана уравнением в явном виде, поэтому для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (1.25)

$$y' = \left(2x - x^2\right)' = 2 - 2x, \quad a = 1; \quad b = 3.$$

$$\int\limits_L (y + x^2)dx + (2x - y)dy =$$

$$= \int\limits_1^3 [2x - x^2 + x^2 + (2x - 2x + x^2)2(1 - x)]dx = \int\limits_1^3 [2x + 2x^2 - 2x^3]dx =$$

$$= \left(x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_1^3 = 9 + 18 - \frac{81}{2} - 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{44}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{44}{3}$.

Пример 8. Вычислить $\oint\limits_L dx + xdy$, где L - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый в положительном направлении.

Решение: Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix}, \; 0 \le t \le 2\pi$$

Вычислим x'_t и y'_t: $x'_t = -a\sin t \quad y'_t = b\cos t$.

Для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (1.26):

$$\oint_L dx + xdy = \int_0^{2\pi} \left(-a\sin t + a\cos t \cdot b\cos t\right)dt = -a\int_0^{2\pi} \sin t dt +$$

$$+ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = a\cos t\Big|_0^{2\pi} + \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = ab\pi.$$

Ответ: $ab\pi$.

__Пример 9.__ Вычислить $\int_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, если L - линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с цилиндром $x^2 + y^2 = Rx \quad (z \geq 0)$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Ox.

Решение: Запишем уравнение линии L в параметрическом виде. Для этого

1) Подставим уравнение цилиндра в уравнение сферы

$$z^2 = R^2 - Rx.$$

2) Преобразуем уравнение цилиндра

$$x^2 + y^2 = Rx \quad \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}.$$

3) Запишем параметрическое уравнение этого цилиндра:

$$x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos t; \quad y = \frac{R}{2}\sin t;$$

$$z = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}(1+\cos t)} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\cos t} = R\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = R\sin\frac{t}{2}.$$

Таким образом, параметрические уравнения заданного контура L имеют вид:

$$x = \frac{R}{2}\left(1+\cos t\right); \quad y = \frac{R}{2}\sin t; \quad z = R\sin\frac{t}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x_t' = -\frac{R}{2}\sin t; \quad y_t' = \frac{R}{2}\cos t; \quad z_t' = \frac{R}{2}\cos\frac{t}{2}.$$

Тогда, согласно (1.28), получаем:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2dx + z^2dy + x^2dz =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{R^2}{4} sin^2 t \left(-\frac{R}{2}\sin t\right) + R^2 sin^2\frac{t}{2}\cdot\frac{R}{2}\cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2}{4}(1 + cos^2 t)^2 \frac{R}{2}\cos\frac{t}{2}\right] dt =$$

$$= \frac{R^3}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-sin^3 t + 2(1 - \cos t)\cos t + 4cos^3\frac{t}{2}\right] dt =$$

$$= \frac{R^3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\cos t - cos^2 t + 2cos^3\frac{t}{2}\right] dt = \left\{\text{т.к.} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-sin^3 t] dt = 0\right\} =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[\sin t|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt + 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2\frac{t}{2} d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[2 + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4\left(\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3} sin^3\frac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[2 - \frac{\pi}{2} + 4\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\right] = \frac{R^3}{4}\left(2 - \frac{\pi}{2} + \frac{10\sqrt{2}}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{R^3}{4}\left(2 - \frac{\pi}{2} + \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$.

Приложения криволинейных интегралов второго рода.

- Площадь S фигуры, расположенной в плоскости xOy и ограниченной замкнутой линией L, находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx\ . \qquad (1.29)$$

- Если $\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$ переменная сила, то работа силы $\vec{F}$, совершаемая вдоль контура L равна:

$$A = \int_L \vec{F}\,\vec{dl} = \int_L F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz. \qquad (1.30)$$

<u>Пример 10.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром L: $y = x^4$; $y^4 = x$.

<u>Решение:</u> Площадь фигуры вычислим по формуле (1.29). Контур L состоит из двух частей: L_1: $y = x^4$ и L_2: $y^4 = x$.

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{L_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{L_2} xdy - ydx.$$

$$\int\limits_{L_1} xdy - ydx = \left\{ \begin{matrix} y = x^4, y' = 4x^3, \\ x_В = 1, x_Н = 0. \end{matrix} \right\} = \int\limits_0^1 (x \cdot 4x^3 - x^4)dx = 3\int\limits_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

$$\int\limits_{L_2} xdy - ydx = \left\{ \begin{matrix} x = y^4, x' = 4y^3, \\ y_В = 0, y_Н = 1. \end{matrix} \right\} = \int\limits_1^0 (y^4 - y \cdot 4y^3)dy = 3\int\limits_0^1 y^4 dx = \frac{3}{5}y^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{L_1} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int\limits_{L_2} xdy - ydx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\right] = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $S = 0{,}6(ед)^2$.

<u>Пример 11.</u> Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + zx^2\vec{j} + xyz\vec{k}$, совершаемую вдоль контура $L: \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t^2 \end{cases}$ из точки $A(1;1;0)$ в точку $B\left(e; \frac{1}{e}; 1\right)$.

<u>Решение:</u> Работу силы $\vec{F}$ найдем по формуле (1.30)

$$A = \int\limits_L xydx + zx^2 dy + xyzdz.$$

Криволинейный интеграл вычислим по формуле (1.28), учитывая, что $x'(t) = e^t$; $y'(t) = -e^{-t}$; $z'(t) = 2t$; $0 \le t \le 1$.

$$A = \int\limits_0^1 \left[e^t \cdot e^{-t} \cdot e^t - t^2 \cdot e^{2t} \cdot e^{-t} + e^t \cdot e^{-t} \cdot t^2 \cdot 2t\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[e^t - t^2 e^t + 2t^3\right]dt = e^t\Big|_0^1 + \frac{t^4}{2}\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 t^2 e^t dt = \left\{ \begin{array}{l|l} u = t^2 & du = 2tdt \\ d\upsilon = e^t dt & \upsilon = e^t \end{array} \right\} =$$

$$= e - 1 + \frac{1}{2} - t^2 e^t\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 te^t dt = \left\{ \begin{array}{l|l} u = t & du = dt \\ d\upsilon = e^t dt & \upsilon = e^t \end{array} \right\} = e - \frac{1}{2} - e +$$

$$+ 2\left(te^t\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^t dt\right) = -\frac{1}{2} + 2\left(e - e^t\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{2} + 2(e - e + 1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $A = 1{,}5$.

Задания

Задание 1.3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль различных путей L , выходящих из точки O (0;0) и заканчивающихся в точке A(2;1).

15) $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$; 16) $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$;

а)L-отрезок OA; б) L-ломаная линия OBA,где точка B(2;0); в) L-дуга квадратной параболы, осью симметрии которой является ось OY; г)L- дуга квадратной параболы, осью симметрии которой является ось OX;

Задание 1.4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода.

17) $\int\limits_L \cos^3 xdx + ydy$; L - дуга линии $y = \sin x;\ 0 \le x \le \pi/2$.

18) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dx + xydy$; L - дуга кривой $y = e^x$ от $A(0,1)$ до $B(1,e)$.

19) $\int\limits_L x(y-2)dx + y(2-x)dy$; L - контур треугольника с вершинами в точках $(-2,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ (обход против часовой стрелки).

20) $\int\limits_L x^2ydx + x^3dy$; L - контур, ограниченный параболами $y^2 = x$, $x^2 = y$ при положительном направлении обхода.

21) $\int\limits_L \sin^3 xdx + \dfrac{dy}{y^2}$; L - дуга кривой $y = ctgx$ от $x = 0$ до $x = \pi/3$.

22) $\int\limits_L xydx + y^2dy$; L - дуга кривой $x = t^2;\quad y = t;\quad 1 \le t \le 2$.

23) $\int\limits_L ydx - xdy$; L - дуга астроиды $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t;\quad 0 \le t \le \pi/2$.

24) $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$; L - первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

25) $\int\limits_L zdx + ydy + (x^2 - y^2)dz$, L - дуга кривой $x = a\,ch\,t$, $y = a\,sh\,t;\quad z = bt\quad (0 \le t \le 1)$.

26) $\int\limits_L zdx + xdy - \dfrac{xy}{z}dz$; L - дуга кривой $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t,\quad 0 \le t \le \pi/2$.

Задание 1.5. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми

27) Эллипсом $x = a\cos t; \quad y = a\sin t$.

28) Кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t); \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

29) Астроидой $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$.

30) Кривой $(x+y)^3 = axy$. Указание: положить $y = tx$, $0 \le t \le \infty$.

Задание 1.6. Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из A в B по заданной кривой.

31) $\vec{F} = x\vec{i} + \frac{1}{y^2}\vec{j}; \quad A(1;1), B\left(4;\frac{1}{4}\right)$, по дуге кривой $xy = 1$.

32) $\vec{F} = z^3\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$, по дуге кривой $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$, $A(0,0,0)$, $A(1,1,1)$.

Ответы: **15**.а) $\frac{4}{3}$, б)-4, в)0, г) $\frac{12}{5}$; **16**.а)4,б)4,в)4,г)4; **17.** $\frac{7}{6}$; **18.** $\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{12}$; **19.** $\frac{1}{3}$; **20.** $\frac{6}{35}$; **21.** $\frac{5}{24} - \sqrt{3}$; **22.** $\frac{-221}{15}$; **23.** $-\frac{3}{16}\pi a^2$; **24.** $a^3\pi(5 - 2\pi)$; **25.** $\frac{1}{2}\pi a(a+1) - ab - \frac{1}{3}a^3$; **26.** $\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{5}{8}\pi + 1$; **27.** πab; **28.** $6\pi a^2$; **29.** $\frac{3}{8}\pi a^2$; **30.** $\frac{1}{60}a^2$; **31.** $\frac{9}{2}$; **32.** $\frac{7}{6}$.

1.3 Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Пусть область D - некоторая замкнутая область на плоскости xOy, ограниченная контуром L. Пусть в области D заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Справедлива следующая теорема (теорема Грина).

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутой односвязной области D, лежащей в плоскости xOy и ограниченной кусочно-гладкой кривой L, то

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (1.31)$$

где интегрирование по контуру L выполняется в положительном направлении. Формула (1.31) называется формулой Грина.
Из формулы Грина следует, что если выполняется условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1.32}$$

то

$\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, для любого контура, лежащего в области D.

$\oint\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования.

Выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$: $du=Pdx+Qdy$.

Функция $u(x,y)$ называется потенциальной функцией для дифференциального выражения $Pdx+Qdy$.

Функцию $u(x,y)$ можно вычислить по формуле:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)\Big|_{y=y_0}dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C. \tag{1.33}$$

Из следствия 2 и формулы (1.33) следует, что

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx+Qdy=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0). \tag{1.34}$$

<u>*Пример 12.*</u> Применив формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, где L- контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;1)$; $B(2;2)$; $C(1;3)$.

<u>Решение:</u> Построим контур L (рис. 30)

Найдем уравнения сторон:

AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$ $\quad \dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-1}{2-1};\quad y=x.$

$$BC:\quad \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B};\quad \frac{x-2}{1-2}=\frac{y-2}{3-2};\quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{1};\quad y=4-x.$$

$$AC:\quad \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A};\quad \frac{x-1}{1-1}=\frac{y-1}{3-1};\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{2};\quad x=1.$$

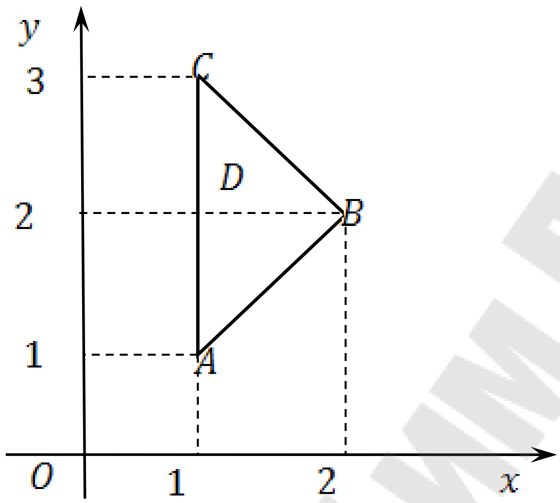


Рис. 30

Для вычисления интеграла по формуле Грина необходимо вычислить $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(2\left(x^2+y^2\right)\right)_y'=4y;\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\left((x+y)^2\right)_x'=2(x+y),$$

таким образом

$$\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint\limits_D(2(x+y)-4y)dxdy=2\iint\limits_D(x-y)dxdy=$$

$$=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)dy=2\int_1^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x}dx=2\int_1^2\left(4x-\frac{3x^2}{2}-\frac{(4-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=2\left(2x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{(4-x)^3}{6}\right)\Bigg|_1^2=2\left(8-4+\frac{4}{3}-2+\frac{1}{2}-\frac{2}{9}\right)=-\frac{4}{3}.$$

Пример 13. Проверить, зависит ли криволинейный интеграл от пути интегрирования.

$$\int\limits_L 2xe^{x^2+y^2}dx+3y^2e^{x^2+y^2}dy.$$

Решение: Согласно следствию 2 из формулы Грина криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, если выполняется условие (1.32): $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. По условию

$$P = 2xe^{x^2+y^2}, \qquad Q = 3y^2 e^{x^2+y^2}.$$

Вычислим соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(2xe^{x^2+y^2}\right)'_y = 4xye^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(3y^2 e^{x^2+y^2}\right)'_x = 6xy^2 e^{x^2+y^2}.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данный криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования.

Пример 14. Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл как разность значений потенциальной функции в начальной и конечной точках.

$$\int_{AB}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy, \qquad \text{где } A(-1;1)B(1;1).$$

Решение: Убедимся, что подынтегральное выражение - полный дифференциал. Для этого проверим выполнение условия (1.32) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

По условию задачи $P(x,y) = 3x^2y - 4xy^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 8xy$,

$$Q(x,y) = x^3 - 4x^2y + 3y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 8xy.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,

$$\int_{AB}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy = \int_{(-1;1)}^{(1;1)} du = u(1;1) - u(-1;1).$$

Определим потенциальную функцию $u(x,y)$, используя формулу (1.33). В качестве (x_0, y_0) выберем (0;0), тогда

$$u(x,y)=\int_0^x\left(3x^2y-4xy^2\right)\Big|_{y=0}dx+\int_0^y\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy+C=$$

$$=\int_0^x 0\cdot dx+\int_0^y\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy+C=x^3y-2x^2y^2+y^3\Big|_0^y+C=$$

$$=x^3y-2x^2y^2+y^3+C,$$

где C - произвольная постоянная.

Замечание: Потенциальную функцию $u(x,y)$ можно найти и по-другому. Учитывая, что $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, находим

$$u(x,y)=\int\left(3x^2y-4xy^2\right)dx=x^3y-2x^2y^2+\varphi(y),$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3-4x^2y+\varphi'(y)$, но $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, таким образом

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3-4x^2y+\varphi'(y)=x^3-4x^2y+3y^2$, поэтому

$\varphi'(y)=3y^2$, следовательно, $\varphi(y)=y^3+C$.

Таким образом, $u(x,y)=x^3y-2x^2y^2+y^3+c$.

Итак, зная $u(x,y)$, вычислим заданный криволинейный интеграл:

$$\int_{AB}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy=u(1;1)-u(-1;1)=$$

$$=\left\{1^3\cdot1-2\cdot1^2\cdot1^2+3\cdot1^3+c\right\}-\left\{(-1)^3\cdot1-2\cdot(-1)^2\cdot1^2+3\cdot1^3+c\right\}=2.$$

Задание 1.7. Вычислить криволинейный интеграл. Применяя формулу Грина (направление обхода контура против часовой стрелки).

33) $\oint_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$; L- окружность $x^2+y^2=R^2$.

34) $\oint_L\ln\left(3+x^2\sin^2 x\right)dx+x\cos ydy$; L - замкнутый контур заданный неравенствами $x+y\geq-5$, $x+y\leq-3$, $x\leq0$, $y\leq0$.

35) $\oint_L\frac{1}{2\sqrt{x^2+4y^3}}\left(\left(2x-y^2\sqrt{x^2+4y^3}\right)dx+\left(12y^2+x^2\sqrt{x^2+4y^3}\right)dy\right)$, L - контур прямоугольника с вершинами $A(a,c)$, $B(b,c)$, $C(b,d)$, $D(a,d)$, причем $0<a<b$, $0<c<d$.

36) $\oint\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy$; L- эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

37) $\oint\limits_L e^{y^2-x^2}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$; L- окружность $x^2+y^2=R^2$.

38) $\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$; L- эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

39) $\oint\limits_L -x^2ydx+xy^2dy$; L- окружность $x^2+y^2=R^2$.

40) $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$; L- окружность $x^2+y^2=ax$.

Задание 1.8. Проверить, зависит ли криволинейный интеграл от пути интегрирования.

41) $\int\limits_L y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$.

42) $\int\limits_L 8x\sin\left(4x^2-5y^2\right)dx-10y\sin\left(4x^2-5y^2\right)dy$.

43) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2-1}dx+\ln\left(x^2+y^2+1\right)dy$.

44) $\int\limits_L \left(6x^2z+10x\right)dx+\left(4y^3-6x^2y\right)dy+\left(2x^3+6zy^2\right)dz$.

Задание 1.9. Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $u(x,y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подинтегральное выражение.

45) $\int\limits_{AB} \left(4x^3-3y^2+5y\right)dx+(5x-6xy-4y)dy$, где $A(0;0)$; $B(1;1)$.

46) $\int\limits_{AB} e^{y/x}\left(1-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(1+e^{y/x}\right)dy$, где $A(2;0)$; $B(0;0)$.

Ответы: **33.** $\frac{1}{2}\pi R^4$; **34.** $\cos 3-\cos 5$; **35.** $\frac{1}{2}(b-a)(d-c)(a+b+c+d)$; **36.** $-2\pi ab$; **37.** 0; **38.** 0; **39.** $\frac{1}{2}\pi R^4$; **40.** $-\frac{1}{8}a^3\pi$; **45.** 1; **46.** -2.

2. Поверхностные интегралы.

2.1 Поверхностный интеграл первого рода.

Определение 1: Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, непрерывно изменяющаяся вдоль поверхности.

Пусть $f(x,y,z)$ - непрерывная функция, заданная на некоторой гладкой поверхности σ. С помощью кусочно-гладких кривых разобьем σ на n элементарных площадок. Площадь i-й площадки обозначим через $\Delta\sigma_i$, диаметр - d_i. Внутри каждой площадки выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Вычислив значения $f(M_i)$, построим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \quad . \tag{2.1}$$

Сумма (2.1) называется интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по поверхности σ_i.

Определение 2: Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральных сумм (2.1) при $n \to \infty$ (или $d_i \to 0$):

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d_i\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \,. \tag{2.2}$$

Из определения поверхностного интеграла первого рода следует, что он обладает теми же свойствами, что и кратные интегралы (аддитивность, линейность, теорема о среднем).

Приложения поверхностного интеграла первого рода.

- Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то из (2.2) следует, что

$$\iint_{(\sigma)} d\sigma = S_\sigma \,. \tag{2.3}$$

Поверхностный интеграл от $d\sigma$ равен площади поверхности.

- Если σ - материальная поверхность с поверхностной плотностью $\gamma(x,y,z)$, то ее масса может быть вычислена по формуле:

$$m_\sigma = \iint_{(\sigma)} \gamma(x,y,z)d\sigma \,, \tag{2.4}$$

а статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции вычисляются по формулам, аналогичным (1.15), (1.16).

Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Проекция D_{xy} поверхности σ на плоскость xOy называется однозначной, если любая прямая, проведенная параллельно оси Oz, пересекает σ только один раз.

Аналогично определяется однозначность проекций на две другие координатные плоскости.

- Если проекция D поверхности σ на плоскость xOy однозначна, то поверхность σ можно задать явным уравнением: $\sigma\colon z = z(x, y)$.

В этом случае $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$. (2.5)

И вычисление поверхностного интеграла по σ сводится к вычислению двойного интеграла по проекции D_{xy}

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy \ . \quad (2.6)$$

Если уравнение (σ) можно представить в виде: $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$, то поверхностный интеграл вычисляется по одной из формул:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x, (y, z), y, z)\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dydz . \quad (2.7)$$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dxdz . \quad (2.8)$$

- Если поверхность σ задана параметрическими уравнениями σ: $x = x(u, \upsilon)$; $y = y(u, \upsilon)$; $z = z(u, \upsilon)$, где функции x, y, z непрерывны вместе со своими первыми частными производными в некоторой замкнутой области D плоскости $uO\upsilon$, то поверхностный интеграл первого рода может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{D_{u\upsilon}} f(x(u, \upsilon), y(u, \upsilon), z(u, \upsilon))\sqrt{E \cdot G - F^2}\,dud\upsilon, \quad (2.9)$$

где

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2;$$
$$G = x_\upsilon'^2 + y_\upsilon'^2 + z_\upsilon'^2;$$
$$F = x_u' \, x_\upsilon' + y_u' y_\upsilon' + z_u' z_\upsilon'.$$

Вычисление поверхностного интеграла первого рода проводится по следующей схеме:

- Определяется координатная плоскость, на которую заданная поверхность проецируется однозначно.

Если такой плоскости нет, то поверхность разбивается на несколько поверхностей, имеющих только общие границы, которые возможно однозначно спроецировать на координатные плоскости, либо делается переход к параметрическим уравнениям поверхности.

- Строится плоская область D, определяются ее границы, исключив соответствующую переменную из уравнений поверхности σ.
- Вычисляя необходимые частные производные, найдется $d\sigma$ через ds (ds- площадка на соответствующей координатной поверхности).
- Поверхностный интеграл выражается через двойной по формулам (2.6)-(2.9).
- Далее проводится вычисление двойного интеграла.

<u>*Пример 15.*</u> Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (xy + yz + xz) d\sigma$, где σ- часть поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

<u>Решение:</u> Построим поверхность σ. (Рис. 31).
Поверхность σ однозначно проецируется на плоскость xOy в круг D_{xy} $x^2 + y^2 = 2ax$.

Вычислим z_x' и z_y':

$$z_x' = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ тогда}$$

согласно (2.5)

$$dz = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} dxdy.$$

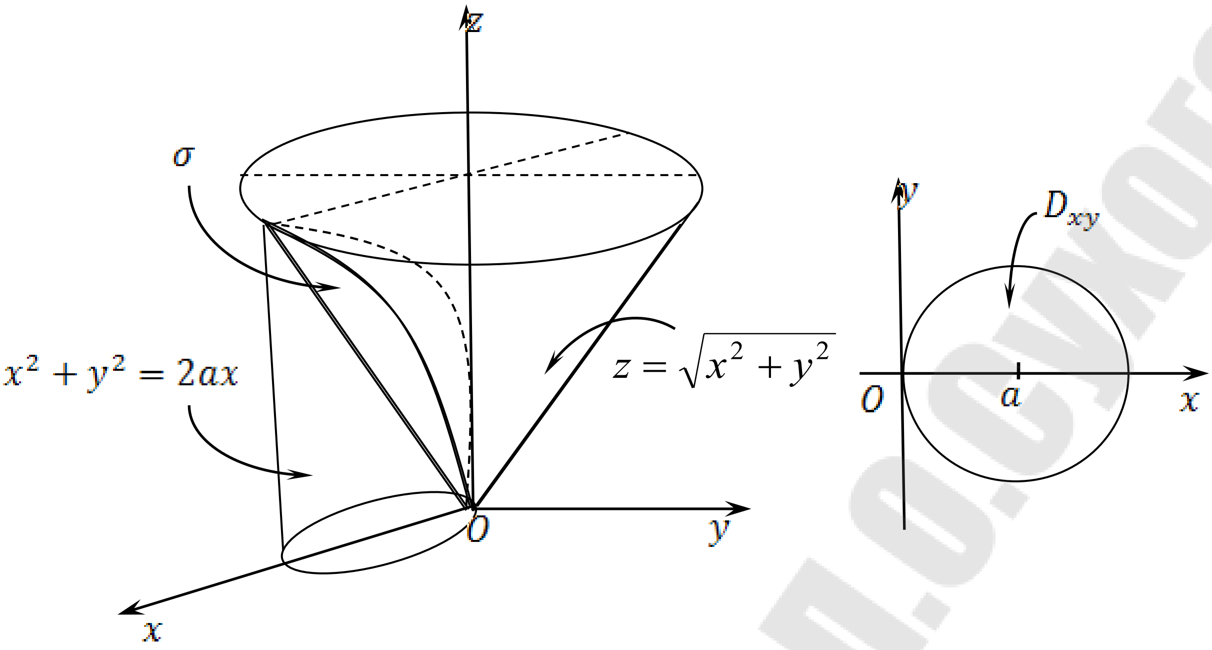


Рис. 31

Представим заданный поверхностный интеграл через двойной по формуле (2.6)

$$I = \iint\limits_{\sigma} (xy + yz + xz) d\sigma = \sqrt{2} \iint\limits_{D_{xy}} \left(xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$x = \rho \cos\varphi \quad y = \rho \sin\varphi$. Тогда уравнение границы D_{xy} примет вид

$\rho = 2a\cos\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, таким образом

$$I = \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} (\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + \rho^2 \cos\varphi + \rho^2 \sin\varphi) \rho d\rho =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} \rho^3 d\rho =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi) \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2} a^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi) \cdot cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^5\varphi \sin\varphi\, d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^5\varphi d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^4\varphi \sin\varphi\, d\varphi\right] =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2} cos^5\varphi d\varphi = 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2} cos^4\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}(1 - sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi) = \begin{Bmatrix} t = \sin\varphi \\ t_{\text{В}} = 1, t_{\text{Н}} = 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4)dt = 8\sqrt{2}a^4\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Ответ: $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

Пример 16. Вычислить площадь поверхности $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 2a^2xy$.

Решение: Площадь поверхности σ равна согласно (2.3)

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Для вычисления необходимого поверхностного интеграла найдем параметрические уравнения заданной поверхности σ. Для этого перейдем к сферическим координатам:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta;\quad y = r\sin\varphi\sin\theta;\quad z = r\cos\theta.$$

Уравнение поверхности примет вид:

$$\left(r^2\right)^2 = 2a^2r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta;$$

$$r^2 = a^2\sin 2\varphi\sin^2\theta,$$

$r = a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}$, из условия $r \geq 0$ находим,

$$\theta \in [0;\pi] \quad \varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\bigcup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right].$$

В силу симметрии достаточно найти площадь поверхности, для которой $\varphi \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, а результат удвоить. Чтобы найти параметрические уравнения $x = x(\varphi,\theta)$, $y = y(\varphi,\theta)$, $z = z(\phi,\theta)$ подставим найденное выражение для r в формулы (2.16):

$$x = r\cos\varphi\sin\theta = a\sin^2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta = a\sin^2\theta\sqrt{\sin 2\varphi}\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta = a\sin\theta\cos\theta\sqrt{\sin 2\varphi},$$

$$x'_\varphi = a\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2\cdot\cos\varphi - (\sin 2\varphi)^{1/2}\cdot\sin\varphi\right) =$$

$$= a\sin^2\theta\left(\frac{\cos 2\varphi\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\sin 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\right) = a\sin^2\theta\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}};$$

$$x'_\theta = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot 2\sin\theta\cos\theta = a\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\sin 2\theta;$$

$$y'_\varphi = a\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2\cdot\sin\varphi + (\sin 2\varphi)^{1/2}\cos\varphi\right) =$$

$$= a\sin^2\theta\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}};$$

$$y'_\theta = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot 2\sin\theta\cos\theta = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\sin 2\theta;$$

$$z'_\varphi = a\sin\theta\frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^{-1/2}\cos 2\varphi\cdot 2 = \frac{a\sin\theta\cdot\cos 2\varphi\cdot\cos\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}};$$

$$z'_\theta = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cos 2\theta.$$

Найдем E, G и F по формулам (2.1.10):

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = \frac{a^2\sin^4\theta}{\sin 2\varphi}\cos^2 3\varphi + \frac{a^2\sin^4\theta}{\sin 2\varphi}\sin^2 3\varphi +$$

$$+ \frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2\sin^2\theta}{\sin 2\varphi}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2 2\varphi\right);$$

$$G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = a^2\sin 2\varphi\cdot\sin^2 2\theta\cos^2\varphi +$$

$$+ a^2\sin 2\varphi\sin^2 2\theta\cdot\sin^2\varphi + a^2\sin 2\varphi\cos^2 2\theta = a^2\sin 2\varphi\times$$

$$\times\left(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right) = a^2\sin 2\varphi;$$

$$F = x'_\varphi \cdot x'_\theta + y'_\varphi \cdot y'_\theta + z'_\varphi \cdot z'_\theta = \frac{a\sin^2\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 3\varphi \cdot a\cos\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\,\sin 2\theta +$$

$$+ a\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\varphi}}\sin 3\varphi \cdot a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}\,\sin 2\theta + \frac{a\cos 2\varphi\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot a\sqrt{\sin 2\varphi} \times$$

$$\times \cos 2\theta = a^2\sin^2\theta\sin 2\theta(\cos 3\varphi\cos\varphi + \sin 3\varphi \cdot \sin\varphi) +$$

$$+ a^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi\cos 2\theta = a^2\sin^2\theta\sin 2\theta\cos 2\varphi +$$

$$+ a^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi\cos 2\theta = a^2\cos 2\varphi\sin\theta \cdot \cos\theta\left(2\sin^2\theta + \cos 2\theta\right) =$$

$$= a^2\cos 2\varphi \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta.$$

Подставляя найденные E, G и F в формулу (2.1.9), получаем:

$$E \cdot G - F^2 = \frac{a^2(\sin\theta)^2}{\sin 2\theta}((\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2(\cos 2\varphi)^2) \cdot a^2\sin 2\varphi$$
$$- (a^2\cos 2\varphi\sin\theta\cos\theta)^2 = a^4(\sin\theta)^4$$

$$S = 2\iint_{D_{\varphi\theta}}\sqrt{a^4 sin^4\theta}\,d\varphi d\theta = 2\iint_{D_{\varphi\theta}} a^2 sin^2\theta\,d\varphi d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\pi} a^2 sin^2\theta\,d\theta = a^2\varphi|_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta$$
$$= \frac{a^2\pi}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{a^2\pi^2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2\pi^2}{2}\,(ед)^2$.

<u>*Пример 17.*</u> Найти массу поверхности сферы, радиус которой R, если ее поверхностная плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до вертикального диаметра.

<u>Решение</u>: Расположим начало координат в центре сферы, а ось Oz направим через вертикальный диаметр. Уравнение поверхности сферы в этом случае примет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а поверхностная плотность по условию $\gamma = x^2 + y^2$. Массу сферы найдем по формуле (2.4)

$$m = \iint_\sigma\left(x^2 + y^2\right)d\sigma.$$

Из уравнения сферы находим $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, где знак «+» определяет верхнюю (σ_1), а «- » нижнюю (σ_2) половину сферы

$$m=\iint\limits_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=2\iint\limits_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)d\sigma.$$

Верхняя половина сферы задана однозначной явной функцией

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Вычислим поверхностный интеграл по формуле (2.6). Проекцией σ_1 на плоскость xOy является D_{xy} - круг $x^2+y^2=R^2$;

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-yz}};\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-yz}},$$

тогда

$$m=\iint\limits_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\times$$

$$\times\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\left(x^2+y^2\right)R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Получившийся двойной интеграл вычислим перейдя к полярным координатам.

$$m=R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho=\frac{R}{2}\varphi|_0^{2\pi}\int\limits_0^R\frac{\rho^2d\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\{\rho^2=t\}=$$

$$=\pi R\int\limits_0^{R^2}\frac{tdt}{\sqrt{R^2-t}}=\pi R\int\limits_0^{R^2}\frac{t-R^2+R^2}{\sqrt{R^2-t}}dt=$$

$$=\pi R\left[R^2\int\limits_0^{R^2}\frac{dt}{\sqrt{R^2-t}}-\int\limits_0^{R^2}\sqrt{R^2-t}dt\right]=$$

$$=\pi R\left[-2R^2\sqrt{R^2-t}\Big|_0^{R^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(R^2-t)^3}\Big|_0^{R^2}\right]=\pi R\left[2R^3+\frac{2}{3}R^3\right]=\frac{8}{3}\pi R^4.$$

Ответ: $m=\frac{8}{3}\pi R^4$.

Задания

Задание 2.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода.

47) $\iint\limits_{\sigma} xyz d\sigma$; σ - часть плоскости $x + y + z = 1$,лежащая в первом октанте.

48) $\iint\limits_{\sigma} xyz d\sigma$; σ - часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

49) $\iint\limits_{\sigma} \left(7y^2 - 3x^2 - 3z^2\right) d\sigma$; σ - часть поверхности конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, вырезаемая цилиндром $x^2 + z^2 = 2x$.

50) $\iint\limits_{\sigma} \left(x^2 + 2y^2z^2 + y^4 + z^4\right) d\sigma$; σ - часть плоскости $x + y + z = 2$, вырезаемая цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

51) $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + 9x^2 + 9z^2}\, d\sigma$; σ - часть поверхности $y = 3xz$, вырезанная цилиндром $\left(x^2 + z^2\right)^2 = 8xz$.

52) $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + y^2 + z^2}\, d\sigma$; σ - часть поверхности $2x = y^2 - z^2$, вырезанная цилиндром $\left(x^2 + z^2\right)^2 = 4\left(y^2 - z^2\right)$.

Задание 2.2. Найти площадь поверхности:

53) Сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + 4y^2 = 4$.

54) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy$.

Задание 2.3. Найти массу поверхности σ

55) σ- полусфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\gamma(x, y, z) = x^2y^2$.

56) $\sigma : x + y + z = 4$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, если в каждой ее точке поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^4 + 2x^2z^2$.

Ответы: **47.** $\frac{160}{3}\pi$; **48.** 0; **49.** $6\sqrt{2}\pi$; **50.** $\frac{29}{6}\sqrt{3}\pi$; **51.** $2(2 + 9\pi)$; **52.** $2(2 + \pi)$; **53.** $\frac{16}{3}\pi$; **54.** $4a^2$; **55.** $\frac{128}{15}\pi$; **56.** $\frac{286}{3}\pi\sqrt{3}$.

2.2 Поверхностный интеграл второго рода.

Определение 1: Поверхность называется двухсторонней, если при перемещении основания вектора нормали вдоль любого замкнутого контура направление нормали при возвращении в исходную точку не меняется. В противном случае, поверхность называется односторонней.

Примерами двусторонних поверхностей являются плоскости, все поверхности второго порядка. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мебиуса.

Двусторонняя поверхность, у которой фиксирована одна из сторон называется ориентированной.

Если незамкнутая двухсторонняя поверхность σ однозначно проецируется на плоскость xOy, т.е. ее уравнение можно записать в явном виде $z = z(x, y)$, то за положительную по отношению к оси Oz сторону поверхности σ - «сторону σ_z^+» выбирают ту сторону поверхности σ, которая видна со стороны положительного направления оси z, если смотреть на плоскость xOy. Сторону поверхности σ, которая не видна со стороны положительного направления оси z, называют отрицательной по отношению к оси Oz - σ_z^-.

Аналогично определяются $\sigma_x^\pm$, $\sigma_y^\pm$.

Если двухсторонняя поверхность σ замкнутая, то за σ^+ принимается внешняя, а σ^- - внутренняя стороны σ.

Пусть σ - гладкая двухсторонняя ориентированная поверхность. Пусть $R(x, y, z)$ - непрерывная функция, определенная на поверхности σ. Разобьем σ системой гладких кривых на элементарные площадки σ_i площадью $\Delta\sigma_i$ каждая. Внутри каждой элементарной площадки выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \,. \tag{2.10}$$

$\Delta x_i \Delta y_i$ - площадь проекции $\Delta\sigma_i$ на плоскость Oxy, причем $\Delta x_i \Delta y_i > 0$, если на σ выбрана сторона σ^+ и $\Delta x_i \Delta y_i < 0$, если на σ выбрана сторона σ^-.

Интегральная сумма (2.10) называется интегральной суммой для функции $R(x, y, z)$ на поверхности σ по координатам x, y.

Определение 2: Поверхностным интегралом второго рода (поверхностным интегралом по координатам x, y) от функции $R(x,y,z)$ по ориентированной поверхности σ называется предел интегральной суммы (2.10) при $n \to \infty$:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \,. \tag{2.11}$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода по координатам (x,z) и (y,z).

Если на гладкой двухзначной ориентированной поверхности σ заданы три непрерывные функции $R(x,y,z)$, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, то поверхностным интегралом второго рода называют выражение:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \,. \tag{2.12}$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает всеми теми же свойствами, что и поверхностный интеграл первого рода за исключением одного: при изменении стороны поверхности, знак интеграла (2.12) меняется на противоположный.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода (2.12) сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода следующим образом:

Пусть поверхность σ задана уравнением $F(x,y,z) = 0$. Тогда единичный вектор нормали к поверхности σ определяется как

$$\vec{n}^{o} = \pm(grad\ F)/|grad\ F|, \tag{2.13}$$

где $grad\ F = \dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$.

Знак $\pm$ выбирается в зависимости от того, положительная или отрицательная стороны поверхности выбраны.

Из (2.13) следует, что косинусы углов, которые нормаль образует с координатными осями равны:

$$\cos\alpha = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{|\vec{n}|}; \quad \cos\beta = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{|\vec{n}|}; \quad \cos\gamma = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{|\vec{n}|}. \tag{2.14}$$

Знак «$\pm$» должен быть согласован с выбранной стороной поверхности.

Учитывая, что $\Delta x_i \Delta y_i = \cos\gamma\Delta\sigma_i$, $\Delta x_i \Delta z_i = \text{c}\quad\beta\Delta\sigma_i$, $\Delta y_i \Delta z_i = \cos\alpha\Delta\sigma_i$, получаем

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\sigma} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma \right) d\sigma. \qquad (2.15)$$

Далее полученный интеграл (2.15) вычисляется по правилам, изложенным в предыдущем параграфе.

Пусть на гладкой двухсторонней ориентированной поверхности σ задана векторная функция

$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Вектор единичной нормали к поверхности имеет вид: $\vec{n}^{o} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

Тогда поверхностный интеграл (2.12) может быть записан в виде:

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma} \left(\vec{a} \cdot \vec{n}^{o} \right) d\sigma. \qquad (2.16)$$

Если уравнение поверхности σ задано явно, например, как $z = z(x,y)$, то поверхностный интеграл (2.16) может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} Pdzdy + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left(\vec{a} \cdot \vec{n} \right)\Big|_{z=z(x,y)} dxdy\ . \qquad (2.17)$$

Интеграл, стоящий в правой части (2.17) - двойной интеграл по плоской области D_{xy} - проекции σ на координатную плоскость xOy, $\vec{n}$ - вектор нормали: $\vec{n} = \left\{ -z'_x, -z'_y, 1 \right\}$, запись $\left(\vec{a} \cdot \vec{n} \right)\Big|_{z=z(x,y)}$ означает, что в скалярном произведении переменную z везде следует заменить на $z(x,y)$. Знак перед интегралом выбирается в зависимости от того, по положительной или отрицательной стороне поверхности σ ведется интегрирование.

Если уравнение σ задано явно, как $x = x(y,z)$, то

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{yz}} \left(\vec{a} \cdot \vec{n} \right)\Big|_{x=x(y,z)} dydz, \qquad (2.18)$$

где D_{yz} - проекция σ на плоскость yOz, $\quad \vec{n} = \left\{ 1; -x'_y; -x'_z \right\}$.

В случае, если σ: $y = y(x,z)$, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{xz}} \left(\vec{a} \cdot \vec{n} \right)\Big|_{y=y(x,z)} dxdz, \qquad (2.19)$$

где D_{xz} - проекция σ на плоскость xOz, $\quad \vec{n} = \left\{ -y'_x; 1; -y'_z \right\}$.

В общем случае, для вычисления поверхностного интеграла второго рода (2.12) необходимо вычислить три интеграла, соответствующих проекциям на три координатные плоскости:

$$\iint\limits_{\delta} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm$$
$$\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy, \tag{2.20}$$

где D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} - проекции σ на координатные плоскости. Однако, если поверхность σ задана уравнением $F(x,y,z)=0$, которое можно однозначно разрешить относительно одной из переменных, то вместо вычисления трех интегралов в (2.20) можно воспользоваться одной из формул (2.17)-(2.19). Если незамкнутая поверхность σ неоднозначно проецируется на координатные плоскости, то ее следует разбить на части, однозначно проецирующиеся на одну из координатных плоскостей.

Пример 18. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(3x+z)dydz+(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy$, где σ - верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте.

Решение: I-й способ: Обозначим проекции поверхности σ на координатные плоскости через D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} - соответственно (рис. 32). Тогда $\iint\limits_{\sigma}(3x+z)dydz+(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy = I_1+I_2+I_3$, где

$$I_1 = \iint\limits_{\sigma}(3x+z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}}\left(3\left(1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}\right)+z\right)dydz = \iint\limits_{D_{yz}}\left(3-\frac{3y}{2}\right)dydz =$$

$$= 3\int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}y}\left(1-\frac{y}{2}\right)dz = 3\int_0^2\left[\left(1-\frac{y}{2}\right)\cdot z\Big|_0^{3-\frac{3}{2}y}\right]dy = 9\int_0^2\left(1-\frac{y}{2}\right)^2 dy =$$

$$= -9\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{y}{2}\right)^3\Big|_0^2 = 6.$$

$$I_2 = \iint\limits_{\sigma} (3x+3)dxdz = 3 \iint\limits_{D_{xz}} (x+1)\,dxdz = 3\int\limits_0^1 (x+1)dx \int\limits_0^{3(1-x)} dz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \left[(x+1)\cdot z\big|_0^{3(1-x)}\right]dx = 9\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = 9\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 6.$$

$$I_3 = \iint\limits_{\sigma} (y+z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\left(3-3x-\frac{3}{2}y\right)+y\right)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(3-3x-\frac{y}{2}\right)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2(1-x)} \left(3(1-x)-\frac{y}{2}\right)dy = 3\int\limits_0^1 \left[3(1-x)y - -\frac{y^2}{4}\right]\Bigg|_0^{2(1-x)} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (6(1-x)^2-(1-x)^2)dx = 5\int\limits_0^1 (1-x)^2dx = -\frac{5}{3}(1-x)^3\big|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

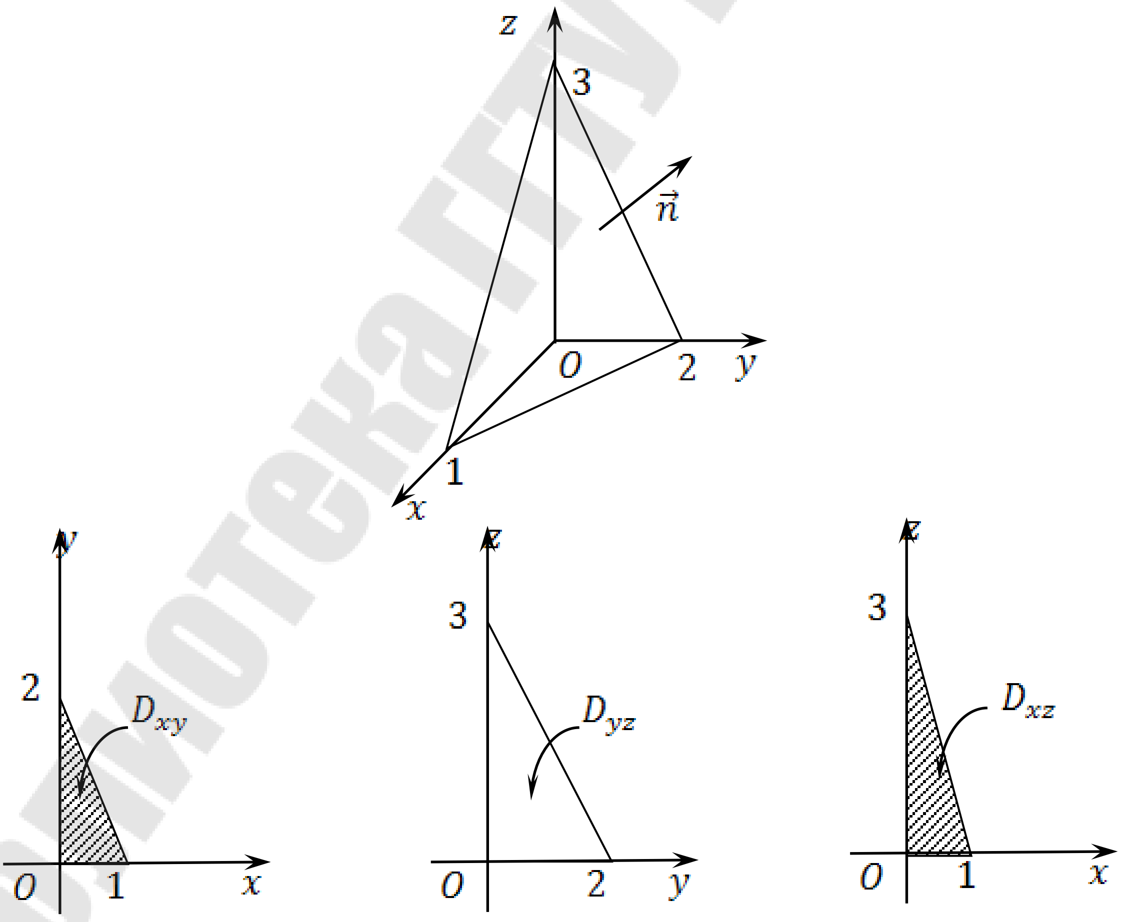


Рис. 32

Таким образом,

$$\iint_{\sigma}(3x+z)dydz+|(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy=6+6+\frac{5}{3}=\frac{41}{3}.$$

II способ:Рассмотрим векторное поле $\vec{a}=(3x+z)\vec{i}+(3x+3)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$.Найдем z из уравнения поверхности $z=3-3x-\frac{3}{2}y$;

$z'_x=-3;\quad z'_y=-\frac{3}{2}$, тогда вектор нормали $\vec{n}=\left\{3;\frac{3}{2};1\right\}$. Поверхность σ однозначно проецируется на плоскость xOy, поэтому для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (2.17)

$$\iint_{\sigma}(3x+z)dydz+(3x+3)dxdz+(y+z)dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[3\cdot(3x+z)+\frac{3}{2}(3x+3)+1(y+z)\right]\Bigg|_{z=3-3x-\frac{3}{2}y}dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[9x+9-9x-\frac{9}{2}y+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}+y+3-3x-\frac{3}{2}y\right]dxdy=$$

$$=\iint_{D}\left(\frac{33}{2}+\frac{3}{2}x-5y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}\left(\frac{33}{2}+\frac{3}{2}x-5y\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{33y}{2}+\frac{3xy}{2}-\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2(1-x)}dx=\left(-\frac{33}{2}(1-x)^2+\frac{3x^2}{2}-x^3\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{33}{2}+\frac{3}{2}-1-\frac{10}{3}=\frac{41}{3}.$$

Ответ: $I=\frac{41}{3}$.

<u>*Пример 19.*</u> Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\sigma}zdydz+(y+z^2)dxdz+(x^2-x)dxdy,$$

σ - часть поверхности $y=1+x^2+z^2$, отсеченная плоскостью $y=3$. Рассмотреть сторону σ, которая видна из начала координат.

<u>Решение:</u> Поверхность σ задана явным уравнением $y = y(x,z)$. На плоскость xOz σ проецируется в круг $D_{xz}: x^2 + z^2 = 2$ По условию, рассматривается сторона, которая видна из начала координат, следовательно, она не видна со стороны положительного направления Oy, поэтому это σ^-. В силу этого, вектор нормали к повепхности выберем в виде $\vec{n} = \{y'_x; -1; y'_z\} = \{2x; -1; 2z\}$.(рис 33)

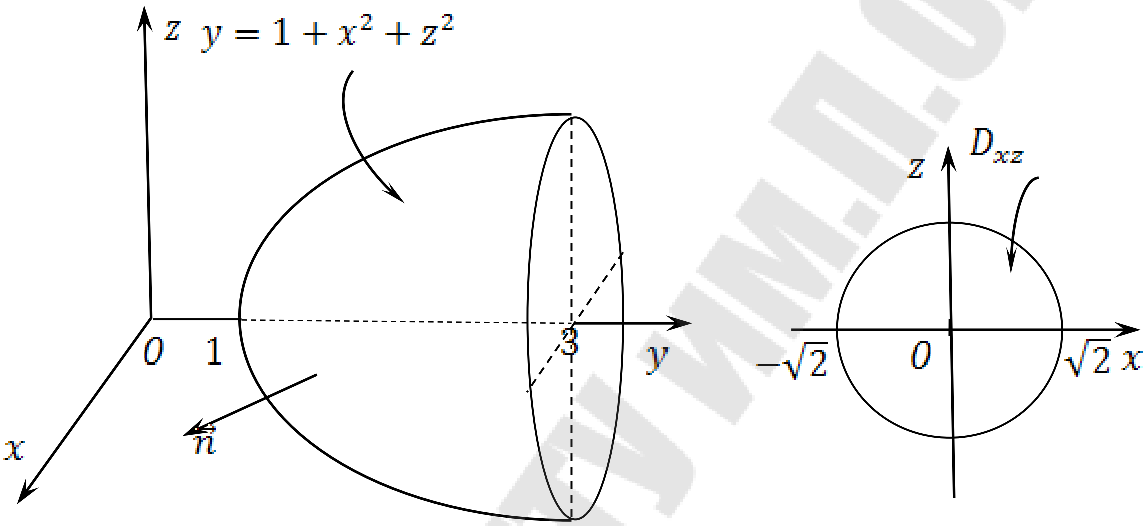


Рис. 33

По условию:

$\vec{a} = z\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} + (x^2 - x)\vec{k}$, тогда

$\vec{a} \cdot \vec{n} = z \cdot (2x) + (y + z^2) \cdot (-1) + (x^2 - x) \cdot (2z) = 2zx^2 - y - z^2.$

$(\vec{a} \cdot \vec{n})\big|_{y=1+x^2+z^2} = 2x^2z - 1 - x^2 - z^2 - z^2 = -1 - x^2 - 2z^2 + 2x^2z.$

Таким образом, согласно (2.19), искомый интеграл равен:

$$I=\iint\limits_{\sigma} zdydz+\left(y+z^2\right)dxdz+\left(x^2-x\right)dxdy=$$
$$=-\iint\limits_{D_{xz}}\left(1-2xz^2+x^2+2z^2\right)dxdz.$$

Полученный двойной интеграл вычислим, переходя к полярным координатам:

$$x=\rho\cos\varphi\varphi\in[0;2\pi],$$
$$z=\rho\sin\varphi\rho\in\left[0;\sqrt{2}\right],$$

$$I=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}(1-2\rho^3\cos\varphi\, sin^2\varphi+\rho^2cos^2\varphi+2\rho^2sin^2\varphi)\rho d\rho=$$
$$=-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{2\rho^5}{5}\cos\varphi\, sin^2\varphi+\frac{\rho^4}{4}(cos^2\varphi+2sin^2\varphi)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=$$
$$=-\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{8\sqrt{2}}{5}\cos\varphi\, sin^2\varphi+1+sin^2\varphi\right)d\varphi=-\int_0^{2\pi}(2+sin^2\varphi)d\varphi=$$
$$=-\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=-\frac{5\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\Bigg|_0^{2\pi}=-5\pi.$$

Ответ: -5π.

Задания

Задание 2.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

57) $\iint\limits_{\sigma} yzdydz+xzdzdx+xydxdy;$ σ - внешняя сторона поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=a$.

58) $\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)dxdy;$ σ - внешняя сторона части поверхности $z=\sqrt{9-x^2}$, отсеченной плоскостями $y=0;\ y=2$.

59) $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+z^2+3y^2\right)dxdz;$ σ - внешняя сторона части поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0;\quad y=1$.

60) $\iint\limits_{\sigma}(2x+3y+4z)dxdy, \sigma$ - верхняя сторона плоскости $x+y+z-6=0$, вырезанная цилиндром $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

Ответы: **57.** 0; **58.**88; **59.** -32π; **60.**144π.

2.3 Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского-Гаусса.

Пусть в пространственной области V задана векторная функция $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ и некоторая ориентированная поверхность σ.

Пусть $\vec{n}^o$ - вектор единичной нормали к заданной стороне поверхности $\vec{n}^o=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

Определение: Потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ называется интеграл

$$\prod{}_{\sigma}(\vec{a})=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a}\cdot\vec{n}^o)d\sigma. \tag{2.21}$$

Свойства потока векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ:

- $\prod_{\sigma^+}(\vec{a})=\prod_{\sigma^-}(\vec{a})$, где $\sigma^{\pm}$- положительная и отрицательная стороны поверхности σ.
- Если σ состоит из нескольких поверхностей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, то $\prod_{\sigma}(\vec{a})=\prod_{\sigma_1}(\vec{a})+\prod_{\sigma_2}(\vec{a})+\ldots+\prod_{\sigma_n}(\vec{a})$.

Физический смысл потока зависит от природы векторного поля $\vec{a}$:

Если $\vec{a}$- поле скоростей несжимаемой жидкости, σ- незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}^o$, то поток $\prod_{\sigma}(\vec{a})$ равен количеству жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ. Если σ-замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область V, тогда $\prod_{\sigma}(\vec{a})$- разность между количеством жидкости, которое втекает и вытекает из V через поверхность σ за единицу времени.

Если $\prod_{\sigma}(\vec{a})>0$, это означает, что из области V вытекает больше жидкости, чем втекает, т.е. внутри области V имеются *источники* - точки, из которых жидкость вытекает.

Если $\prod_{\sigma}(\vec{a})<0$, это означает, что из области V вытекает жидкости меньше жидкости, чем в нее втекает, т.е. внутри области V имеются *стоки* - точки в которые жидкость втекает.

В случае $\prod_\sigma(\vec{a})=0$ количество жидкости вытекшей из V равно количеству жидкости втекшей в V.

Если $\vec{a}$ - силовое поле, то говорят, что $\prod_\sigma(\vec{a})$ выражает количество силовых (векторных) линий, пронизывающих в единицу времени поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$. Если σ - замкнутая поверхность, то $\prod_\sigma(\vec{a})$ равен разности числа векторных линий входящих и выходящих из области G, ограниченной поверхностью σ. Как и в случае с жидкостью, $\prod_\sigma(\vec{a})>0$ означает, что в области G имеются источники, $\prod_\sigma(\vec{a})<0$ означает, что в G есть стоки.

Вычисление потока векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ.

Сравнивая формулу (2.21) с (2.17) видим, что вычисление потока векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ состоит в вычислении соответствующего поверхностного интеграла второго рода:

$$\prod_\sigma(\vec{a})=\iint_\sigma(\vec{a}\vec{n}^o)d\sigma=\iint_\sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma= \\ =\iint_\sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy. \tag{2.22}$$

В случае, если σ - часть цилиндрической поверхности $x^2+y^2=a^2$, ограниченная поверхностями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ $(z_1(x,y)\le z_2(x,y))$, то поток векторного поля $\vec{a}$ через σ удобно вычислять, переходя к цилиндрическим координатам:

$$\prod_\sigma(\vec{a})=\pm\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{z_1(a\cos\varphi,a\sin\varphi)}^{z_2(a\cos\varphi,a\sin\varphi)}(xP+yQ)\Big|_{\substack{x=a\cos\varphi\\ y=a\sin\varphi\\ z=z}}dz\,. \tag{2.23}$$

В случае, если σ - часть сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, ограниченная коническими поверхностями $\theta=\theta_1(\varphi)$ и $\theta=\theta_2(\varphi)$ $(\theta_1(\varphi)\le\theta_2(\varphi))$ и полуплоскостями $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$, поток $\prod_\sigma(\vec{a})$ удобно вычислять, используя сферические координаты:

$$\prod_\sigma(\vec{a})=\pm a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}(xP+yQ+zR)\Big|_{\substack{x=a\cos\varphi\sin\theta\\ y=a\sin\varphi\sin\theta\\ z=a\cos\theta}}\sin\theta d\theta. \tag{2.24}$$

Если компоненты поля $\vec{a}$ - функции P,Q,R имеют частные производные в каждой точке $M(x,y,z)\in V$ по x,y,z соответственно, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью σ, то справедлива формула:

$$\oiint_{\sigma}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}^{o}\right)d\sigma=\iiint_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,. \qquad (2.25)$$

Формула (2.25) называется формулой Остроградского-Гаусса.

Учитывая, что поверхностный интеграл, стоящий в левой части (2.25) равен потоку векторного поля $\vec{a}$ через поверхность σ в направлении внешней нормали, а подинтегральное выражение, входящее в тройной интеграл, стоящий в правой части (2.25) - равно дивергенции поля $\vec{a}$:

$$div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,, \qquad (2.26)$$

формула Остроградского-Гаусса может быть записана в следующей векторной форме:

$$\prod\nolimits_{\sigma}(\vec{a})=\iiint_{V}div\vec{a}\,dxdydz\,, \qquad (2.27)$$

т.е. поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ во внешнюю ее сторону численно равен тройному интегралу от дивергенции поля $\vec{a}$ по области V, ограниченной поверхностью σ.

Пример 20. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через нижнюю сторону плоского треугольника с вершинами в точках $A(2;0;0)$ $B(0;2;0)$ $C(0;0;2)$

Решение: Изобразим треугольник ABC и его проекцию D_{xy} на плоскость xOy (рис.34)

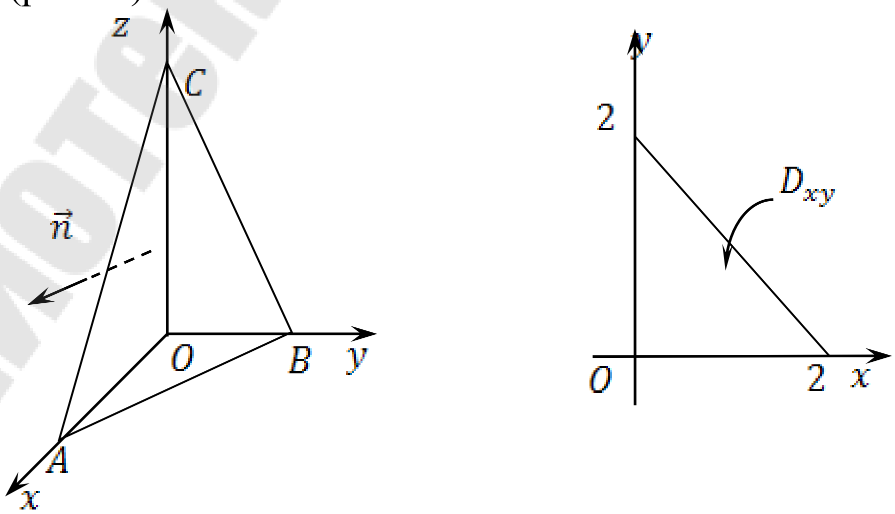


Рис. 34

Поток поля $\vec{a}$ через нижнюю сторону ΔABC равен, согласно (2.21)

$$\prod_{ABC}(\vec{a}) = -\iint_{ABC}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}^{o}\right)d\sigma,$$

ΔABC принадлежит плоскости: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$, ограниченной плоскостями $x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой (2.17). Для этого выразим z из уравнения поверхности: $z = 2 - x - y$. Тогда $\vec{n} = \{1;1;1\}$, следовательно

$$\prod_{ABC}(\vec{a}) = -\iint_{D_{xy}}\left(y\cdot 1 + z\cdot 1 + x\cdot 1\right)\Big|_{z=2-x-y} dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}}\left(y + 2 - x - y + x\right)dxdy = -2\iint_{D_{xy}} dxdy = -2\int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy =$$

$$= -2\int_0^2 (2-x)dx = -2\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -2(4-2) = -4.$$

Ответ: $\prod_{ABC}(\vec{a}) = -4$.

<u>Пример 21.</u> Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} - z^2\cos y\,\vec{k}$ через внешнюю сторону части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, которая лежит в третьем октанте и ограничена плоскостями $z = 0$ и $x + y + z = 4$.

Решение: Для вычисления потока перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = 2\cos\varphi,$$
$$y = 2\sin\varphi,$$
$$z = z.$$

По условию: $\varphi \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 4 - x - y; \vec{n} = \{0,1,0\}$.

Поток вычислим по формуле (2.23) (взяв знак «+» перед интегралом).

$$\prod_{\sigma}(\vec{a}) = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{4-x-y} (xy + yx)\Big|_{\substack{x=2\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \\ z=z}} dz =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} 2\cdot 4\cos\varphi\sin\varphi\, dz =$$

$$= 8\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, z\Big|_0^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 16\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} (\sin 2\varphi - \sin\varphi\, cos^2\varphi - \cos\varphi\, sin^2\varphi)d\varphi = 8\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \sin 2\varphi\, d(2\varphi) +$$

$$+16\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} cos^2\varphi d(\cos\varphi) - 16\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} sin^2\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= -8\cos 2\varphi\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + 16\frac{cos^3\varphi}{3}\Bigg|_{\pi}^{3\pi/2} - 16\frac{sin^3\varphi}{3}\Bigg|_{\pi}^{3\pi/2} =$$

$$= -8(-1-1) + \frac{16}{3}(0+1) - \frac{16}{3}(-1-0) = 16 + \frac{32}{3} = \frac{80}{3}.$$

Ответ: $\prod_{\sigma}(\vec{a}) = \dfrac{80}{3}$.

<u>Пример 22.</u> Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (z^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 y - z^2)\vec{j} + (zy^2 - x^2)\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ: $\left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ в направлении внешней нормали.

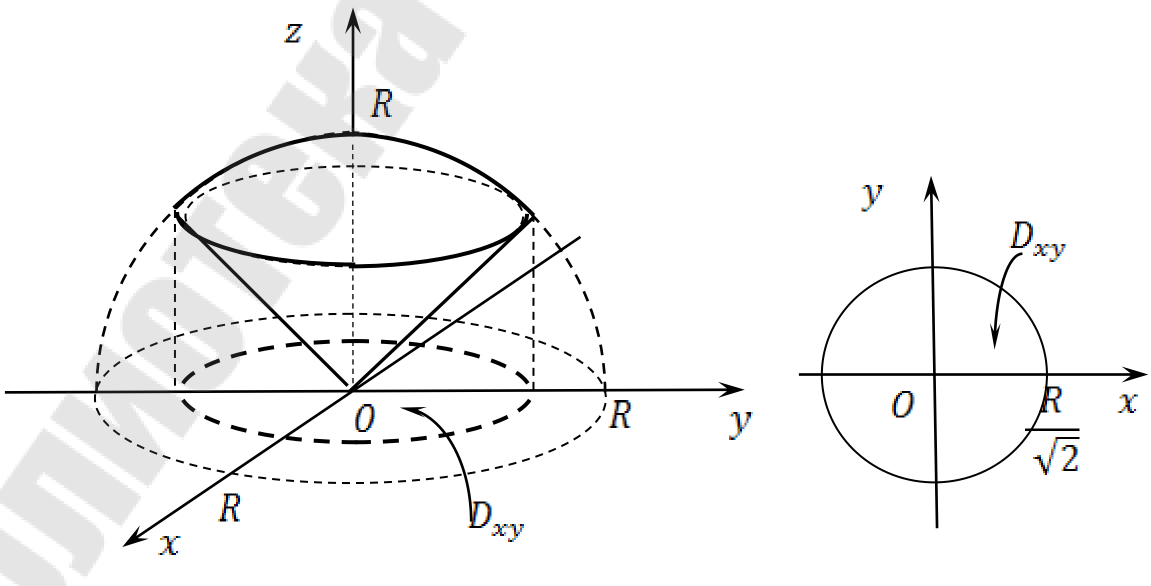


Рис. 35

<u>Решение</u>: Найдем заданный поток с помощью формулы Остроградского-Гаусса (2.27). (Рис. 35)

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2 - y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y - z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(zy^2 - x^2\right) = x^2 + y^2.$$

Искомый поток равен:

$$\prod\nolimits_{\sigma}(\vec{a}) = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right)dz =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy.$$

Подставляя уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в уравнение сферы, получаем: $2\left(x^2 + y^2\right) = R^2$, следовательно, D_{xy}- круг $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$. Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам. Тогда

$$\prod\nolimits_{\sigma}(\vec{a}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\sqrt{2}} \rho^2\left(\sqrt{R^2 - \rho^2} - \rho\right)\rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{R/\sqrt{2}} \rho^2\sqrt{R^2 - \rho^2}\,d(\rho^2) - \int_0^{R/\sqrt{2}} \rho^4 d\rho\right) = \left\{\begin{gathered} R^2 - \rho^2 = t^2, \rho^2 = R^2 - t^2, \\ d(\rho^2) = -2tdt, \\ t_{\text{н}} = R, t_{\text{в}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \end{gathered}\right\} =$$

$$= 2\pi\left(\int_{R/\sqrt{2}}^{R} (R^2 - t^2)t^2 dt - \frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^{R/\sqrt{2}}\right) = 2\pi\left(\left(\frac{R^2 t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\bigg|_{R/\sqrt{2}}^{R} - \frac{R^5}{20\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \pi R^5 \frac{8 - 5\sqrt{2}}{30}.$$

Ответ: $\prod_{\sigma}\left(\vec{a}\right) = \pi R^5 \frac{8-5\sqrt{2}}{30}$.

Задания

<u>Задание 2.5</u> Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами:

а) использовав определенные потока;

б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

61) $a(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k};(p):2x+y+3z=6$

62) $a(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k};(p):2x+y+2z=2$.

<u>*Задание 2.6.*</u> С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить следующие поверхностные интегралы.

63) $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где σ - внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le a;\ 0\le y\le a;\ 0\le z\le a$.

64) $\iint\limits_{\sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$, где σ - наружная сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x+y+z=a;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$

65) $\iint\limits_{\sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, σ - внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Ответы: **61.** 18; **62.**$\frac{1}{3}$; **63.**$3a^4$; **64.**$\frac{1}{2}a^3$; **65.**$\frac{12}{5}\pi R^5$.

2.4 Циркуляция векторного поля. Формула Стокса.

Пусть в области V задано векторное поле $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ и ориентированная гладка кривая L.

Линейным интегралом векторного поля $\vec{a}$ вдоль линии L называется интеграл вида:

$$W=\int\limits_L\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{dr}\right), \quad (2.28)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$. Тогда интеграл (2.28) может быть записан в виде

$$W=\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\ . \quad (2.29)$$

Если $\vec{a}$ - силовое поле, то линейный интеграл (2.28) равен работе, которую поле совершает при перемещении вдоль ориентированной линии L.

Пусть поле $\vec{a}$ - произвольное векторное поле, а L - замкнутая линия.

Циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L называется линейный интеграл от поля $\vec{a}$ по контуру L, проходимому в положительном направлении:

$$Ц_L(\vec{a}) = \oint_{L^+}(\vec{a}d\vec{r}) = \oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz\ . \qquad (2.30)$$

Циркуляция векторного поля характеризует вращательную способность поля на линии. Принято считать, что если $Ц_L(\vec{a}) > 0$, то линия L, расположенная в поле силы $\vec{a}$, вращается под действием силы $\vec{a}$ в положительном направлении. Соответственно, при $Ц_L(\vec{a}) < 0$, вращение происходит в отрицательном направлении. В случае, когда $Ц_L(\vec{a}) = 0$, линия L не вращается. Из (2.30) видно, что вычисление циркуляции поля $\vec{a}$ по контуру L сводится к вычислению соответствующего криволинейного интеграла второго рода. Однако, в большинстве случаев вычисление криволинейного интеграла (2.29) весьма громоздко. Вычисление в ряде случаев заметно упрощается, если воспользоваться формулой Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) d\sigma,$$

(2.31)

где σ - любая незамкнутая поверхность, опирающаяся на контур L. Ориентация σ должна быть согласована с направлением обхода L, таким образом, что на выбранной стороне σ вектор нормали $\vec{n}$ направлен так, что при наблюдении с его конца, обход контура L происходит против часовой стрелки.

Учитывая, что ротор вектора $\vec{a}$ определяется следующим образом:

$$rot\,\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}\,, \qquad (2.32)$$

формула 9.4. может быть записана в более компактном виде:

$$\oint_L(\vec{a}d\vec{r}) = \iint_\sigma (rot\,\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma. \qquad (2.33)$$

Интеграл, стоящий в правой части (2.33) представляет собой, согласно (2.21) поток вектора $rot\,\vec{a}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}^{\,o}$. Таким образом справедливо утверждение:

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L численно равна потоку вектора $rot\,\vec{a}$, через ориентированную поверхность σ, опирающуюся на контур L.

Следует отметить, что от поверхности σ требуется, чтобы она опиралась на контур L и только, поэтому, при практических расчетах удобно выбирать σ наиболее простого вида, например, если возможно, то плоскость.

При вычислении потока в (2.33) можно использовать формулы (2.17)-(2.19), заменив в них $\vec{a}$ на $rot\,\vec{a}$.

При вычислении $rot\,\vec{a}$ удобно пользоваться символической формой записи для $rot\,\vec{a}$:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (2.34)$$

Если векторное поле $\vec{a}$ - плоское, т.е. $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, то формула Стокса превращается в формулу Грина (1.31).

Пример 43. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ вдоль контура L, состоящего из части винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{bt}{2\pi}$ от точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;b)$ и отрезка прямой BA.

Решение. Согласно (2.30) $Ц_L(\vec{a}) = \int\limits_L (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz.$

L состоит из двух частей, поэтому

$$Ц_L(\vec{a}) = \int\limits_{\substack{x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=\frac{bt}{2\pi}}} (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz +$$

$$+ \int\limits_{BA} (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz = I_1 + I_2.$$

Вычислим I_1. Для этого найдем: $x' = -a\sin t,\quad y' = a\cos t,\quad z' = \dfrac{b}{2\pi}$.

Из условия следует, что $t \in [0;2\pi]$, поэтому, согласно (1.28)

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ (a\cos t - a\sin t)(-a\sin t) + \left(a\sin t - \frac{bt}{2\pi}\right) a\cos t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{bt}{2\pi} - a\cos t\right)\frac{b}{2\pi} \right\} dt = \int_0^{2\pi} \left\{ a^2\sin^2 t - \frac{bt}{2\pi} a\cos t + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{(2\pi)^2} t - \frac{ab}{2\pi}\cos t \right\} dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt - \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\cos t dt +$$

$$+ \frac{b^2}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} t dt - \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t dt = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\cos t dt +$$

$$+ \frac{b^2}{(2\pi)^2}\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{ab}{2\pi}\sin t\Big|_0^{2\pi} = \left\{ \begin{array}{c|c} u = t & du = dt \\ d\upsilon = \cos t dt & \upsilon = \sin t \end{array} \right\} = a^2\pi + \frac{b^2}{2} -$$

$$- \frac{ab}{2\pi}\left[t\sin t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin t dt \right] = a^2\pi + \frac{b^2}{2} - \frac{ab}{2\pi}\cos t\Bigg|_0^{2\pi} = a^2\pi + \frac{b^2}{2}.$$

Вычислим I_2. Найдем уравнение прямой ВА:

$$\frac{x-a}{a-a} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z-b}{0-b} \qquad \frac{x-a}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{b} = t, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = b - bt \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = -b \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t_B = 1 \\ t_A = 0, \end{array} \qquad \text{таким образом:}$$

$$I_2 = \int_1^0 -b(b - bt - a)dt = -b\left[(b-a)t - \frac{bt^2}{2} \right]\Bigg|_1^0 =$$

$$= b\left[b - a - \frac{b}{2} \right] = \frac{b}{2}(b - 2a).$$

Складывая I_1 и I_2 окончательно получаем: $Ц_L(\vec{a}) = \pi a^2 + b^2 - ab$.

Ответ: $Ц_L(\vec{a}) = \pi a^2 + b^2 - ab$.

Пример 44. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \left(z^3 + 2y^3 + 3y\right)\vec{i} + \left(y^3 - 2x^3 - xz^2\right)\vec{j} + \left(z^2 - 5xy^2\right)\vec{k}$ вдоль контура L, являющегося пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вычисление провести непосредственно и с помощью формулы Стокса.

Решение: Найдем явный вид контура L: (Рис. 36)

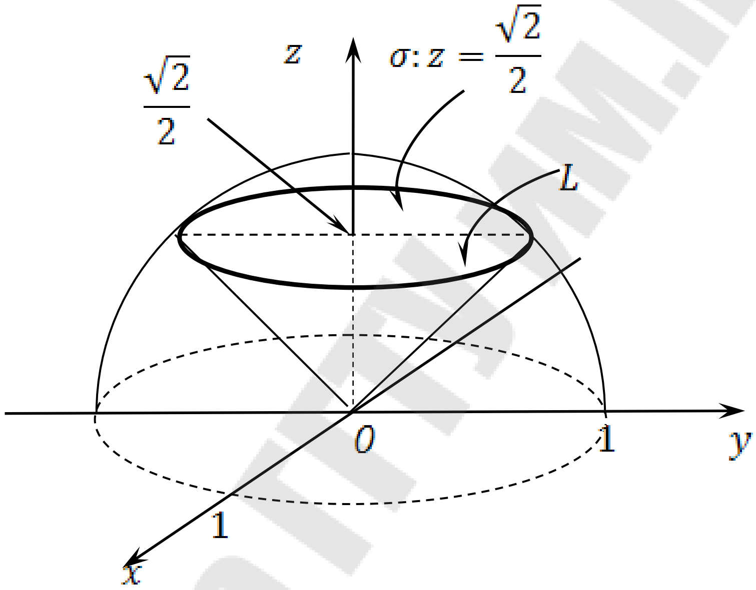


Рис. 36

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right) = 1 \\ z^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Таким образом видно, что L- окружность радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$, лежащая в плоскости $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Непосредственное вычисление.

$$Ц_L = \oint_L \left(z^3 + 2y^3 + 3y\right)dx + \left(y^3 - 2x^3 - xz^2\right)dy + \left(z^2 - 5xy^2\right)dz.$$

Запишем параметрические уравнения L:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

Тогда $x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \quad z' = 0.$

Таким образом,

$$Ц_L(\vec{a}) = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^3 t + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^3 t - \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^3 t - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4}\cos t \sin^2 t\right)\cdot 0\right]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin^4 t - \frac{3}{2}\sin^2 t + \frac{1}{4}\sin^3 t\cos t - \frac{1}{2}\cos^4 t - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\cos^2 t\right]dt = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}\left(\sin^4 t + \cos^4 t\right) - \frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{1}{4}\cos^2 t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\sin^3 t\cos t\right]dt = \frac{1}{4}\cos t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\left(1 - \cos 2t\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \cos 2t\right)\right]dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^3 t\, d(\sin t) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \right.$$

$$+\frac{1}{4}\cos^2 2t+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\cos 2t\Bigg]dt+$$

$$+\frac{1}{16}\sin^4 t\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{4}-\frac{5}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right]dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{9}{4}t-\frac{5}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t+\frac{1}{16}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{5}{2}\pi.$$

Вычисление по формуле Стокса.

В качестве поверхности, которая опирается на заданный контур L выберем часть плоскости $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ограниченной окружностью $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Нормаль $\vec{n}^o=\{0;0;1\}$. Проекцией σ на xOy является круг.

По формуле Стокса:

$$Ц_L(\vec{a})=\iint_\sigma\left(rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}_0\right)d\sigma=\iint_\sigma\left(rot\,\vec{a}\right)_z dxdy,$$

$$\left(rot\,\vec{a}\right)_z=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^3-2x^3-xz^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3+2y^3+3y\right)=$$

$$=-6x^2-z^2-6y^2-3,$$

таким образом,

$$Ц_L(\vec{a})=\iint_\sigma\left(-6x^2-z^2-6y^2-3\right)dxdy=-\iint_{D_{xy}}\left(6\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}+3\right)dxdy,$$

D_{xy} есть проекция σ на плоскость xOy - круг $x^2+y^2=\frac{1}{2}$.

Вычислим получившийся двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$Ц_L(\vec{a}) = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(6\rho^2 + \frac{7}{2}\right)\rho d\rho = -\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3}{2}\rho^4 + \frac{7}{4}\rho^2\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -2\pi\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: $Ц_L(\vec{a}) = \dfrac{-5\pi}{2}$.

Задания

Задание 2.7. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому контуру L двумя способами: а) использовав определение циркуляции; б) с помощью формулы Стокса.

66) $\vec{a}(M) = (2y - 3xz^2)\vec{i} - (2xz - 3y^2)\vec{j} + (y^2 - 3x^2)\vec{k}$, L – контур треугольника с вершинами $A(0,0,2)$, $B(0,1,2)$, $C(3,0,2)$.

67) $\vec{a}(M) = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$, L – контур треугольника, полученного пересечением плоскости (p): $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями.

Задание 2.8. Применяя формулу Стокса, найти данный интеграл.

68) $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, C- контур, полученный пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $x + y + z = 0$.

69) $\oint_C (3z^2 - y^3)dx + (x^3 - 2y^2z^2)dy + (2xyz - x^2y^2)dz$, C- контур, полученный пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ и плоскости $2x + z = 4$.

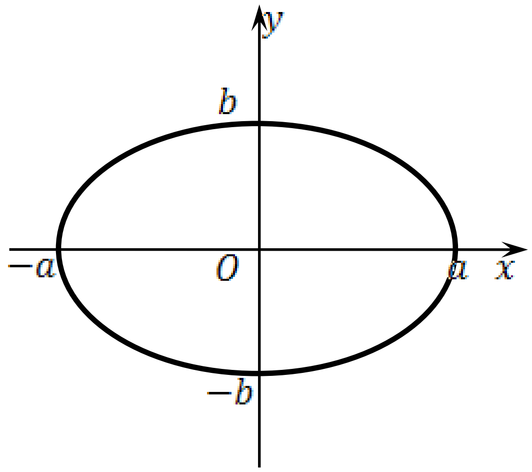
70) $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, C- эллипс, полученный пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + z = 1$.

Ответы: **66.** -9; **67.**-6; **68.**0; **69.**120π; **70.**4π;**8.**$-a^3$.

ЛИТЕРАТУРА

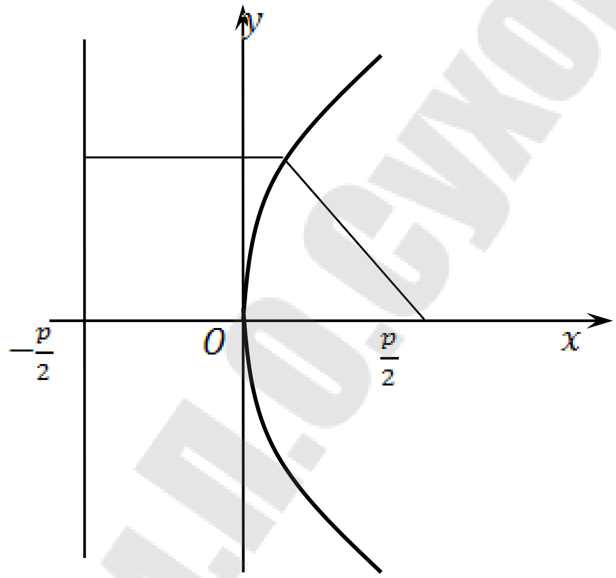
1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1968,1970,1978, 1985
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. Под ред. Демидовича Б.П. М.: Наука, 1972
4. Сборник индивидуальных задач по ВМ, уч.пособие в 3-х частях под ред. Рябушко А.П. Мн.: Выш.шк, 1991
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики,т.2. М.: Наука, 1974
6. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике, т. 2, Мн.: Высш.шк., 1988

ПРИЛОЖЕНИЕ



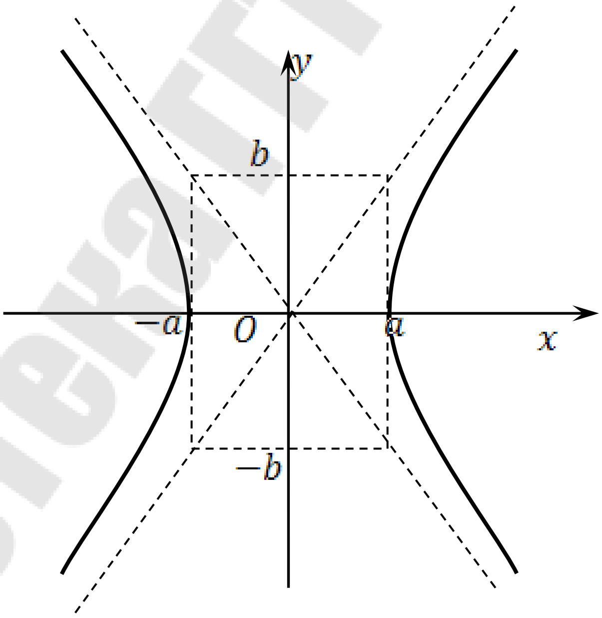
Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$



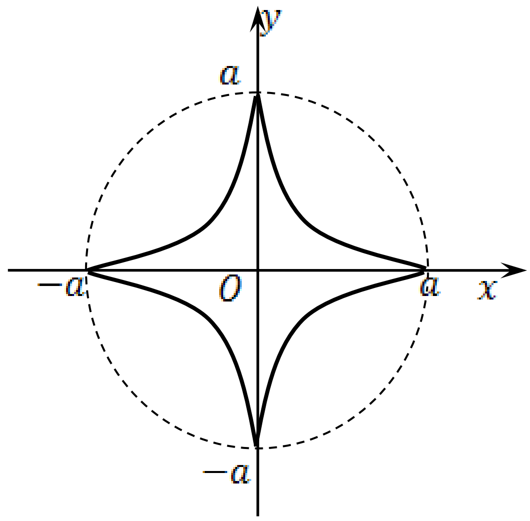
Парабола

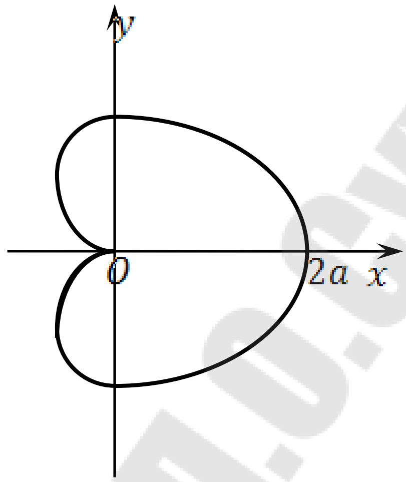
$$y^2=2px$$



Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=a\,cht \\ y=b\,sht \end{cases} \quad \text{(для правой ветви)}$$



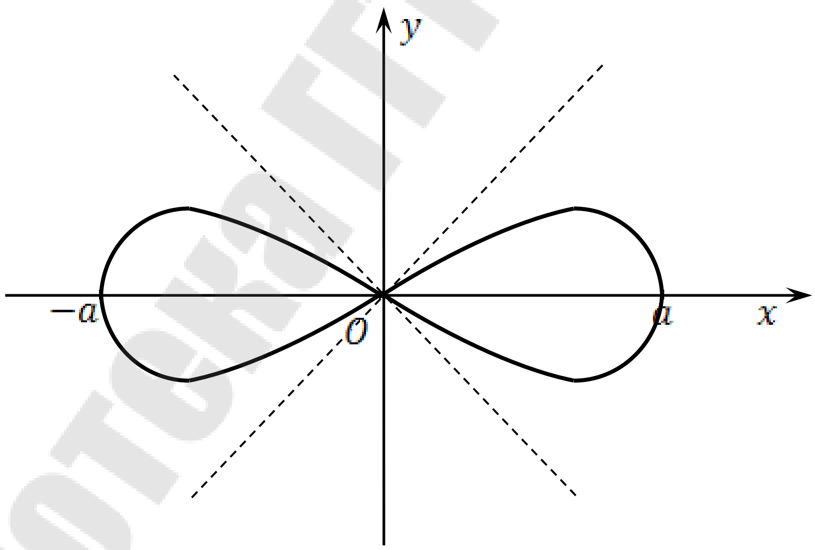


Гипоциклоида (астроида)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad \text{или} \quad x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$$

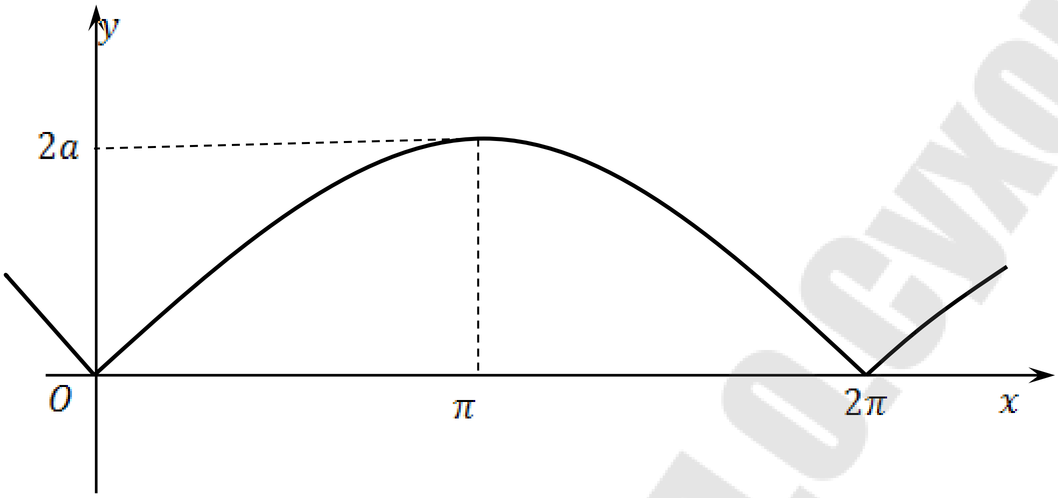
Кардиоида

$$r = a(1+\cos\varphi)$$



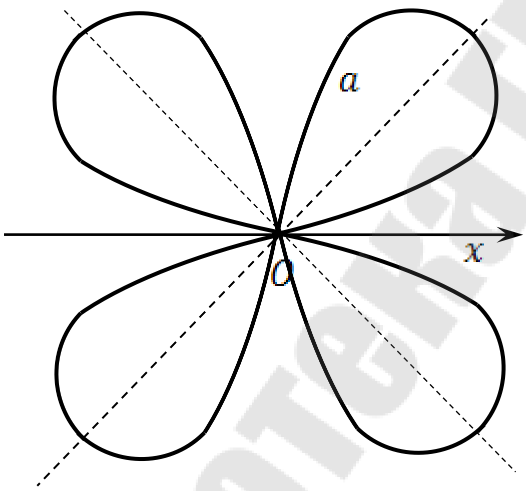
Лемниската Бернулли

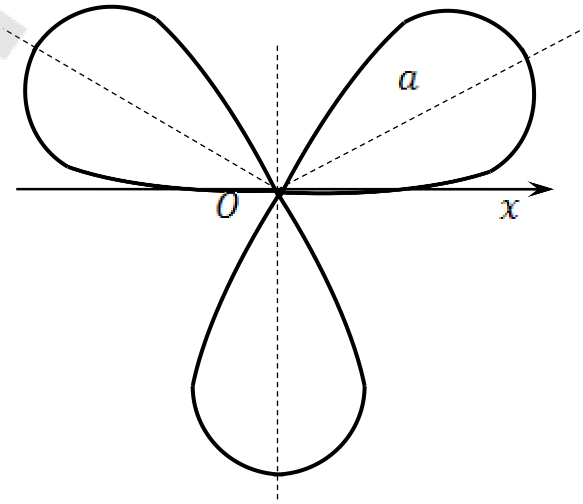
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \quad \text{или} \quad r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$



Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



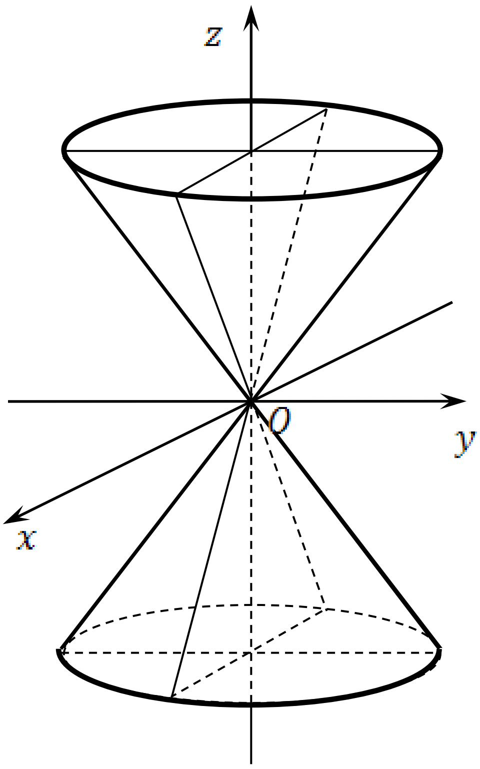


Четырехлепестковая роза

$$r = a\,|\sin 2\varphi|$$

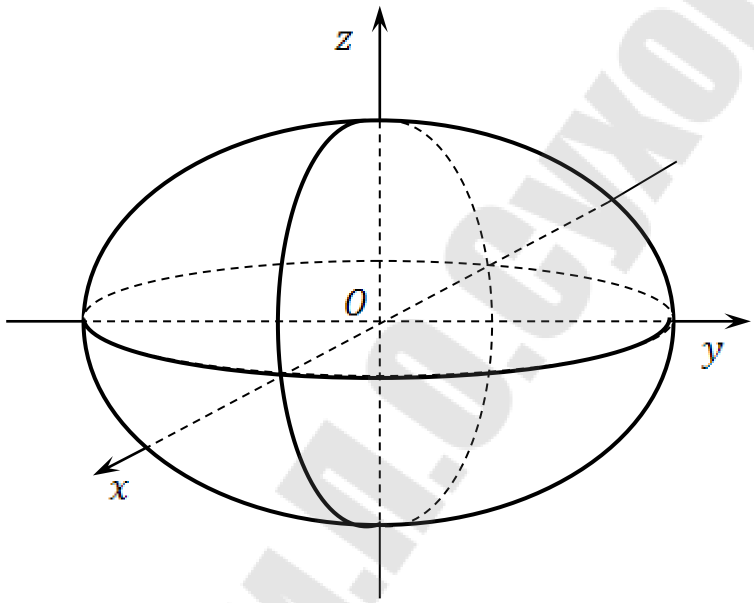
Трехлепестковая роза

$$r = a \sin 3\varphi$$



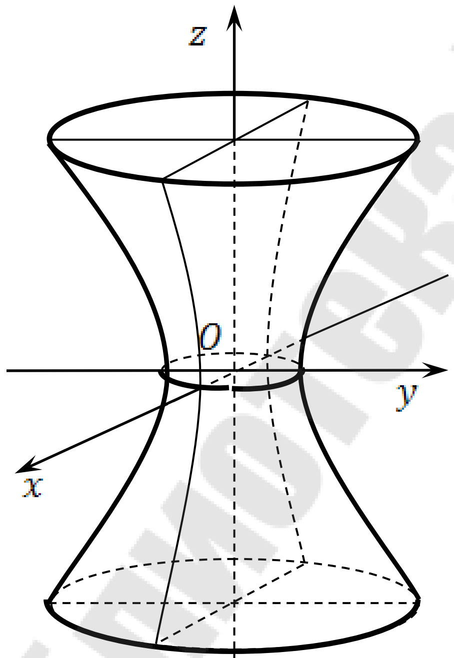
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



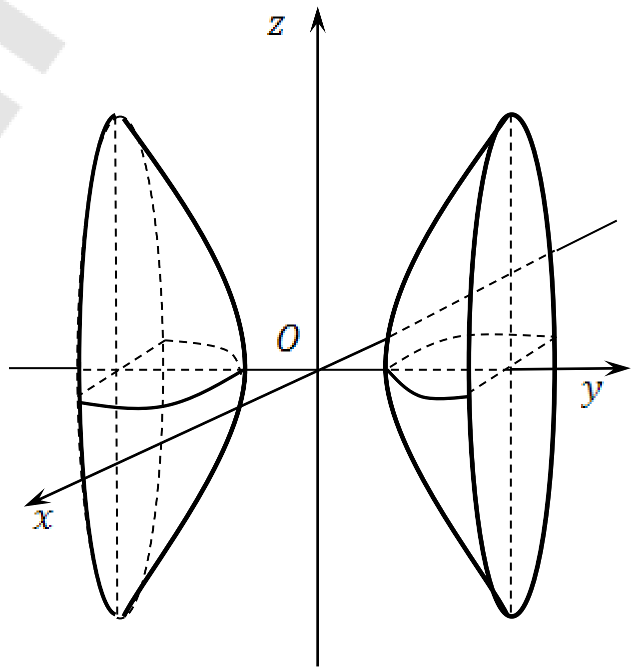
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



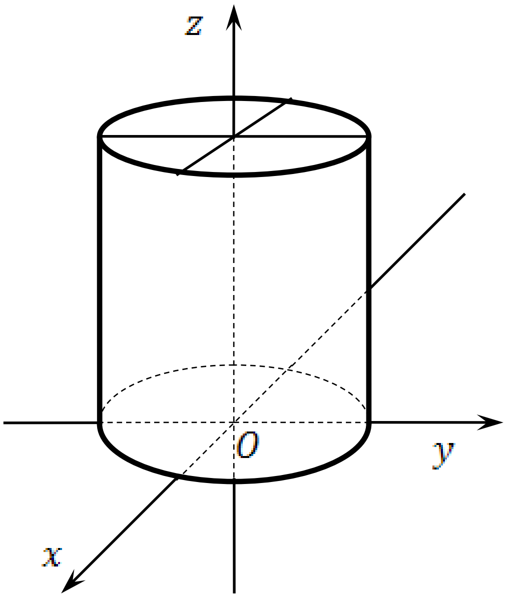
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



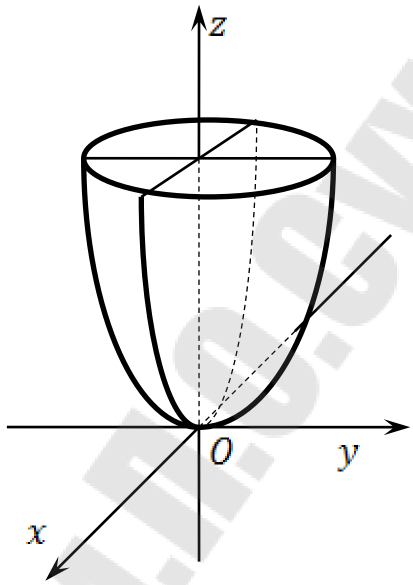
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



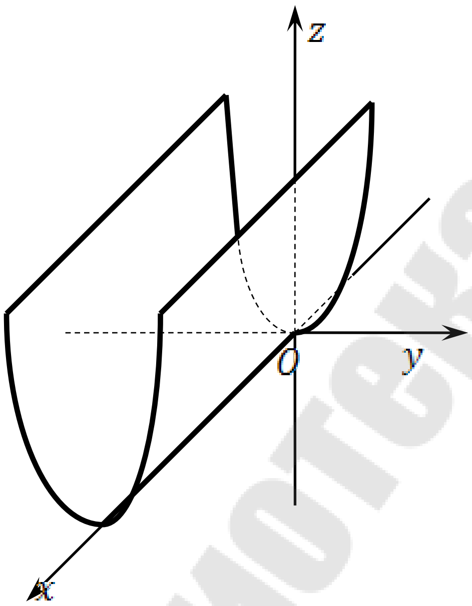
Цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



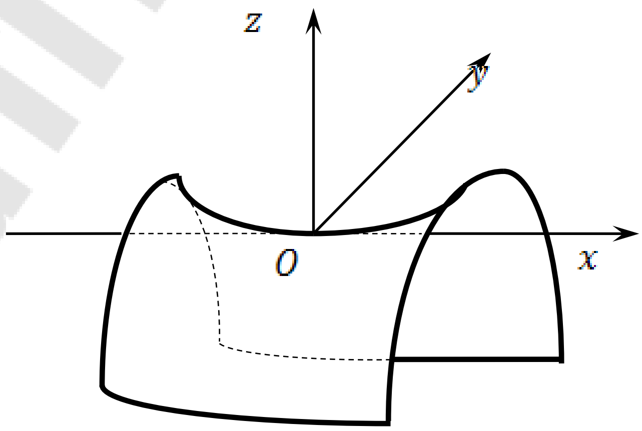
Параболоид

$$x^2+y^2=2pz$$



Параболический цилиндр

$$z=ay^2$$



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Авакян Елена Зиновьевна
Авякян Сергей Левонович
Иванейчик Ирина Владимировна

МАТЕМАТИКА. КРАТНЫЕ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пособие
по курсу «Математика» для студентов специальностей 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования», 1-36 04 02 «Промышленная электроника», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» дневной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 03.11.17.
Рег. № 1Е.
http://www.gstu.by