

УДК 532.516

## СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОСТИ ВИХРЕВОГО ПОЛЯ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

### Введение

Задача о течении вязкой жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами относится к классическим проблемам гидродинамики. Прикладные аспекты данного вопроса связаны с гидродинамической теорией смазки, с формированием вихревых структур в природных и технических гидродинамических системах. В данной работе рассматривается неклассический вариант задачи о течении жидкости между соосными вращающимися цилиндрами. А именно: учитывается рэлеевская сила сопротивления  $F = -\zeta v$ , где  $\zeta > 0$  – коэффициент «внешнего» трения;  $v$  – вектор скорости. Модель сопротивления Рэлея оказалась эффективной в задачах тепломассообмена при кристаллизации полупроводников в условиях орбитального полета [1]. Основная идея этого подхода состоит в том, что гидродинамическое описание расплава учитывает наличие кластерных образований, которые оказывают сопротивление течению. Обычно в теоретических расчетах используется линейный вариант силы трения:  $\zeta = \text{const}$ . Далее полагаем, что коэффициент сопротивления монотонно растет при увеличении  $|v|$  и является четной функцией скорости:  $\zeta = \zeta(v^2, T, r)$ ,  $\partial\zeta/\partial(v^2) > 0$ . Несколько новых аналитических решений стационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости с учетом нелинейной внешней силы сопротивления течению построены и изучены в [2]–[4]; в этих статьях были рассмотрены плоские двумерные движения.

Цель работы: изучить воздействие силы  $F = -\zeta v$  на завихренность течения жидкости между вращающимися цилиндрами.

### Постановка задачи

Для вязкой несжимаемой жидкости в полярных координатах  $(r, \varphi)$  рассмотрим следующий класс стационарных цилиндрических течений:

$$v_r \equiv 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r), \quad T = T(r); \quad (1)$$

$$F_r \equiv 0; \quad F_\varphi = F_\varphi(v^2, T, r); \quad q_v = q_v(v^2, T, r); \quad c_p, \lambda, \mu, \rho - \text{const};$$

$$\tau_{rr} \equiv 0; \quad \tau_{\varphi\varphi} \equiv 0; \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left( \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right).$$

Здесь  $\mathbf{v}(v_r, v_\varphi)$  – вектор скорости;  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{F}(F_r, F_\varphi)$  – вектор массовой силы;  $\tau_{rr}, \tau_{\varphi\varphi}, \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$  – компоненты девиатора тензора напряжений;  $T$  – температура;  $c_p$  – удельная теплоемкость;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости. Объемный источник энергии  $q_v(v^2, T, r)$  моделирует воздействие внутренних источников тепла и теплообмен жидкости с внешней средой. Для диссипативной функции  $\Phi$  принимаем оценку  $\Phi \ll |q_v|$ , т. е. рассматриваем процессы, для которых можно пренебречь выделением тепла за счет вязкой диссипации энергии.

Движение (1) определяется уравнениями Навье–Стокса и уравнением энергии [5], которые можно записать в виде динамической системы:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r^2} - \frac{F_\varphi}{v}, \quad \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{q_v}{\lambda}; \quad (2)$$

$$F_\varphi = -\zeta v; \quad \zeta = \zeta(v^2, T, r); \quad q_v = q_v(v^2, T, r); \quad v = \mu / \rho.$$

Давление  $p(r)$  подсчитывается автономно от системы (2):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}. \quad (3)$$

Очевидно, что уравнение неразрывности выполняется тождественно. Далее будем применять безразмерные величины, обозначая их чертой сверху:  $\bar{v} = v/v_1$ ,  $\bar{\tau} = \tau/v_1$ ,  $\bar{r} = r/r_0$ , где  $T - T_0 = v_1 \tau / c_1$ ;  $c_1, r_0, v_1$  – положительные постоянные, имеющие размерность удельной теплоемкости Дж/(кг · град), длины и скорости, соответственно;  $T_0$  – отсчетное значение температуры.

Для коэффициента сопротивления и источника энергии применяем частные зависимости следующего вида:

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2 \zeta / v = [2(1 - 3\bar{\tau}^2 + \bar{v}^2) - 1] / \bar{r}^2; \quad (4)$$

$$\bar{q}_v \equiv c_1 r_0^2 q_v / (\lambda v_1^2) = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}^2 - 3\bar{v}^2 - 1) / \bar{r}^2. \quad (5)$$

В этом случае система (2) имеет точное решение [6]:

$$\bar{v} = 2\varepsilon \cdot \sin(2\alpha) / \delta; \quad \bar{\tau} = (1 - \varepsilon^2) / \delta; \quad (6)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \cos(2\alpha); \quad \alpha \equiv \bar{R} / 2 = \ln(r/r_0).$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр решения. В частном случае  $\varepsilon^2 = 1$  получаем изотермическое течение,  $T = T_0 \equiv \text{const}$ . Для функций (4), (5) явная зависимость от радиальной координаты характеризует структурную неоднородность, присущую внешней силе сопротивления за счет образования кластеров. В формуле (5) разность  $\bar{\tau}^2 - 3\bar{v}^2$  можно интерпретировать как конкуренцию между выделением тепловой энергии и потерями кинетической энергии вязкого потока. Динамические и тепловые свойства коэффициента сопротивления определяются неравенствами  $\partial \bar{\zeta} / \partial (\bar{\tau}^2) < 0$ ,  $\partial \bar{\zeta} / \partial (\bar{v}^2) > 0$ . Условие  $\zeta > 0$  выполнено при

$$-\frac{\pi}{2} - \Delta < 2\alpha < \frac{\pi}{2} + \Delta; \quad \frac{18 - \sqrt{224}}{10} < \varepsilon^2 < \frac{18 + \sqrt{224}}{10},$$

где  $\Delta > 0$  – малое конечное число.

Данная работа является продолжением нашего исследования [6] и содержит результаты численного анализа структуры неоднородности вихревого поля при течении жидкости в зазоре между вращающимися цилиндрами.

**Цилиндрическое течение Куэтта: неклассический вариант.** При  $\varepsilon = 1$  решение (6) имеет вид:

$$\bar{v} = \frac{\sin \bar{R}}{1 + \cos \bar{R}}; \quad \bar{p} \equiv \frac{(p - p_0)}{\rho v_1^2} = \bar{v} - \frac{\bar{R}}{2}; \quad (7)$$

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2 \zeta / \nu = (1 + 2\bar{v}^2) / \bar{r}^2; \quad \bar{r} \neq \exp(\pi/2).$$

Условие  $p > 0$  обеспечивается подходящим выбором константы  $p_0 > 0$ . Данное решение справедливо на конечном отрезке  $r$  и определяет течение между двумя непроницаемыми коаксиальными цилиндрами. На обеих граничных окружностях выполнено условие прилипания.

Возможны следующие три варианта (рис. 1). Вариант 1:  $r \in [r_0, r_1]$ ,  $0 < r_0 < r_1$ . Вариант 2:  $r \in [r_2, r_0]$ ,  $0 < r_2 < r_0$ . Вариант 3:  $r \in [r_2, r_1]$ ,  $0 < r_2 < r_0 < r_1$ . Для варианта 1 имеем: внутренний цилиндр  $r = r_0$  неподвижен,  $v_\varphi(r = r_0) = 0$ , а внешний цилиндр  $r = r_1$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = v_\varphi(r = r_1) / r_1$ . Для варианта 2 имеем: внешний цилиндр  $r = r_0$  неподвижен,  $v_\varphi(r = r_0) = 0$ , а внутренний цилиндр  $r = r_2$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_2 = v_\varphi(r = r_2) / r_2$ . Вариант 3 является объединением вариантов 1 и 2: внутренний ( $r = r_2$ ) и внешний ( $r = r_1$ ) цилиндры вращаются вокруг их общей оси; на линии  $r = r_0$  жидкость неподвижна. Ясно, что при  $r = r_0$  функция  $p = p(r)$  имеет перегиб:  $r = r_0$ ,  $\bar{R} = 0$ ,  $v = 0$ ,  $dp/dr = 0$ ,  $d^2 p/dr^2 = 0$ ,  $d^3 p/dr^3 \neq 0$ .

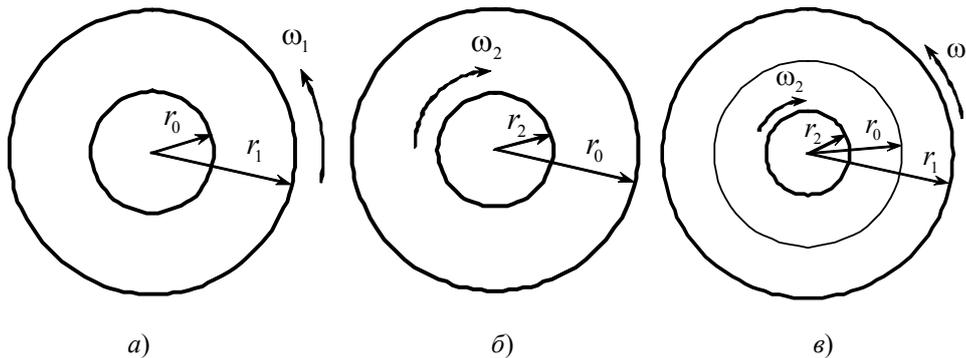


Рис. 1. Схема расположения подвижного и неподвижного цилиндров для трех вариантов течения: части а, б, в соответствуют вариантам 1, 2, 3

Вихрь скорости  $\omega(\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z)$  имеет только одну компоненту:

$$\omega_r \equiv 0; \quad \omega_\varphi \equiv 0; \quad \omega_z = [v_\varphi + r(dv_\varphi/dr)] / (2r),$$

где  $z$  – координата, отсчитываемая вдоль оси цилиндра. В результате вычислений получаем:

$$\bar{\omega} \equiv \omega_z r_0 / v_1 = [1 + \bar{p} + (\bar{R}/2) + (\bar{p} + (\bar{R}/2))^2] / (2\bar{r}).$$

Зависимость (7) показывает, что для всех представленных здесь вариантов отсутствуют точки с нулевой завихренностью:  $\bar{\omega}(\bar{R}, \bar{p}) \neq 0$ . Безразмерные градиент давления и вязкое касательное напряжение вычисляются по формулам:

$$\bar{\pi} \equiv \frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} = \frac{(\bar{v})^2}{\bar{r}}; \quad \bar{\tau}_{r\varphi} \equiv \frac{\tau_{r\varphi}}{\rho v_1^2} = \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \left( 2 \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} - \bar{v} \right); \quad \bar{v} = \frac{\mu}{\rho v_1 r_0}; \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} = \frac{1}{1 + \cos \bar{R}}.$$

Величина  $1/\bar{v}$  есть число Рейнольдса; при проведении вычислений оно принято для определенности равным единице. В данном классе решений нет ограничений на выбор числа Рейнольдса.

**Изотермическое течение: результаты расчетов.** Известно, что безразмерное число Тейлора  $Ta$  и функция Рэлея  $R_s = d(v_r r)^2 / dr$  позволяют анализировать условия стабилизации профиля скорости в зазоре между цилиндрами. Обсуждение этого вопроса и библиография проблемы приведены в [7]. Для качественного и количественного описания свойств неклассического течения (7) здесь применяются два способа подсчета числа Тейлора. Число  $Ta_1$  строим на основе функции завихренности  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{r})$ :

$$Ta_1 = \frac{d}{d\bar{r}} [(\bar{\omega} \bar{r}^2)^2] / \left[ \bar{r}^5 \left( \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{r}} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Число  $Ta_2$  строим на основе угловой скорости  $\Omega = \bar{v} / \bar{r}$ :

$$Ta_2 = \frac{d}{d\bar{r}} [(\Omega \bar{r}^2)^2] / \left[ \bar{r}^5 \left( \frac{d\Omega}{d\bar{r}} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Функция Рэлея имеет вид:

$$R_s = \frac{d}{d\bar{r}} [(\bar{v} \bar{r})^2]. \quad (10)$$

Еще одним важным источником информации является зависимость момента  $\bar{M}_1$  вязких сил и момента  $\bar{M}_2$  сил сопротивления от радиальной координаты. Для подсчета этих величин получены следующие формулы:

$$\bar{M}_1 = 2\pi \bar{\tau}_{r\varphi} \bar{r}^2; \quad \bar{M}_2 = -\pi \bar{v} \bar{\zeta} \bar{v} \bar{r}^3. \quad (11)$$

Приведем здесь некоторые результаты расчетов. На рис. 2 для варианта 3 (рис. 1, в) показаны зависимости завихренности  $\bar{\omega}$ , угловой скорости  $\Omega$  и суммарного момента  $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  от радиальной координаты  $\bar{r}$ ; темным кружком отмечена линия торможения  $\bar{r} = 1$ . Хорошо видно, что перемена знака функции  $\bar{M}(\bar{r})$  происходит на конечном удалении от окружности  $r = r_0$ .

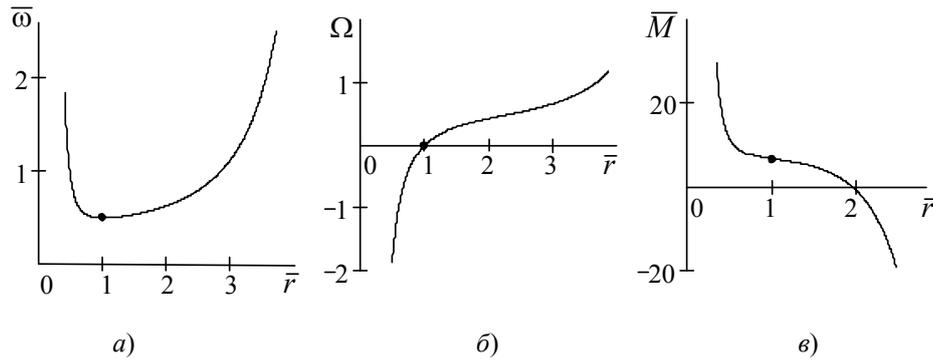


Рис. 2. Изотермическое течение в зазоре между двумя вращающимися цилиндрами:  
 а – завихренность; б – угловая скорость; в – суммарный момент вязких сил и сил сопротивления

Графическая информация, представленная на рис. 3 и 4, позволяет сопоставить друг с другом свойства течений для вариантов 1 и 2, соответственно. Из рассмотрения рис. 3, а и 4, а следует, что различаются знаки функции Рэлея  $\bar{R}_s(\bar{r})$  и знаки моментов  $\bar{M}_2(\bar{r})$  сил сопротивления. Знаки моментов  $\bar{M}_1(\bar{r})$  вязких сил одинаковые: по мере удаления от неподвижного цилиндра  $\bar{r} = 1$  момент  $\bar{M}_1(\bar{r})$  возрастает. На рис. 3, б и 4, б показаны зависимости числа Тейлора  $Ta_1$  от градиента давления  $\bar{\pi}$ , от завихренности  $\bar{\omega}$  и от вязкого касательного напряжения  $\bar{\tau}_{r\varphi}$ . Для обоих вариантов функциональные связи  $Ta_1(\bar{\pi})$  и  $Ta_1(\bar{\omega})$  одинаковые в качественном отношении. Принципиальное различие между течениями с подвижным внешним (рис. 3, б) и подвижным внутренним (рис. 4, б) цилиндрами состоит в том, что для варианта 1 зависимость  $Ta_1(\bar{\tau}_{r\varphi})$  неоднозначная: одному значению вязкого касательного напряжения соответствуют два значения критерия  $Ta_1$ . Аналогичная неоднозначность наблюдается для зависимости  $Ta_2(\bar{\tau}_{r\varphi})$  (рис. 3, в). Для варианта 1 каждая из функций  $Ta_2(\bar{\pi})$  и  $Ta_2(\bar{\omega})$  – немонотонная, имеет отчетливо выраженный максимум (рис. 3, в). Вместе с тем для варианта 2 функции  $Ta_2(\bar{\omega})$ ,  $Ta_2(\bar{\tau}_{r\varphi})$  и  $Ta_2(\bar{\pi})$  имеют по два экстремума – один минимум и один максимум (рис. 4, в). Здесь максимум функции  $Ta_2(\bar{\pi})$  не показан – соответствующая точка находится вне интервала, представленного на рис. 4, в.

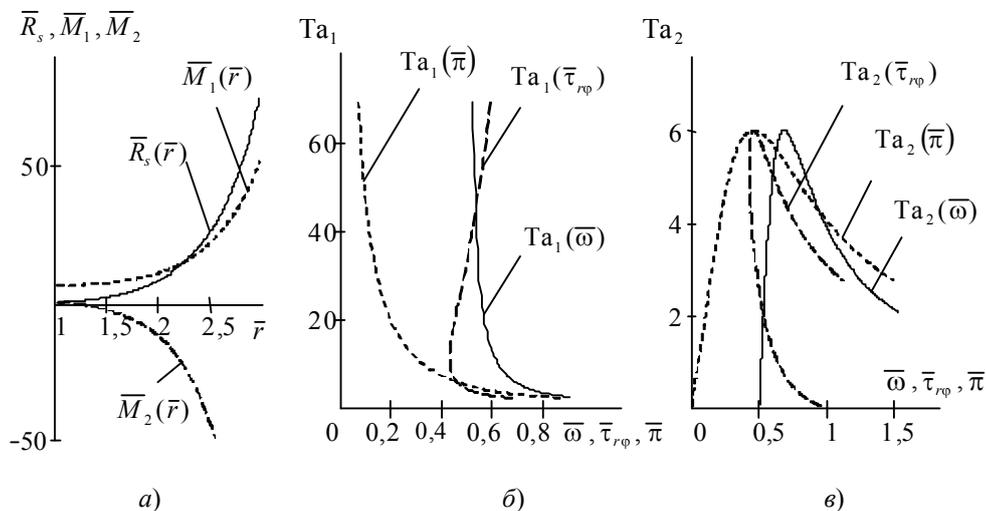


Рис. 3. Свойства изотермического течения для варианта 1: неподвижен внутренний цилиндр

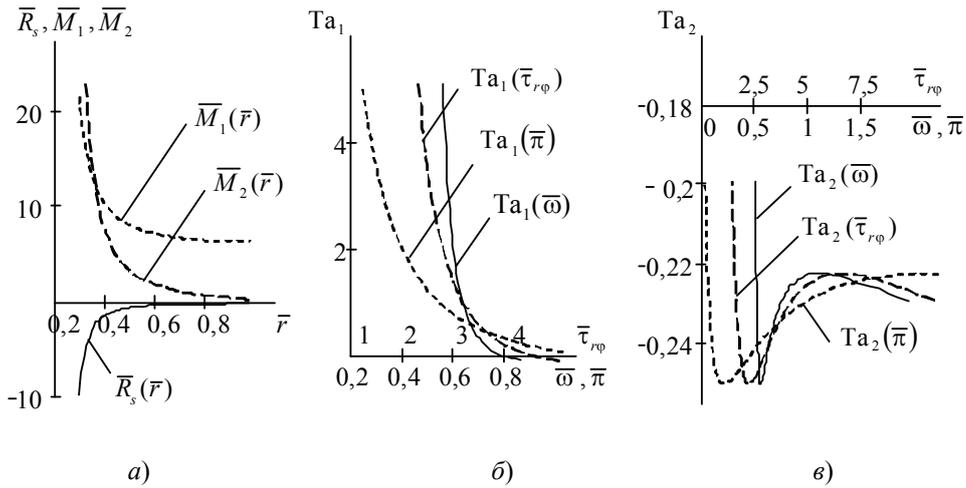


Рис. 4. Свойства изотермического течения для варианта 2: неподвижен внешний цилиндр

**Неизотермическое течение: результаты расчетов.** Дальнейший анализ основан на формулах (6). Радиальный тепловой поток  $q_r = -\lambda(dT/dr)$  в безразмерном виде записывается так:  $\bar{q} = c_1 r_0 q_r / \lambda \nu_1^2 = -d\bar{\tau}/d\bar{r}$ . Для количественного описания структуры неоднородности данного течения применяем формулы (8)–(11). Из (6) следует, что  $\delta > 0$  при  $\varepsilon^2 \neq 1$ . Если  $\varepsilon^2 < 1$ , то  $\tau > 0$ , течение происходит в «горячей» области,  $T > T_0$ . Если  $\varepsilon^2 > 1$ , то  $\tau < 0$ , имеем «холодную» область,  $0 < T < T_0$ . Результаты расчетов вариантов 1 и 3 (рис. 1) для «горячей» области даны на рис. 5 и 6.

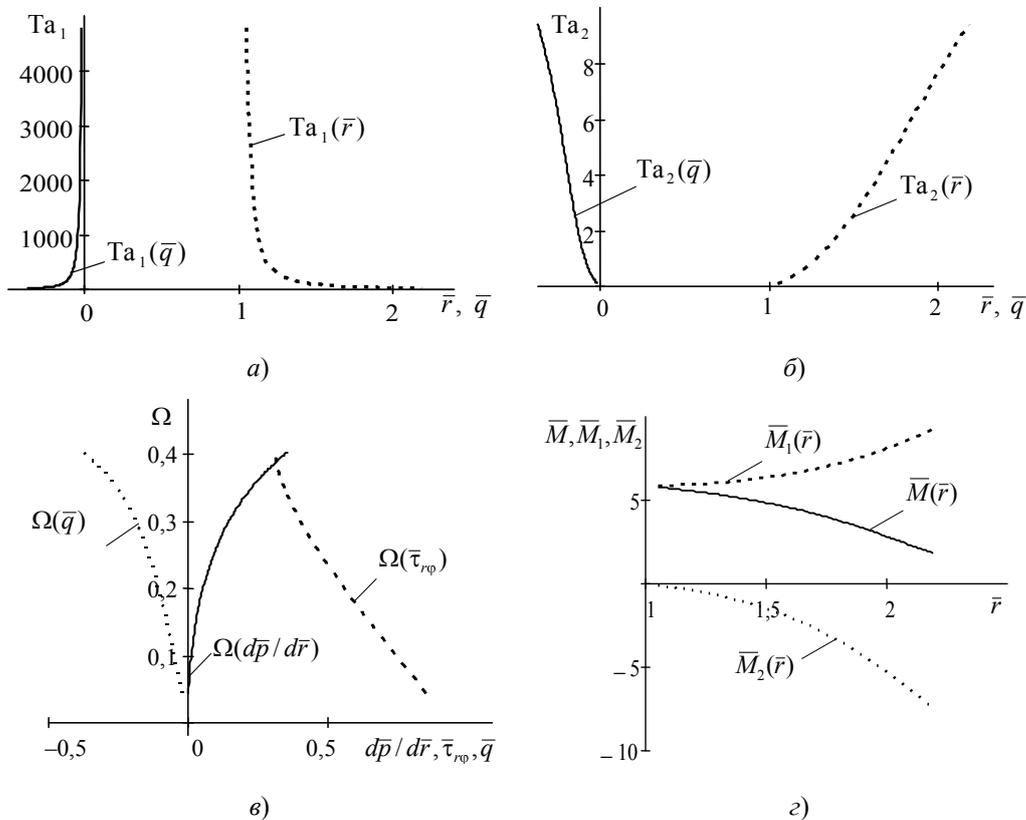


Рис. 5. Неизотермические свойства вихревого поля в «горячей» области для варианта 1: неподвижен внутренний цилиндр;  $\varepsilon = 0,6, r_1 = 2,19, r_0 = 1,05$

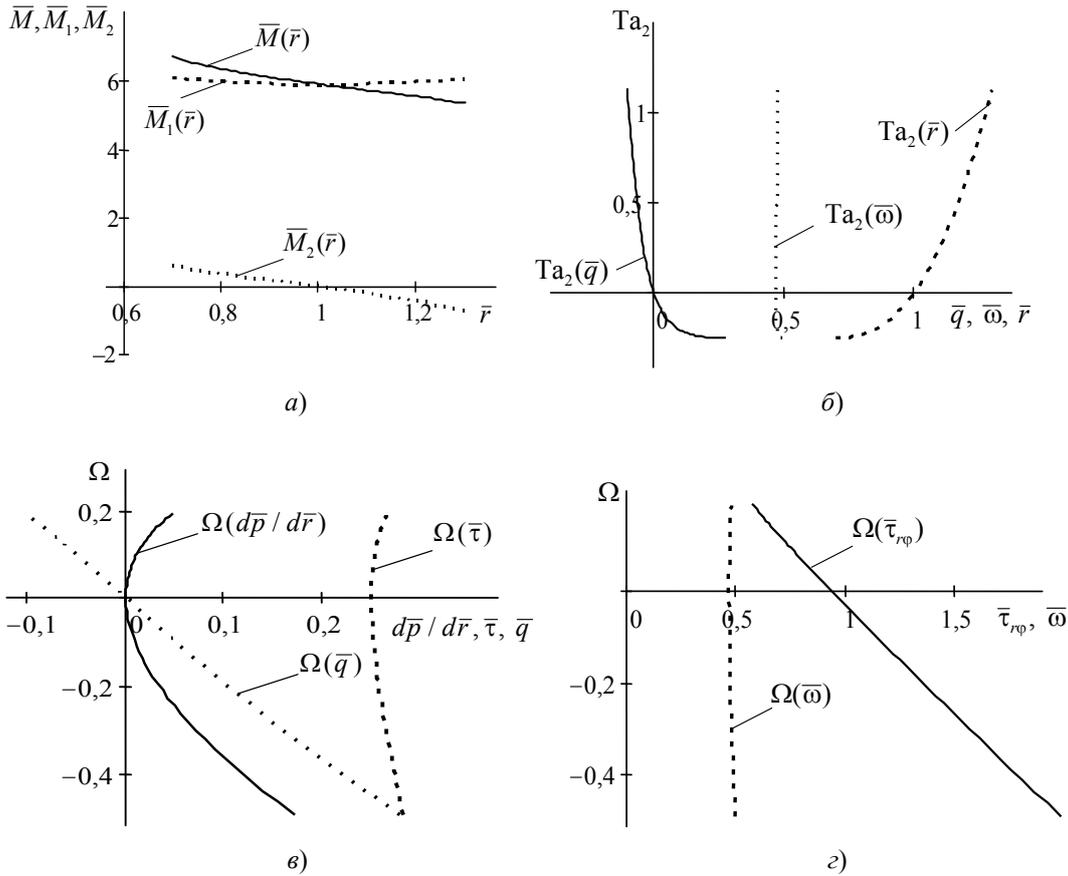


Рис. 6. Неизотермические свойства вихревого поля в «горячей» области для варианта 3: внутренний и внешний цилиндры вращаются в противоположных направлениях;  $e = 0,6, r_1 = 1,3, r_0 = 0,7$

Из рис. 5, а и б следует, что числа Тейлора  $Ta_1$  и  $Ta_2$  по-разному реагируют на увеличение модуля теплового потока. А именно:  $d(Ta_1)/d|\bar{q}| < 0$ ,  $d(Ta_2)/d|\bar{q}| > 0$ . Значит, убыванию функции  $Ta_1(|\bar{q}|)$  соответствует возрастание функции  $Ta_2(|\bar{q}|)$ . Градиент давления и вязкое касательное напряжение оказывают конкурентное воздействие на угловую скорость течения: при росте  $d\bar{p}/d\bar{r}$  наблюдается рост  $\Omega$ , а при увеличении  $\tau_{rph}$  угловая скорость уменьшается (рис. 5, в). Момент вязких сил  $\bar{M}_1$  и модуль момента сил сопротивления  $|\bar{M}_2|$  монотонно растут по мере удаления от неподвижного внутреннего цилиндра, рис. 5, г.

### Заключение

Подробно изучено новое точное аналитическое решение (6), определяющее стационарное течение вязкой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Центральным пунктом применяемой гидродинамической модели является внешняя сила трения Рэлея. Рассмотрены изотермический и неизотермический режимы движения жидкости. Проведены числовые расчеты и представлены варианты течения, относящиеся к подвижному/неподвижному внешнему и внутреннему цилиндрам. Установлены функциональные связи числа Тейлора с градиентом давления, с вязким касательным напряжением, с удельным тепловым потоком и с завихренностью течения. Вычислены моменты вязких сил и сил сопротивления.

**Литература**

1. Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / А. В. Картавых [и др.] // Поверхность. Рентгенов., синхротрон. и нейтрон. исслед. – 2004. – № 6. – С. 91–98.
2. Шабловский, О. Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О. Н. Шабловский // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5, № 32 (249). – С. 77–82.
3. Шабловский, О. Н. Внешняя сила трения и стационарные вихревые процессы при течении вязкой жидкости на плоскости / О. Н. Шабловский // Техн. механика. – 2012. – № 2. – С. 83–93.
4. Шабловский, О. Н. Вихрь скорости и производство энтропии в релаксирующем потоке вязкой жидкости с внутренними источниками / О. Н. Шабловский // Изв. высш. учеб. заведений и энергет. об-ний СНГ. Энергетика. – 2011. – № 5. – С. 55–65.
5. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука, 1974. – 712 с.
6. Шабловский, О. Н. Нелинейное сопротивление и завихренность течения жидкости между коаксиальными вращающимися цилиндрами / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Ученые записки Забайкал. гос. ун-та. Физика. Математика. Техника. Технология. – 2016. – Т. 11, № 4. – С. 59–68.
7. Белоцерковский, О. М. Турбулентность: новые подходы / О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, В. М. Чечеткин. – М. : Наука, 2003. – 286 с.

*Получено 29.12.2016 г.*