

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

**Ю. Д. Черниченко, А. В. Емелин**

**РЯДЫ. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ  
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.  
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

**Курс лекций  
по дисциплинам «Высшая математика»  
и «Математика» для студентов всех специальностей  
дневной и заочной форм обучения  
В двух частях**

**Часть 1  
Ряды. Кратные интегралы**

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2010**

УДК 517(075.8)  
ББК 22.16я73  
Ч-49

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
факультета автоматизированных и информационных систем  
ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 6 от 11.05.2009 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого д-р физ.-мат. наук,  
проф. П. А. Хило

**Черниченко, Ю. Д.**  
Ч-49      Ряды. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля : курс лекций по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей днев. и заоч. форм обучения. В 2 ч. Ч. 1. Ряды. Кратные интегралы / Ю. Д. Черниченко, А. В. Емелин. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010. – 132 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-953-1.

Курс лекций содержит теоретический материал, сопровождаемый решением типовых примеров, и задания для самостоятельной работы. В теоретической части каждого раздела сформулированы основные понятия, определения, свойства, формулы и приведены доказательства наиболее важных теорем.

Для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

**УДК 517(075.8)  
ББК 22.16я73**

**ISBN 978-985-420-953-1 (ч. 1)  
ISBN 978-985-420-954-8**

© Черниченко Ю. Д., Емелин А. В., 2010  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2010

## Предисловие

Тема «Ряды. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля», безусловно, является одной из самых трудных в курсе высшей математики втуза. Имеющиеся пособия разных авторов (Данко и Попов, Гурский, Герасимович и др.) содержат лишь отдельные главы, посвященные данной тематике. В связи с этим достаточно очевидна потребность в написании доступного для студента технического вуза курса лекций, содержащего наряду с необходимыми сведениями теоретического характера большое количество решенных задач. Предлагаемое издание основано на опыте преподавания курса «Математика» и «Высшая математика» студентам инженерно-технических и экономических специальностей в ГГТУ им. П. О. Сухого дневной формы обучения. Подчеркнем, что техника кратного интегрирования чрезвычайно важна для физики (включая математическую и теоретическую физику) и других наук (особенно технических). Поэтому отдельные параграфы посвящены геометрическим и физическим приложениям интегралов (это § 2.2, 2.4, 3.3, 3.6, 4.4, 4.7). Раздел 5 посвящен описанию на языке кратных интегралов красивых закономерностей, существующих в теории поля.

Отличительной особенностью курса лекций является органическая связь основных элементов обучения: лекций, практических занятий и самостоятельной работы. Имеющиеся упражнения к лекциям ни в коем случае нельзя рассматривать просто как дополнение. Эти упражнения важны как для освоения теоретического материала лекций, так и для закрепления практических навыков. Упражнения подобраны так, чтобы каждое из них при условии последовательного освоения материала студент мог сделать самостоятельно. В то же время студент должен знать, что умение решить все задачи, относящиеся к данной лекции, является необходимым условием перехода к материалу следующей лекции.

# Раздел 1. РЯДЫ

## Лекция 1

### § 1.1. Числовые ряды: определения и свойства

Рассмотрим бесконечную последовательность чисел  $\{a_n\}$  и будем называть ее *числовой последовательностью*. Числовая последовательность считается заданной, если известен закон, по которому любой ее член  $a_n$  может быть найден по номеру  $n$ .

**Определение 1.1.** *Числовым рядом* называют сумму всех членов числовой последовательности  $\{a_n\}$  и записывают

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1.1)$$

Числа  $a_n$  называют членами числового ряда.

**Определение 1.2.** Сумму первых  $n$  членов числового ряда называют  *$n$ -й частичной суммой числового ряда* и записывают

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1.2)$$

В частности,

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

**Определение 1.3.** Если существует конечный предел  $n$ -й частичной суммы ряда (1.2), равный  $s$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, \quad (1.3)$$

то предел  $s$  называют *суммой ряда*, а ряд (1.1) называют *сходящимся*. Если же предел (1.3) не существует или  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , то ряд (1.1) не имеет суммы, и называют *расходящимся*.

**Пример 1.1.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  – геометрическая прогрессия:

$q$  – знаменатель прогрессии,  $a$  – ее первый член ( $a \neq 0$ ). Поскольку

$$s_n = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}, \text{ то:}$$

1) при  $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$ . Следовательно, при  $|q| < 1$  ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \text{ сходится и его сумма } s = \frac{a}{1 - q};$$

2) при  $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ . Следовательно, при  $|q| > 1$  ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \text{ расходится;}$$

3) при  $q = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a1^n = a \sum_{n=0}^{\infty} 1^n \Rightarrow s_n = an \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = +\infty$ .

Следовательно, при  $q = 1$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  расходится;

4) при  $q = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a(-1)^n = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Rightarrow s_n = \begin{cases} 0, & n - \text{четное,} \\ a, & n - \text{нечетное,} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  – не существует. Следовательно, при  $q = -1$  ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \text{ также расходится.}$$

*Ответ:* ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  при  $|q| < 1$  сходится и  $s = \frac{a}{1 - q}$  – его сумма,

а при  $|q| \geq 1$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$  расходится и суммы не имеет.

### **Свойства сходящихся числовых рядов**

**Свойство 1.1.** Сходимость или расходимость числового ряда (1.1) не нарушится, если к нему прибавить или от него отбросить конечное число его первых членов.

**Свойство 1.2.** Если ряд (1.1) сходится и его сумма равна  $s$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ , где  $c = \text{const}$ , также сходится и его сумма равна  $cs$ .

*Доказательство.* Пусть  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ,  
 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n ca_k = cs_n$ .

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = cs$ .

**Свойство 1.3.** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся и их суммы соответственно равны  $s$  и  $\sigma$ , то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  также сходятся и их суммы соответственно равны  $s \pm \sigma$ .

*Доказательство.* Пусть  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  и  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ . Тогда  $s_n^{(\pm)} = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = s_n \pm \sigma_n$ . Следовательно,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(\pm)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s \pm \sigma$ .

**Замечание 1.1.** Свойства 1.1–1.3 определяют правила действия над сходящимися рядами (сложение, вычитание рядов и умножение ряда на число).

### **Необходимый признак сходимости**

**Теорема 1.1.** Если числовой ряд (1.1) сходится, то предел его  $n$ -го члена при  $n \rightarrow \infty$  равен нулю, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

*Доказательство.* По условию числовой ряд (1.1) сходится. Следовательно, существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Очевидно, что и  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$  (при  $n \rightarrow \infty \Rightarrow n-1 \rightarrow \infty$ ). Вычитая почленно эти равенства, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (s_n - s_{n-1} = a_n).$$

**Замечание 1.2.** Обратное утверждение неверно: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то числовой ряд (1.1) может быть как расходящимся, так и сходящимся. Например, для числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  имеем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Однако ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  является *расходящимся*, и называют *гармоническим рядом*.

С другой стороны, для числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , являющегося сходящимся,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ . В то же время *противоположное утверждение верно*.

**Следствие 1.1** (из необходимого признака сходимости)

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то числовой ряд (1.1) расходится.

**Пример 1.2.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+2}$ .

*Решение.* Проверим выполнение *необходимого признака сходимости*. Вычислим предел  $n$ -го члена:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$ .

Отсюда, по следствию 1.1 заключаем, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+2}$  расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

## § 1.2. Числовые ряды с положительными членами.

### Признаки сравнения

Пусть имеются два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots; \quad (\text{A})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots \quad (\text{B})$$

Такие числовые ряды будем называть *знакоположительными*. Для исследования знакоположительных числовых рядов на сходимость знания одного следствия 1.1 из необходимого признака сходимости недостаточно. Для этого используют *достаточные признаки*.

### **Первый признак сравнения**

**Теорема 1.2.** Если для членов рядов (А) и (В) выполнено неравенство

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \geq 1,$$

то:

1. Если ряд (В) сходится, то сходится и ряд (А).
2. Если ряд (А) расходится, то расходится и ряд (В).

*Доказательство.* 1. Пусть  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  и  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n b_k$ . По условию теоремы  $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \Rightarrow s_n \leq \sigma_n$ . Тогда: 1) если ряд (В) сходится, то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$  и  $\sigma$  – конечно. Следовательно, ряд (А) также сходится и его сумма  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ ; 2) если же ряд (А) расходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , а это означает, что и ряд (А) также расходится.

**Замечание 1.3.** Если для членов рядов (А) и (В) неравенство  $0 \leq a_n \leq b_n$  выполнено, начиная с некоторого номера  $n \geq N \geq 1$ , то (в силу свойства 1.1 для числовых рядов) справедливость пп. 1, 2 теоремы сохраняется.

### **Второй признак сравнения**

**Теорема 1.3.** Если для членов рядов (А) и (В) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0, \infty$ , то ряды (А) и (В) ведут себя одинаково: либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Для применения указанных признаков необходимо заранее знать поведение одного из рядов. Часто в качестве «пробных» используют следующие ряды.

*Ряд Дирихле:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad (1.4)$$



Ряд Дирихле сходится, когда  $p > 1$  и расходится, когда  $p \leq 1$ . В частности, при  $p = 1$  ряд (1.4) расходится и совпадает с *гармоническим рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots, \quad (1.5)$$

рассмотренным в замечании 1.2.

*Сумма бесконечной геометрической прогрессии:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots \quad (1.6)$$

Данный ряд сходится при  $|q| < 1$  и расходится, когда  $|q| \geq 1$  (см. пример 1.1).

**Пример 1.3.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ .

*Решение.* Воспользуемся *первым признаком сравнения*. Сравним исследуемый ряд с *гармоническим рядом* (1.5). Известно, что  $\ln n > 1$ ,  $\forall n \geq 3 \Rightarrow \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \geq 3$ , т. е. каждый член исследуемого ряда больше соответствующего члена расходящегося гармонического ряда (1.5).

Таким образом, на основании первого признака сравнения делаем вывод о том, что исследуемый ряд также расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

**Пример 1.4.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ .

*Решение.* Воспользуемся *вторым признаком сравнения*. Сравним исследуемый ряд с *рядом Дирихле* (1.4) при  $p = 2 > 1$ . Обозначим

$a_n = \sin \frac{1}{n^2}$ ,  $b_n = \frac{1}{n^2}$ . Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left\{ t = \frac{1}{n^2}, t \rightarrow 0 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \neq 0, \infty.$$

Тогда на основании второго признака сравнения делаем вывод о том, что исследуемый ряд ведет себя также, как и ряд Дирихле (1.4)

при  $p = 2 > 1$ . Но ряд Дирихле (1.4) при  $p = 2 > 1$  сходится, а следовательно, и исследуемый ряд также сходится.

*Ответ:* ряд сходится.

**Пример 1.5.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ .

*Решение.* Воспользуемся *первым признаком сравнения*. Сравним исследуемый ряд с рядом (1.6) при  $a = 1$ ,  $q = \frac{1}{2} < 1$ , который сходится (см. пример 1.1). Обозначим:  $a_n = \frac{1}{n 2^n}$ ,  $b_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Отсюда следует, что  $a_n = \frac{1}{n 2^n} \leq b_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Тогда на основании первого признака сравнения заключаем, что и исследуемый ряд также сходится.

*Ответ:* ряд сходится.

## Лекция 2

### § 1.3. Числовые ряды с положительными членами. Признаки сходимости Даламбера и Коши

#### *Признак сходимости Даламбера*

**Теорема 1.4.** Если для членов ряда (A) существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (1.7)$$

то:

- 1) при  $q < 1$  ряд (A) сходится;
- 2) при  $q > 1$  ряд (A) расходится;
- 3) при  $q = 1$  вопрос о сходимости (или расходимости) ряда (A) остается открытым.

*Доказательство.* 1. Пусть  $q < 1$ . Рассмотрим число  $p$ :  $q < p < 1$ .

По условию теоремы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ . Но по определению предела это означает, что существует такой номер  $N \geq 1$ , что (рис. 1.1)

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < p - q, \quad \forall n \geq N \geq 1.$$

Отсюда следует

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < p < 1, \quad \forall n \geq N \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} < pa_n, \quad \forall n \geq N \geq 1,$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} a_{N+1} < pa_N, \\ a_{N+2} < pa_{N+1} < p^2 a_N, \\ \dots & \dots & \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Теперь рассмотрим два ряда:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots; \quad (1.9)$$

$$a_N + pa_N + p^2 a_N + \dots \quad (1.10)$$

Ряд (1.10) представляет собой убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем  $p < 1$  и, следовательно, он сходится. В то же время члены рядов (1.9) и (1.10) в силу условий (1.8), начиная с  $n \geq N$ , удовлетворяют первому признаку сравнения, а следовательно, при  $q < 1$  ряд (А) [ряд (1.9)] также сходится.

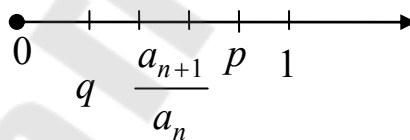


Рис. 1.1

2. Пусть теперь  $q > 1$ . Тогда по условию теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \forall n > N.$$

Отсюда следует, что  $a_{n+1} > a_n, \quad \forall n \geq N$ . Но это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Тем самым по следствию 1.1 заключаем, что ряд (А) [ряд (1.9)] расходится.

**Замечание 1.4.** Признак Даламбера не дает возможности установить сходимость или расходимость ряда, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  или не

существует. Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , но  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \forall n \geq N$ , то ряд (А) [ряд (1.9)] расходится, т. к. в этом случае  $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq N$ , и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

**Пример 1.6.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$ .

*Решение.* Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{n^n}{n!3^n} &\Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}}{\frac{n^n}{n!3^n}} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{3(n+1)n!n^n} = \frac{1}{3} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

Теперь вычислим предел (1.7), воспользовавшись вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера, исследуемый ряд сходится.

*Ответ:* ряд сходится.

**Пример 1.7.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ .

*Решение.* Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{2^n}{n^2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} n^2}{(n+1)^2 2^n} = 2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^2.$$

Теперь вычислим предел (1.7):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = 2 > 1.$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера, исследуемый ряд расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

### Радикальный признак Коши

**Теорема 1.5.** Если для членов ряда (A) существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad (1.11)$$

то:

- 1) при  $q < 1$  ряд (A) сходится;
- 2) при  $q > 1$  ряд (A) расходится;
- 3) при  $q = 1$  вопрос о сходимости (или расходимости) ряда (A) остается открытым.

*Доказательство.* 1. Пусть  $q < 1$ . Рассмотрим число  $p : q < p < 1$ . По условию теоремы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ . Но по определению предела это означает, что существует такой номер  $N \geq 1$ , что (рис. 1.2):

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - q \right| < p - q, \quad \forall n \geq N \geq 1.$$

Отсюда следует

$$\sqrt[n]{a_n} < p < 1, \quad \forall n \geq N \geq 1 \Rightarrow a_n < p^n < 1, \quad \forall n \geq N \geq 1,$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} a_N < p^N, \\ a_{N+1} < p^{N+1}, \\ \dots & \dots & \dots \end{cases} \quad (1.12)$$

Теперь рассмотрим ряд (1.9) и ряд

$$p^N + p^{N+1} + \dots \quad (1.13)$$

Ряд (1.13) представляет собой убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем  $p < 1$  и, следовательно, он сходится. В то же время члены рядов (1.9) и (1.13), в силу условий (1.12), начиная с  $n \geq N$ , удовлетворяют первому признаку сравнения, а, следовательно, при  $q < 1$  ряд (A) [ряд (1.9)] также сходится.

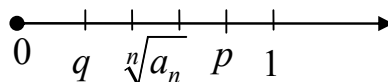


Рис. 1.2

2. Пусть теперь  $q > 1$ . Тогда по условию теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > 1, \quad \forall n \geq N.$$

Отсюда следует, что  $a_n > 1, \forall n \geq N$ . Но это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Тем самым по следствию 1.1 заключаем, что ряд (А) [ряд (1.9)] расходится.

**Замечание 1.5.** Радикальный признак Коши не дает возможности установить сходимость или расходимость ряда, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  или не существует. Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ , но  $\sqrt[n]{a_n} > 1, \forall n \geq N$ , то ряд (А) [ряд (1.9)] расходится, т. к. в этом случае  $a_n > 1, \forall n \geq N$ , и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ .

**Пример 1.8.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2n}$ .

*Решение.* Воспользуемся радикальным признаком Коши. Имеем:

$$a_n = \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^2 = \frac{1}{4} < 1.$$

Таким образом, на основании радикального признака Коши исследуемый ряд сходится.

*Ответ:* ряд сходится.

**Пример 1.9.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3n+2}{2n+3} \right)^n$ .

*Решение.* Воспользуемся радикальным признаком Коши. Имеем:

$$a_n = \left( \frac{3n+2}{2n+3} \right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{3n+2}{2n+3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1.$$

Таким образом, на основании радикального признака Коши исследуемый ряд расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

### Интегральный признак Коши

**Теорема 1.6.** Пусть для членов ряда (1.1) выполняются условия:

$$0 \leq a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1, \quad (1.14)$$

и функция  $f(x)$  есть знакоположительная, непрерывная и монотонно убывающая функция при  $\forall x \geq 1$ , и такая, что  $f(n) = a_n$ . Тогда

ряд (1.1) и несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  ведут себя одинаково:

либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

*Доказательство.* По условию теоремы функция  $f(x)$  – знакоположительная, непрерывная и монотонно убывающая функция при  $\forall x \geq 1$ , причем  $f(n) = a_n$ . Тогда, принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, для  $n$ -й частичной суммы (1.2)

ряда (1.1) и интеграла  $\int_1^{n+1} f(x)dx$  справедливы неравенства:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n > \int_1^{n+1} f(x)dx; \quad (1.15)$$

$$s_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx. \quad (1.16)$$

Если интеграл  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  сходится (конечен), то

$\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx, \quad \forall n \geq 1$ . Отсюда, на основании неравенства (1.16), заключаем, что

$$s_n < s_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + a_1 < \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1, \quad \forall n \geq 1.$$

Последнее означает, что существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , т. е. числовой ряд (1.1), согласно определению 1.3, также сходится.

Пусть теперь  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  расходится (равен  $\infty$ ). Следовательно,

$\int_1^{n+1} f(x)dx$  неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ . Но тогда в силу

неравенства (1.15)  $s_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$  также неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ . А это означает (см. определение 1.3), что числовой ряд (1.1) также расходится.

**Замечание 1.6.** Теорема 1.6 остается справедливой, если ее условия выполнены для  $\forall n \geq N, \forall x \geq a \geq 1$ .

**Пример 1.10.** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  (ряд Дирихле).

*Решение.* Воспользуемся интегральным признаком Коши. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

При  $p \neq 1$  находим:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^p} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (R^{1-p} - 1) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \text{ т. е. интеграл сходится,} \\ \infty, & p < 1, \text{ т. е. интеграл расходится.} \end{cases} \end{aligned}$$

При  $p = 1$  получим:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \ln x \right|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty, \text{ т. е. расходится.}$$

Таким образом, на основании интегрального признака Коши доказали, что ряд Дирихле (1.4) сходится, когда  $p > 1$  и расходится, когда  $p \leq 1$ .

*Ответ:* ряд Дирихле (1.4) сходится, когда  $p > 1$  и расходится, когда  $p \leq 1$ .



**Пример 1.11.** Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

*Решение.* Воспользуемся *интегральным признаком Коши*. Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$  и вычислим несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{d \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \\ &= \{ \ln(x+1) = t, t_n = \ln 2, t_g = \ln(R+1) \} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln(R+1)} \frac{dt}{t} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln(R+1)} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln \ln(R+1) - \ln \ln 2) = \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, несобственный интеграл расходится, а следовательно, и исследуемый ряд также расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

## Лекция 3

### § 1.4. Знакопеременные числовые ряды

**Определение 1.4.** Числовой ряд (1.1) называется *знакопеременным рядом*, если его члены есть вещественные числа произвольного знака.

**Определение 1.5.** Знакопеременный ряд (1.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Отметим, что о сходимости ряда (1.1) в определении 1.5 ничего не говорится. Тем не менее, из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  следует и сходимость ряда (1.1). *Обратное утверждение неверно: если знакопеременный ряд (1.1) сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

**Определение 1.6.** Знакопеременный ряд (1.1) называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  – расходится.

**Свойство абсолютно сходящихся числовых рядов**

Для любого абсолютно сходящегося числового ряда справедливо *переместительное свойство*.

**Свойство 1.4.** Если числовой ряд (1.1) сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из ряда (1.1) путем некоторой перестановки его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и ряд (1.1).

**Замечание 1.7.** Условно сходящиеся числовые ряды переместительным свойством не обладают.

Подчеркнем, что если числовой ряд (1.1) является знакопеременным рядом, то его вначале исследуют на абсолютную сходимость. Если же установлено, что ряд (1.1) не является абсолютно сходящимся, то его исследуют на условную сходимость. При этом для исследования числового ряда (1.1) на абсолютную сходимость можно использовать любой из достаточных признаков сходимости для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , соответствующего ряду (1.1). В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1. \quad (1.17)$$

**Замечание 1.8.** В общем случае из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  не следует расходимость ряда (1.1). Но если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , то расходятся как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , так и ряд (1.1), поскольку в этом случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  (см. следствие 1.1 из необходимого признака сходимости).

**Пример 1.12.** Исследовать на абсолютную сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

*Решение.* Для исследования данного ряда на абсолютную сходимость рассмотрим ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^{\alpha}} \right|$ . Поскольку

$|\sin x| \leq 1, \quad \forall x$ , то  $\left| \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^{\alpha}} \right| < \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \forall n \geq 1$ . Отсюда, на основании первого признака сравнения (см. теорему 1.2), заключаем, что исследуемый ряд сходится абсолютно, когда  $\alpha > 1$ .

*Ответ:* ряд сходится абсолютно, когда  $\alpha > 1$ .

Частным случаем знакопеременного ряда является *знакопередающийся ряд*, который может быть представлен в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad b_n \geq 0, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.18)$$

Для исследования знакопередающегося ряда на условную сходимость используют *признак Лейбница*.

### **Признак Лейбница**

**Теорема 1.7.** Если члены знакопередающегося ряда (1.18) удовлетворяют следующим условиям:

$$1. \text{ Невозрастающая последовательность } b_n \geq b_{n+1}, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.19)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad (1.20)$$

то:

- 1) заданный ряд сходится;
- 2) его сумма имеет знак первого члена;
- 3) его сумма не превосходит первого члена.

*Доказательство.* Рассмотрим частичную сумму

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + b_{2n-1} - b_{2n} = \\ &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2n-1} - b_{2n}). \end{aligned}$$

Поскольку по условию теоремы

$$b_k \geq b_{k+1}, \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow b_k - b_{k+1} \geq 0, \quad \forall k \geq 1,$$

то  $s_{2n} > 0$  и не убывает. С другой стороны,

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n},$$

а значит,  $s_{2n} \leq b_1, \quad \forall n \geq 1$ . Таким образом, сумма  $s_{2n}$  — не убывает и ограничена сверху числом  $b_1$ . Следовательно, существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \leq b_1$ .

Теперь рассмотрим частичную сумму  $s_{2n-1} = s_{2n} - b_{2n}$ . Поскольку по условию теоремы  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = 0$ , то  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \leq b_1$ . Отсюда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \leq b_1$ . Это означает (см. определение 1.3), что ряд (1.18) сходится (условно), его сумма имеет знак первого члена и не превосходит его.

**Замечание 1.9.** 1. Для сходимости знакочередующегося ряда недостаточно, чтобы его общий член стремился к нулю.

Например, для знакочередующегося ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{5^k} \right)$  условие п. 1 признака Лейбница нарушено, т. к.  $1 \geq \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{5^2} \leq \frac{1}{3} \geq \dots$ . В то же время условие п. 2 признака Лейбница выполнено:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{(1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{5^k} = 0.$$

Тем не менее, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{5^k} \right)$  расходится. Действительно, полагая

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k} = s_n^{(1)} - s_n^{(2)},$$

находим (см. пример 1.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{5^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}.$$

Однако для гармонического ряда  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$  —

расходится (см. замечание 1.2).

2. Для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница не является необходимым: знакочередующийся ряд может сходиться, если абсолютная величина его общего члена стремится к нулю немонотонно.

Например, знакочередующийся ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{1}{(2k)^2} \right)$  сходится абсолютно, хотя признак Лейбница и не выполнен (условие 1 признака Лейбница нарушено:  $1 \geq \frac{1}{2^2} \geq \frac{1}{3^3} \leq \frac{1}{4^2} \geq \frac{1}{5^3} \leq \frac{1}{6^2} \geq \dots$ ). Действительно, на основании второго признака сравнения ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$  сходятся путем их сравнения с рядом Дирихле со значениями  $p = 3 > 1$  и  $p = 2 > 1$ , соответственно (см. пример 1.10).

**Пример 1.13.** Исследовать на сходимость знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

*Решение.* Вначале исследуем знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Полученный ряд расходится как гармонический ряд (см. замечание 1.2). Следовательно, знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  абсолютной сходимости не имеет. Теперь выясним, сходится ли данный ряд условно. Для этого проверим выполнение условий признака Лейбница (1.19) и (1.20). Имеем:  $b_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ . Тогда:

$$1) \ b_n = \frac{1}{n} \geq b_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполнены, а следовательно, на основании определения 1.6 исследуемый ряд сходится условно.

*Ответ:* ряд сходится условно.

**Замечание 1.10.** Отметим, что числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где  $c_n = a_n + ib_n$  – комплексные числа, называют **числовым рядом с комплексными членами**. Здесь  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ), а  $a_n, b_n$  – действительные числа. Если числовые ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходятся,

то числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  также сходится. Если числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  сходится, то числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

также сходится, и его называют **абсолютно сходящимся**.

## Лекция 4

### § 1.5. Функциональные ряды

Рассмотрим бесконечную последовательность функций  $\{f_n(x)\}$ , заданную на множестве  $\{x\}$ . Такую последовательность функций называют **функциональной последовательностью**, а множество  $\{x\}$  – областью ее определения. Функциональная последовательность считается заданной, если известен закон, по которому любой ее член  $f_n(x)$  может быть найден по номеру  $n$ .

**Определение 1.7.** **Функциональным рядом** называют сумму всех членов функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$  и записывают

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (1.21)$$

Функции  $f_n(x)$  называют членами функционального ряда, а множество  $\{x\}$  – областью его определения.

**Определение 1.8.** Сумму первых  $n$  членов функционального ряда называют  *$n$ -й частичной суммой функционального ряда* и записывают

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x). \quad (1.22)$$

Полагая  $x$ , равным некоторому значению  $x_0 \in \{x\}$ , получим числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  – сходящийся или расходящийся. Совокупность тех значений  $x \in \{x\}$ , при которых функциональный ряд (1.21) сходится, называют областью сходимости функционального ряда. В области сходимости функционального ряда его сумма представляет собой некоторую функцию переменной  $x$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ . Функцию  $s(x)$  называют суммой функционального ряда (1.21).

**Замечание 1.11.** Если функциональный ряд (1.21) сходится, то  $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$ , где  $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$  называют остатком функционального ряда (1.21). Если  $x$  принадлежит области сходимости функционального ряда (1.21), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [s(x) - s_n(x)] = 0.$$

Для нахождения области сходимости функционального ряда (1.21) в простейших случаях достаточно применить к функциональному ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов, считая  $x$  фиксированным и принадлежащим области сходимости данного функционального ряда. В частности, при нахождении области сходимости функционального ряда (1.21), в котором  $x$  считается фиксированным и принадлежащим его области сходимости, условие (1.7) для признака Даламбера и условие (1.11) для радикального признака Коши принимают вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = |q(x)| < 1; \quad (1.23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = |q(x)| < 1. \quad (1.24)$$

При этом функциональный ряд (1.21) сходится абсолютно для всех  $x$ , для которых  $|q(x)| < 1$ . В то же время вопрос о сходимости функционального ряда (1.21) на границах его области сходимости ( $|q(x)| = 1$ ) остается открытым и требует отдельного рассмотрения путем применения других признаков сходимости (или расходимости).

**Пример 1.14.** Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

*Решение.* Если  $|x| < 1$ , то исследуемый функциональный ряд есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (1.6) с  $q = x$ ,  $a = 1$ . Следовательно,  $|x| < 1$  есть область сходимости функцио-

нального ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , причем (см. пример 1.1):

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x} \Rightarrow s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

В то же время на границе своей области сходимости  $x = \pm 1$  функциональный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  превращается в расходящийся числовой

ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n$  (см. пример 1.1).

Таким образом, исследуемый функциональный ряд сходится абсолютно в области  $|x| < 1$  и его сумма  $s(x) = \frac{1}{1-x}$ .

*Ответ:* сходится абсолютно в области  $|x| < 1$  и его сумма  $s(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**Пример 1.15.** Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

*Решение.* Воспользуемся признаком Даламбера (1.23). Имеем:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$



Теперь вычислим предел (1.23):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1, \quad \forall |x| < \infty.$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера, исследуемый ряд сходится абсолютно на всей числовой оси:  $|x| < \infty$ .

*Ответ:* область сходимости  $|x| < \infty$ .

**Пример 1.16.** Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

*Решение.* Воспользуемся радикальным признаком Коши (1.24).

Имеем:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{2^n} \right|} = \frac{|x|}{2}.$$

Теперь вычислим предел (1.24):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} < 1$ .

Тогда интервал сходимости степенного ряда есть  $|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$ .

В то же время на границе своей области сходимости  $x = \pm 2$  функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$  превращается в расходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \quad (\text{см. пример 1.1}).$$

Таким образом, согласно радикальному признаку Коши, исследуемый ряд сходится абсолютно в области  $|x| < 2$ .

*Ответ:* область сходимости  $|x| < 2$ .

### ***Равномерная сходимость функционального ряда***

Пусть функциональный ряд (1.21) сходится на множестве  $\{x\}$  и  $s(x)$  – его сумма. Это означает, что существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ ,  $\forall x \in \{x\}$  (см. замечание 1.11). Отсюда, на основании определения предела, следует, что для  $\forall \varepsilon > 0$  и для данного  $x \in \{x\}$  существует такой номер  $N$ , что для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство

$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ , где  $x$  – данное фиксированное значение, принадлежащее множеству  $\{x\}$ . Таким образом, для другого значения  $x \in \{x\}$ , при тех же  $\varepsilon > 0$  и найденном номере  $N$  может оказаться, что неравенство  $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$  уже не выполняется. Следовательно, необходимо выбрать другой номер  $N_1$ , чтобы неравенство  $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$  выполнялось и т. д. Эти рассуждения приводят к понятию равномерной сходимости функционального ряда.

**Определение 1.9.** Функциональный ряд (1.21) называется *равномерно сходящимся* к сумме  $s(x)$  на множестве  $\{x\}$ , если для  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что для  $\forall n \geq N(\varepsilon)$  и для всех  $x \in \{x\}$  выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon. \quad (1.25)$$

**Замечание 1.12.** 1. Существенно, что номер  $N(\varepsilon)$  зависит только от  $\varepsilon$  и не зависит от  $x$ . Тем самым для  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой универсальный номер  $N(\varepsilon)$ , начиная с которого неравенство  $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x \in \{x\}$ .

2. Из сходимости функционального ряда (1.21) не следует его равномерная сходимость, но из равномерной сходимости функционального ряда следует его сходимость.

**Пример 1.17.** Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ .

*Решение.* Исследуемый функциональный ряд по *признаку Лейбница* сходится для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$ . Действительно, оба условия (1.19) и (1.20) признака Лейбница выполняются:

$$1) \frac{1}{x^2 + n} \geq \frac{1}{x^2 + n + 1}, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in (-\infty; \infty);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0, \quad \forall x \in (-\infty; \infty).$$

Проверим условие (1.25). Имеем:

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{x_2 + n + 1} - \frac{(-1)^n}{x_2 + n + 2} + \dots \right| < \frac{1}{x_2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1} < \varepsilon,$$

$$\forall x \in (-\infty; \infty), \forall n \geq N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right].$$

Таким образом, для  $\forall \varepsilon > 0$  существует такой номер  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$ , что для  $\forall n \geq N(\varepsilon)$  и для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$  условие (1.25) выполняется, а, следовательно, исследуемый функциональный ряд сходится равномерно для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$ .

*Ответ:* функциональный ряд сходится равномерно для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$ .

Для исследования функционального ряда на равномерную сходимость используют *признак Вейерштрасса*.

### ***Признак Вейерштрасса***

**Теорема 1.8.** Если функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  определен на множестве  $\{x\}$  и

1) существует такой знакоположительный сходящийся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , что

2) для  $\forall x \in \{x\}$  и для  $\forall n \geq 1$  выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leq c_n, \quad (1.26)$$

то функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $\{x\}$ .

Таким образом, функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $\{x\}$ , если все его члены можно мажорировать (оценивать) на этом множестве членами знакоположительного сходящегося числового ряда.

**Пример 1.18.** Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha+1}}$ ,  $\alpha > 0$ .

*Решение.* Рассмотрим знакоположительный сходящийся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$  – ряд Дирихле (1.4) с  $p = \alpha + 1 > 1$ . Проверим условие (1.26). Имеем:

$$|\sin z| \leq 1, \quad \forall z \in (-\infty; \infty) \Rightarrow \left| \frac{\sin nx}{n^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in (-\infty; \infty), \quad \forall \alpha > 0.$$

Таким образом, исследуемый функциональный ряд по признаку Вейерштрасса сходится равномерно для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$ ,  $\forall \alpha > 0$ .

*Ответ:* функциональный ряд сходится равномерно для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$ ,  $\forall \alpha > 0$ .

**Замечание 1.13.** Признак Вейерштрасса не является необходимым признаком. Например, функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  сходится равномерно для  $\forall x \in \{-\infty; \infty\}$ , но его члены нельзя мажорировать на этом множестве членами знакоположительного сходящегося числового ряда (условие (1.26) не выполняется):  $\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \geq 1$ ,  $\forall x \in (-\infty; \infty)$ , но числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – расходится как гармонический ряд (см. замечание 1.2).

### **Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов**

**Свойство 1.5.** Если функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на множестве  $\{x\}$  к сумме  $s(x)$  и существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall a \in \{x\},$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a} s(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (1.27)$$

Таким образом, при выполнении вышеназванных условий знак предела и знак суммы ряда можно менять местами, т. е. переходить к пределу почленно.

**Свойство 1.6.** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n = f_n(a), \quad \forall n \geq 1, \quad \forall a \in \{x\},$$

т. е. члены  $f_n(x)$  функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  – непрерывны для  $\forall n \geq 1, \forall a \in \{x\}$ , то и его сумма  $s(x)$  также непрерывна:  $\lim_{x \rightarrow a} s(x) = s(a)$ .

**Свойство 1.7.** Если функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно к сумме  $s(x)$  на отрезке  $[a; b]$  и существуют интегралы  $\int_a^b f_n(x) dx, \forall n \geq 1$ , то

$$\int_a^b s(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (1.28)$$

Таким образом, при выполнении вышеназванных условий знак интеграла и знак суммы ряда можно менять местами, т. е. переходить к почленному интегрированию функционального ряда.

**Свойство 1.8.** Если существуют производные  $f'_n(x), \forall n \geq 1, \forall x \in [a; b]$  и функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  сходится равномерно на отрезке  $[a; b]$ , а функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится хотя бы в одной точке  $x \in [a; b]$ , то функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на отрезке  $[a; b]$  к сумме  $s(x)$  и

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a; b]. \quad (1.29)$$

Таким образом, при выполнении вышеназванных условий знак производной и знак суммы ряда можно менять местами, т. е. переходить к почленному дифференцированию функционального ряда.

## Лекция 5

### § 1.6. Степенные ряды

**Определение 1.10.** Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (1.30)$$

где  $a_n$  – постоянные числа (*коэффициенты степенного ряда*), называют **степенным рядом**.

Для степенных рядов справедлива *теорема Абеля*.

#### *Теорема Абеля*

**Теорема 1.9.** 1. Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится при некотором значении  $x_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится при  $\forall x$ , для которого  $|x| < |x_0|$ .

2. Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится при некотором значении  $x'_0 \neq 0$ , то он расходится при  $\forall x$ , для которого  $|x| > |x'_0|$ .

*Доказательство.* 1. По условию числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости (см. теорему 1.1) существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ . Это означает, что существует такое

число  $M > 0$ , что  $|a_n x_0^n| < M, \forall n \geq 1$ . Рассмотрим ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$

и  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left( \frac{x}{x_0} \right)^n$ . Поскольку  $|a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \forall n \geq 1$ ,

то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  сходится при  $\forall x$ , для которого

$|x| < |x_0|$  (как *геометрическая прогрессия* со знаменателем  $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ).

Отсюда следует, что степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится абсолютно при  $\forall x$ , для которого  $|x| < |x_0|$ .

2. Пусть теперь в точке  $x'_0 \neq 0$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится. Докажем, что для  $\forall x$ , для которого  $|x| > |x'_0|$ , степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится. Доказательство проведем от противного. Пусть в точке  $x$ , для которой  $|x| > |x'_0|$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится. Тогда на основании п. 1 теоремы Абеля степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится и в точке  $x'_0 \neq 0$ , для которой  $|x'_0| < |x|$ . Но это противоречит условию, что в точке  $x'_0 \neq 0$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится. Следовательно, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  расходится при  $\forall x$ , для которого  $|x| > |x'_0|$ .

**Следствие 1.2.** Из теоремы Абеля следует, что существует такое число  $R > 0$ , что степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится абсолютно при  $\forall x$ , для которого  $|x| < R$ , и он расходится при  $\forall x$ , для которого  $|x| > R$ . Число  $R > 0$  называют **радиусом сходимости степенного ряда**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , а область  $|x| < R$  называют его **интервалом сходимости**.

При этом интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  может вырождаться в точку, т. е.  $R = 0$ . Например, для степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ , согласно признаку Даламбера (1.23), имеем:

$$\begin{aligned} f_n(x) = n!x^n &\Rightarrow f_{n+1}(x) = (n+1)!x^{n+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = (n+1)|x| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| (n+1) = 0 < 1$$

при  $x = 0$ . Но это означает, что  $R = 0$ .

Таким образом, областью сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  является интервал  $(-R; R)$ . При  $R = 0$  ряд сходится в единственной точке  $x = 0$ ; при  $R = \infty$  областью сходимости ряда является вся числовая ось. Вопрос же о сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  на границе его интервала сходимости,  $x = \pm R$ , в каждом конкретном случае решается индивидуально путем непосредственного исследования числовых рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n$ .

Для определения интервала сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  применяют *признак Даламбера* (см. теорему 1.4) или *радикальный признак Коши* (см. теорему 1.5) к степенному ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n$ , в котором  $x$  считается фиксированным и принадлежащим его интервалу сходимости. Таким образом, при нахождении интервала сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , в котором  $x$  считается фиксированным и принадлежащим его интервалу сходимости, вместо условий (1.7) [или (1.23)] для признака Даламбера и условий (1.11) [или (1.24)] для радикального признака Коши можно непосредственно использовать условия:

$$|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1; \quad (1.31)$$

$$|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1. \quad (1.32)$$

Поскольку степенной ряд является частным случаем функционального ряда, то для него справедливы все предыдущие результаты, полученные для функционального ряда. В частности, эти результаты можно сформулировать в виде следующих свойств для степенных рядов.



### Свойства степенных рядов

**Свойство 1.9.** Если  $R > 0$  – радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , то для  $\forall r < R$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится равномерно в области  $|x| \leq r$ . Действительно, на основании признака Вейерштрасса (см. теорему 1.8) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  является мажорантным для исходного степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

**Свойство 1.10.** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  можно почленно интегрировать и дифференцировать, а также совершать почленный предельный переход на интервале его сходимости:  $|x| < R$ . При этом радиус сходимости получаемых рядов не меняется.

**Замечание 1.14.** Степенной ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , где  $c_n = a_n + i b_n$  – комплексные числа,  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ), а  $a_n, b_n$  – действительные числа и  $z$  – комплексная переменная, называют **степенным рядом с комплексными членами**. Для него справедливы все свойства для степенных рядов с действительными членами. В частности, для степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  существует такое число  $R > 0$ , что при  $\forall z$ , для которого  $|z| < R$ , степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  сходится. При этом число  $R > 0$  называют **радиусом сходимости** степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , а область  $|z| < R$  называют его **кругом сходимости**, причем в области  $|z| \leq r, \forall r < R$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  сходится равномерно. В области  $|z| > R$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  расходится.

**Определение 1.11.** *Степенным рядом общего вида* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n. \quad (1.33)$$

**Свойство 1.11.** Степенной ряд (1.33) всегда сходится на интервале сходимости  $|x-a| < R$  или  $(a-R; a+R)$ , причем равномерно, где его можно почленно интегрировать и дифференцировать, а также совершать почленный предельный переход. При этом радиус сходимости получаемых рядов не меняется. Число  $a$  называют *центром сходимости*.

Интервал сходимости для степенного ряда (1.30) может быть найден с помощью формул (1.31) или (1.32), а для степенного ряда (1.33), интервал сходимости находят с помощью одной из формул:

$$|x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1; \quad (1.34)$$

$$|x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1. \quad (1.35)$$

Вопрос же о сходимости степенных рядов (1.30) и (1.33) на концах промежутка в точках  $x = \pm R$  и  $x = a \pm R$  решается непосредственным исследованием числовых рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm R)^n$ .

**Пример 1.19.** Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$ .

*Решение.* Коэффициенты степенного ряда

$$a_n = \frac{1}{2n+3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+3} = \frac{1}{2n+5}.$$

Для нахождения интервала сходимости воспользуемся формулами (1.23) или (1.34). Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1} (2n+3)}{(2n+5)(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+5} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n} = |x-2| < 1. \end{aligned}$$

Тогда интервал сходимости степенного ряда есть  $|x-2| < 1$  или  $-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$ .

Исследуем сходимость степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$  на концах промежутка:

1. При  $x=1$  получаем знакочередующийся числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$ . Проверим его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$  и сравним его с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , воспользовавшись вторым признаком сравнения. Тогда, обозначив  $a_n = \frac{1}{2n+3}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ , получим:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$ .

Но поскольку гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится (см. замечание 1.2), то на основании второго признака сравнения заключаем, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$  также расходится. Следовательно, знакочередующийся ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$  абсолютной сходимости не имеет. Исследуем его на условную сходимость. Для этого проверим выполнение условий признака Лейбница:

1)  $a_{n+1} = \frac{1}{2n+5} \leq a_n = \frac{1}{2n+3}$ ,  $\forall n \geq 0$  – первое условие выполнено;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0$  – второе условие выполнено.

Таким образом, условия признака Лейбница выполнены и, следовательно, знакочередующийся ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$  сходится условно, а значит, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$  сходится в точке  $x=1$  условно.

а значит, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$  сходится в точке  $x=1$  условно.

а значит, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$  сходится в точке  $x=1$  условно.

2. При  $x = 3$  получаем знакоположительный числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ . Этот ряд исследован нами выше в п. 1 и установлено, что он расходится.

Таким образом, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$  в точке  $x = 3$  расходится.

*Ответ:* область сходимости исследуемого степенного ряда  $[1; 3)$ , причем в точке  $x = 1$  он сходится условно.

**Пример 1.20.** Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$ .

*Решение.* Воспользуемся радикальным признаком Коши (1.24). Имеем:

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^{2n}}{4^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(x-1)^{2n}}{4^n} \right|} = \frac{(x-1)^2}{4}.$$

Теперь вычислим предел (1.24):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{(x-1)^2}{4} < 1$ . Тогда интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  определяется из неравенства  $(x-1)^2 < 4$ . Отсюда находим:  $|x-1| < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$ . Теперь исследуем степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  на концах промежутка:

1. При  $x = -1$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  превращается в знакоположительный числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ , который расходится по следствию 1.1 из необходимого признака сходимости (см. также пример 1.1), т. к.  $a_n = 1^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1 \neq 0$ .

Таким образом, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  в точке  $x = -1$  расходится.

2. При  $x = 3$  степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  превращается в знакоположительный числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ , который, как установлено выше в п. 1, расходится.

Таким образом, степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$  в точке  $x = 3$  также расходится.

*Ответ:* область сходимости исследуемого степенного ряда  $-1 < x < 3$ .

## Лекция 6

### § 1.7. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

**Определение 1.12.** Функция  $f(x)$  на интервале  $(a - R; a + R)$  разложима в степенной ряд, если на интервале  $(a - R; a + R)$  существует степенной ряд, сходящийся к функции  $f(x)$  на этом интервале.

*Для ряда Тейлора справедливы следующие утверждения:*

1. Для того чтобы функция  $f(x)$  на интервале  $(a - R; a + R)$  была разложима в степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ , необходимо, чтобы на этом интервале функция  $f(x)$  имела производные любого порядка.

2. Если функция  $f(x)$  на интервале  $(a - R; a + R)$  разложима в степенной ряд, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n, \quad (1.36)$$

то это разложение единственно.

Действительно, если  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ , то на основании свойства 1.11 имеем:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = a_n n! + a_{n+1} (n+1)! (x - a) + \dots, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, при  $x = a$ :

$$f^{(n)}(a) = a_n n!, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, коэффициенты  $a_n$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  определяются однозначно, причем

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.37)$$

**Определение 1.13.** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ , коэффициенты которого определяются формулой (1.37), называют *рядом Тейлора* и записывают

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Таким образом, если функция  $f(x)$  на интервале  $(a-R; a+R)$  разложима в степенной ряд (1.36), то этот ряд является рядом Тейлора (1.38) функции  $f(x)$  на интервале  $(a-R; a+R)$ .

**Замечание 1.15.** Напомним, что для функции  $f(x)$ , имеющей все производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно, в окрестности точки  $x = a$  (т. е. на некотором интервале, содержащем точку  $x = a$ ) справедлива *формула Тейлора*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ &\quad + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

где  $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ,  $\xi = a + \theta(x-a)$ ,  $0 < \theta < 1$  называют

*остаточным членом в форме Лагранжа.*

Если функция  $f(x)$  имеет производные всех порядков в окрестности точки  $x = a$ , то в формуле Тейлора число  $n$  можно брать сколь

угодно большим. Тогда формула Тейлора при  $n \rightarrow \infty$  переходит в ряд Тейлора (1.38), причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0 \quad (1.39)$$

в рассматриваемой окрестности точки  $x = a$ . Более того, можно показать, что условие (1.39) является необходимым и достаточным условием разложимости функции  $f(x)$  в ряд Тейлора (1.38).

Если в разложении функции  $f(x)$  в ряд Тейлора (1.38) положить  $a = 0$ , то получим частный случай ряда Тейлора, называемый *рядом Маклорена*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \end{aligned} \quad (1.40)$$

### **Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций**

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.41)$$

Область сходимости:  $x \in (-\infty; \infty)$ .

Действительно, полагая  $f(x) = e^x$ , находим:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) = f(x) = e^x &\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда подстановка полученных выражений в формулу (1.40) приводит к формуле (1.41). Область сходимости степенного ряда, стоящего в правой части формулы (1.41), была найдена в примере 1.15.

$$2. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (1.42)$$

Область сходимости:  $x \in (-\infty; \infty)$ .

Действительно, полагая  $f(x) = \sin x$ , находим:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k + 1, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 2k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Тогда подстановка полученных выражений в формулу (1.40) приводит к формуле (1.42). Область сходимости степенного ряда, стоящего в правой части формулы (1.42), находится с помощью признака Даламбера [см. формулу (1.23)]:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3} (2n+1)!}{(2n+3)! (-1)^n x^{2n+1}} \right| = \left| \frac{-x^2 (2n+1)!}{(2n+1)! (2n+2)(2n+3)} \right| = \\ &= \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1, \\ &\quad \forall x \in (-\infty; \infty). \end{aligned}$$

$$3. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (1.43)$$

Область сходимости:  $x \in (-\infty; \infty)$ .

Действительно, полагая  $f(x) = \cos x$ , находим:

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 2k + 1, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Тогда подстановка полученных выражений в формулу (1.40) приводит к формуле (1.43). Область сходимости степенного ряда, стоящего в правой части формулы (1.43), также находится с помощью признака Даламбера [см. формулу (1.23)]:



$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} (2n)!}{(2n+2)! (-1)^n x^{2n}} \right| = \\
&= \left| \frac{-x^2 (2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1, \forall x \in (-\infty; \infty).
\end{aligned}$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}. \quad (1.44)$$

Область сходимости:  $x \in (-1; 1]$ .

Действительно, полагая  $f(x) = \ln(1+x)$ , находим:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow \\
&\Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad \forall n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Тогда подстановка полученных выражений в формулу (1.40) приводит к формуле (1.44). Область сходимости степенного ряда, стоящего в правой части формулы (1.44), также находится с помощью признака Даламбера [см. формулу (1.23)]:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1} n}{(n+1)(-1)^{n-1} x^n} \right| = \\
&= \frac{|x|n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|n}{n+1} = |x| < 1.
\end{aligned}$$

Теперь исследуем сходимость степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  на концах промежутка  $-1 < x < 1$ :

а) при  $x = -1$  получаем числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится, т. к. он отличается от гармонического ряда только знаком;

б) при  $x = 1$  получаем знакочередующийся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , который сходится условно (см. пример 1.13).

Таким образом, в точке  $x = 1$  степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  сходится условно, причем  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ .

5.  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha$  – любое действительное число,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \quad (1.45)$$

Область сходимости:  $x \in (-1; 1)$ .

$$6. f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (1.46)$$

Область сходимости:  $x \in (-1; 1)$  (см. примеры 1.1 и 1.14).

Применение разложений элементарных функций в ряды Маклорена (1.41)–(1.46) позволяют во многих случаях разложить заданную функцию в ряд Тейлора или Маклорена, непосредственно не используя формул (1.38) или (1.40), требующих вычисления  $n$ -й производной.

**Пример 1.21.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ .

*Решение.* Преобразуем заданную функцию, разложив ее на простейшие дроби. Для этого находим корни знаменателя:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Тогда получим:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = f_1(x) - f_2(x).$$

Теперь разложим функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  в ряд Маклорена, используя формулу (1.46):

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} = \{t = -x\} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1;$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \left\{t = -\frac{x}{2}\right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n, \quad |x| < 2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} x^n, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

*Ответ:* разложение функции  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  в ряд Маклорена имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} x^n, \quad |x| < 1.$$

**Пример 1.22.** Разложить функцию  $f(x) = x \cos 2x$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $a = \frac{\pi}{2}$ .

*Решение.* Преобразуем заданную функцию таким образом, чтобы применить формулу (1.43) для разложения функции  $f(x) = x \cos 2x$  в ряд Тейлора по степеням  $x - \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cos 2x = \left( \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \cos 2 \left( \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) = \\
&= \left( \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( 2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \pi \right) = \left\{ t = x - \frac{\pi}{2} \right\} = \\
&= \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \cos(2t + \pi) = - \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \cos 2t = - \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} \left( t^{2n+1} + \frac{\pi}{2} t^{2n} \right)}{(2n)!}, \quad |t| < \infty.
\end{aligned}$$

Теперь, учитывая сделанную замену  $t = x - \frac{\pi}{2}$ , окончательно получаем:

$$f(x) = x \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} \left( \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n+1} + \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n} \right), \quad |x| < \infty.$$

*Ответ:* разложение функции  $f(x) = x \cos 2x$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $a = \frac{\pi}{2}$  имеет вид:

$$f(x) = x \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} \left( \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n+1} + \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n} \right), \quad |x| < \infty.$$

## Лекция 7

### § 1.8. Применение степенных рядов

#### 1. Приближенное вычисление значений функций

Разложение функции в степенной ряд позволяет вычислить ее приближенное значение как сумму первых  $n$  членов ряда. Погрешность вычислений всегда можно оценить, используя, например, теорему Лейбница или явное выражение для  $n$ -го члена ряда.

**Пример 1.23.** Вычислить приближенно  $\sqrt[3]{28}$  с точностью  $\delta = 0,001$ .

*Решение.* Преобразуем заданное выражение

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{1+27} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{27}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся формулой (1.45), в которой  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $x = \frac{1}{27}$ . Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{28} &= 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{3} - n + 1 \right)}{n!} \left( \frac{1}{27} \right)^n \right) = \\ &= 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \frac{-2}{3} \frac{-5}{3} \dots \frac{-(3n-4)}{3}}{n!} \frac{1}{3^{3n}} \right) = \\ &= 3 + \frac{1}{3^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3^{4n-1} n!}. \end{aligned}$$

Для вычисления суммы полученного ряда с заданной точностью  $\delta$  необходимо оставить те слагаемые, абсолютная величина которых не меньше точности  $\delta$ . Имеем:

$$b_0 = 3 > \delta = 0,001; \quad b_1 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} > \delta = 0,001;$$

$$b_2 = \frac{2}{3^{4 \cdot 2 - 1} 2!} = \frac{1}{2187} < \delta = 0,001.$$

Таким образом, для вычисления  $\sqrt[3]{28}$  с заданной точностью  $\delta = 0,001$  достаточно взять два первых члена ряда

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27} \approx 3,037.$$

*Ответ:*  $\sqrt[3]{28} \approx 3,037$  с точностью до 0,001.

## 2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Поскольку степенные ряды внутри их области сходимости могут быть почленно проинтегрированы (см. свойство 1.10), то это позволяет представлять определенные интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях, в виде степенных рядов, предварительно разложив подынтегральную функцию в степенной ряд внутри его области сходимости. Полученные разложения затем могут быть использованы для приближенного вычисления определенных интегралов.

**Пример 1.24.** Вычислить приближенно  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$  с точностью  $\delta = 0,1$ .

*Решение.* Разложим подынтегральную функцию  $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$  в ряд Маклорена, используя разложение (1.44). Тогда получим (здесь  $x \in [-1; 1]$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^2)}{x} &= \frac{1}{x} \ln(1+x^2) = \{t = x^2\} = \frac{1}{x} \ln(1+t) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Полученное разложение подставим в искомый интеграл и поменяем местами операции суммирования и интегрирования (т. е. выполним почленное интегрирование):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{2n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left. \frac{x^{2n}}{2n} \right|_0^1 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2}. \end{aligned}$$

Для вычисления суммы полученного ряда с заданной точностью  $\delta$  необходимо оставить те слагаемые, абсолютная величина которых не меньше точности  $\delta$ . Имеем:

$$b_1 = \frac{1}{2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2} > \delta = 0,1; \quad b_2 = \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8} > \delta = 0,1;$$

$$b_3 = \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{18} < \delta = 0,1.$$

Таким образом, для вычисления заданного интеграла с точностью  $\delta = 0,1$  необходимо взять два первых члена полученного ряда

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \approx 0,4.$$

*Ответ:*  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx \approx 0,4$  с точностью до 0,1.

**Пример 1.25.** Представить в виде степенного ряда интеграл  $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $a$  – любое действительное число.

*Решение.* Разложим подынтегральную функцию  $\frac{\sin x}{x}$  в ряд Маклорена, используя разложение (1.42). Тогда получим [здесь  $x \in (-\infty; \infty)$ ]:  $\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ . Полученное разложение подставим в искомый интеграл и поменяем местами операции суммирования и интегрирования (т. е. выполним почленное интегрирование). В результате искомый интеграл представится в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^a x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \Big|_0^a = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$ .

**Пример 1.26.** Представить в виде степенного ряда интеграл  $\int_0^a e^{-x^2} dx$ ,  $a$  – любое действительное число.

*Решение.* Разложим подынтегральную функцию  $e^{-x^2}$  в ряд Маклорена, используя разложение (1.41). Тогда получим [здесь  $x \in (-\infty; \infty)$ ]:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Полученное разложение подставим в искомый интеграл и поменяем местами операции суммирования и интегрирования (т. е. выполним почленное интегрирование). В результате искомый интеграл представится в виде степенного ряда:

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^a x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \Big|_0^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

$$\text{Ответ: } \int_0^a e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Отметим, что полученные в примерах 1.25 и 1.26 числовые ряды сходятся абсолютно для любого действительного числа  $a$ , поскольку используемые степенные ряды сходятся при всех  $x \in (-\infty; \infty)$ .

### 3. Приближенное вычисление натуральных логарифмов

Применение формулы (1.44) пригодно только для приближенного вычисления  $\ln 2$ , т. к. формула (1.44) справедлива лишь для  $x \in (-1; 1]$ , при  $x = 1$  дает  $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . Последний числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  сходится условно, к тому же – медленно. Следовательно, его применение для приближенного вычисления  $\ln 2$  с заданной точностью требует учета большого числа членов этого ряда. Поэтому необходимо получить формулу, которая позволяла бы приближенно вычислять натуральные логарифмы натуральных чисел с любой наперед заданной точностью. Для этого вычтем из формулы (1.44) формулу

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

которая получается из формулы (1.44) заменой  $x$  на  $-x$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n-1} + 1] x^n}{n} = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$



Полагая  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow x = \frac{1}{2n+1}$ , находим:

$$\ln \frac{n+1}{n} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (1.47)$$

причем члены числового ряда в правой части (1.47) быстро убывают.

В частности, при  $n=1$  имеем:  $\ln 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}}$ ; при  $n=2$  имеем:

$\ln 3 = \ln 2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)5^{2k+1}}$  и т. д.

#### **4. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений**

Рассмотрим применение степенных рядов к приближенному интегрированию дифференциальных уравнений. Решим следующую задачу Коши:

$$y'' = F(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Решение будем искать в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \quad (1.48)$$

Первые два члена в разложении (1.48) определяются по начальным условиям:  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ . Третий член в этом разложении определяется из исходного уравнения при  $x = x_0$ :  $y''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0)$ . Четвертый член разложения находится путем дифференцирования уравнения по  $x$  и последующего вычисления при  $x = x_0$ :

$$y'''|_{x=x_0} = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} y' \Big|_{x=x_0} + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} y'' \Big|_{x=x_0}.$$

Таким образом, остальные члены в разложении, начиная с четвертого, находятся путем последовательного дифференцирования уравнения по  $x$  и последующей подстановкой вместо  $x$  числа  $x_0$ .

**Пример 1.27.** Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд Маклорена решения  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y' = xy - e^{-y}$ , удовлетворяющего начальному условию  $y(0) = 0$ .

*Решение.* Полагая в (1.48)  $x_0 = 0$ , запишем:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Первый коэффициент в этом разложении определяется начальным условием:  $y(0) = 0$ , а второй – находится из дифференциального уравнения при  $x = 0$ :  $y'(0) = -1$ . Третий и четвертый коэффициенты в разложении найдем, последовательно продифференцировав исходное уравнение по  $x$ , а затем, полагая  $x = 0$ :

$$y''(0) = y''(x)|_{x=0} = y + xy' + e^{-y}y'|_{x=0} = -1;$$

$$y'''(0) = y'''(x)|_{x=0} = y' + xy'' + y' + e^{-y}y'' - e^{-y}(y')^2|_{x=0} = -4.$$

Подставляя найденные значения функции и ее производных при  $x = 0$  в разложение для решения  $y(x)$ , получим три члена искомого решения:  $y(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots$

*Ответ:*  $y(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \dots$

**Пример 1.28.** Найти два первых отличных от нуля члена разложения в ряд Маклорена решения  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y'' = -x^2y$ , удовлетворяющего начальным условиям  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

*Решение.* Полагая в (1.48)  $x_0 = 0$ , запишем:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Первые два коэффициента в этом разложении определяются начальными условиями:  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ; третий – находится из дифференциального уравнения при  $x = 0$ :  $y''(0) = 0$ . Четвертый и пятый коэффициенты в разложении найдем, последовательно продифференцировав исходное уравнение по  $x$ , а затем положим  $x = 0$ :

$$y'''(0) = y'''(x)|_{x=0} = -2xy - x^2 y' |_{x=0} = 0; y^{(4)}(0) = y^{(4)}(x)|_{x=0} = -2y - 2xy' - 2xy' - x^2 y'' |_{x=0} = -2.$$

Подставляя найденные значения функции и ее производных при  $x = 0$  в разложение для решения  $y(x)$ , получим два члена искомого решения:  $y(x) = 1 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$

$$\text{Ответ: } y(x) = 1 - \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

## Лекция 8

### § 1.9. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$

**Определение 1.14.** Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.49)$$

называют *тригонометрическим рядом Фурье* для функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , а числа  $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$  – *коэффициентами Фурье* для функции  $f(x)$ .

Если ряд (1.49) сходится, то его сумма  $s(x)$  является периодической функцией, определенной на отрезке  $[-\pi; \pi]$  с периодом  $T = 2\pi$ :  $s(x) = s(x + 2\pi)$ .

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную на отрезке  $[-\pi; \pi]$  с периодом  $T = 2\pi$ , которая разложима в тригонометрический ряд Фурье (1.49), т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1.50)$$

Тем самым тригонометрический ряд Фурье (1.49) сходится к функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ :  $s(x) = f(x)$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ . Если числовой ряд  $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$  сходится, то знакопеременный числовой

ряд  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$  сходится абсолютно. Следовательно, тригонометрический ряд Фурье (1.49) сходится к функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$  равномерно. Значит, для разложения (1.50) справедливо почленное интегрирование на отрезке  $[-\pi; \pi]$  (см. свойство 1.7). Тогда, проинтегрировав разложение (1.50) по  $x$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = a_0 \pi,$$

откуда следует:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (1.51)$$

Здесь учли, что интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, т. е.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ , а интегралы от четных функций в симметричных пределах вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} dx &= 2 \int_0^{\pi} dx = 2x \Big|_0^{\pi} = 2\pi; & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos nx dx = 2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} = \\ & & &= \frac{2}{n} (\sin \pi n - \sin 0) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить выражение для коэффициентов  $a_n$ , помножим разложение (1.50) на  $\cos kx$  и результат проинтегрируем по  $x$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx \right) = a_k \pi, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.52)$$

Здесь также учли, что интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, т. е.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nxdx = 0$ , а интегралы от четных функций в симметричных пределах вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx &= 2 \int_0^{\pi} \cos kxdx = 2 \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = 0; \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos kx \cos nxdx = \int_0^{\pi} (\cos(n-k)x + \cos(n+k)x) dx = \\ &= \begin{cases} \frac{\sin(n-k)x}{n-k} + \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \Big|_0^{\pi}, & n \neq k, \\ \int_0^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx, & n = k, \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ x + \frac{\sin 2kx}{2k} \Big|_0^{\pi} = \pi, & n = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично, помножив разложение (1.50) на  $\sin kx$  и проинтегрировав результат по  $x$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nxdx \right) = b_k \pi, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.53)$$

Здесь снова учли, что интегралы от нечетных функций в симметричных пределах равны нулю, а интеграл от четной функции в симметричных пределах вычисляется следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nxdx = 2 \int_0^{\pi} \sin kx \sin nxdx = \int_0^{\pi} (\cos(n-k)x - \cos(n+k)x) dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \Big|_0^\pi, & n \neq k, \\ \int_0^\pi (1 - \cos 2kx) dx, & n = k, \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ x - \frac{\sin 2kx}{2k} \Big|_0^\pi = \pi, & n = k. \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты Фурье в разложении (1.50) функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-\pi; \pi]$  определяются однозначно формулами (1.51)–(1.53).

Для формулировки теоремы об условии разложимости функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье введем понятие кусочно-монотонной функции.

**Определение 1.15.** Функция  $f(x)$  называется **кусочно-монотонной** на отрезке  $[a; b]$ , если этот отрезок можно разбить конечным числом точек  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  на частичные интервалы  $(a; x_1)$ ,  $(x_1; x_2), \dots, (x_{n-1}; b)$  так, чтобы на каждом из них функция  $f(x)$  была монотонной, т. е. была, либо невозрастающая, либо неубывающая.

Из этого определения следует, что *если функция  $f(x)$  является кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке  $[a; b]$ , то она может иметь только конечное число точек разрыва первого рода.* Действительно, если  $x = c \in [a; b]$  – точка разрыва функции  $f(x)$  и существуют конечные односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0)$  и  $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0)$ , то точка  $x = c$  – точка разрыва первого рода функции  $f(x)$ .

### **Признак Дирихле**

**Теорема 1.10** (об условии разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье).

Если функция  $f(x)$  является:

- 1) периодической функцией, определенной на отрезке  $[-\pi; \pi]$  с периодом  $T = 2\pi$ ;
- 2) кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке  $[-\pi; \pi]$  (имеет только конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке), то:
  - а) ряд Фурье (1.49) функции  $f(x)$  сходится для  $\forall x \in [-\pi; \pi]$ ;
  - б) сумма  $s(x)$  этого ряда равна значению функции  $f(x)$  в ее точках непрерывности;

в) в точках же разрыва функции  $f(x)$  сумма  $s(x)$  этого ряда равна среднему арифметическому ее левого и правого предельных значений в этих точках разрыва, т. е. если  $x = c \in [-\pi; \pi]$  – точка разрыва первого рода функции  $f(x)$ , то

$$s(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Учитывая, что  $\forall x \Rightarrow f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ , то, следовательно,  $s(x) = f(x)$ ,  $\forall x$ .

**Пример 1.29.** Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую,  $T = 2\pi$ , функцию  $f(x) = x$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ .

*Решение.* Коэффициенты Фурье найдем по формулам (1.51)–(1.53). Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nxdx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. к. подынтегральная функция четная, а пределы симметричны.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nxdx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \sin nxdx, v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nxdx \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\pi}{n} \cos \pi n + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

т. к. подынтегральная функция четная, а пределы симметричны.

Подставляя найденные коэффициенты в (1.50), получаем иско-  
мое разложение:

$$f(x) = x \Big|_{x \in [-\pi; \pi]}, \quad T=2\pi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Заметим, что полученное разложение можно использовать для суммирования числовых рядов. Например, полагая в полученном разложении  $x = \frac{\pi}{2}$ , находим:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi n}{2} =$$

$$= \left\{ \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, k = 1, 2, \dots, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, k = 0, 1, \dots \end{cases} \right\} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Отсюда следует:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$

*Ответ:* разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = x$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ ,  $T = 2\pi$ , имеет вид:

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

**Неполные тригонометрические ряды Фурье  
на отрезке  $[-\pi; \pi]$  (тригонометрические ряды Фурье  
для четных и нечетных функций)**

1. Пусть  $f(x)$  – четная функция. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad (1.54)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx; \quad (1.55)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = 0. \quad (1.56)$$

Таким образом, разложение четной функции в тригонометрический ряд Фурье содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (1.57)$$

2. Пусть  $f(x)$  – нечетная функция. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0; \quad (1.58)$$



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = 0; \quad (1.59)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx. \quad (1.60)$$

Таким образом, разложение нечетной функции в тригонометрический ряд Фурье содержит только синусы (см. пример 1.29):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (1.61)$$

**Пример 1.30.** Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую,  $T = 2\pi$ , функцию  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ .

*Решение.* Коэффициенты Фурье найдем по формулам (1.54)–(1.56). Имеем:

$$\begin{aligned} b_n &= 0; a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nxdx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos nxdx, v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nxdx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2(\cos \pi n - \cos 0)}{\pi n^2} = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1.57), получаем искомое разложение:

$$f(x) = |x| \Big|_{x \in [-\pi; \pi], T=2\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

Заметим, что полученное разложение можно использовать для суммирования числовых рядов. Например, полагая в полученном разложении  $x = 0$ , находим:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Отсюда следует:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

*Ответ:* разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ ,  $T = 2\pi$  имеет вид:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

## Лекция 9

### § 1.10. Разложение функций в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[a; a + 2\pi]$

Для периодических функций справедливо следующее свойство.

**Свойство 1.12.** Для периодической функции  $f(x)$  с периодом  $2l$  справедливо свойство: для любого действительного числа  $a$

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_a^{a+2l} f(x) dx. \quad (1.62)$$

Действительно, принимая во внимание, что  $f(t-2l) = f(t)$ , и полагая  $x = t - 2l$ , для любых действительных чисел  $c, d$  имеем:

$$\int_c^d f(x) dx = \int_{c+2l}^{d+2l} f(t-2l) dt = \int_{c+2l}^{d+2l} f(t) dt = \int_{c+2l}^{d+2l} f(x) dx.$$

Отсюда, в частности, при  $c = -l$ ,  $d = a$  получим:

$$\int_{-l}^a f(x) dx = \int_l^{a+2l} f(x) dx.$$

Теперь к обеим частям полученного равенства добавим определенный интеграл  $\int_a^l f(x) dx$ :

$$\int_{-l}^a f(x) dx + \int_a^l f(x) dx = \int_a^l f(x) dx + \int_l^{a+2l} f(x) dx.$$

Тогда, применяя свойство аддитивности для определенного интеграла, приходим к искомому равенству.

**Замечание 1.16.** Геометрический смысл равенства (1.62): площади областей, ограниченных графиком функции  $f(x)$  и осью абсцисс на отрезках  $[-l; l]$  и  $[a; a + 2l]$ , равны.

**Тригонометрический ряд Фурье  
для функции на отрезке  $[a; a + 2\pi]$**

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную на отрезке  $[a; a + 2\pi]$  с периодом  $T = 2\pi$ . Свойство (1.62) позволяет нам заменить отрезок  $[-\pi; \pi]$  на отрезок  $[a; a + 2\pi]$ . Тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; a + 2\pi]$  имеет прежний вид (1.50), а ее коэффициенты Фурье определяются формулами (1.51)–(1.53), в которых пределы  $-\pi, \pi$  заменяются пределами  $a, a + 2\pi$ , т. е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx; \quad (1.63)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.64)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.65)$$

**Пример 1.31.** Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую,  $T = 2\pi$ , функцию  $f(x) = x, x \in [0; 2\pi]$ .

*Решение.* Коэффициенты Фурье найдем по формулам (1.63)–(1.65), в которых  $a = 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos nx dx, v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{2\pi} = \frac{\cos 2\pi n - \cos 0}{\pi n^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \sin nx dx, v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nxdx \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-2\pi}{n} \cos 2\pi n + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{2\pi} \right] = -\frac{2}{n}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1.50), получаем иско-  
мое разложение:

$$f(x) = x \Big|_{x \in [0; 2\pi]}, \quad T=2\pi = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Заметим, что полученное разложение можно использовать для  
суммирования числовых рядов. Например, полагая в полученном раз-  
ложении  $x = \frac{\pi}{2}$ , находим:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} = \\ &= \left\{ \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ (-1)^k, & n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \right\} = \pi - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (см. также пример 1.29):  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1} = \frac{\pi}{4}$ .

*Ответ:* разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ ,  
 $T = 2\pi$  имеет вид:

$$f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

### **Тригонометрический ряд Фурье для функции с периодом $2l$**

1. Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-l; l]$  с периодом  
 $T = 2l$ . Разложим ее в тригонометрический ряд Фурье на этом отрезке.  
Для этого сделаем замену  $x = \frac{l}{\pi} t$ . Тогда функция  $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$  – периоди-  
ческая функция на отрезке  $[-\pi; \pi]$  с периодом  $T = 2\pi$  и, следовательно,  
она разложима в тригонометрический ряд Фурье на этом отрезке:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos ntdt;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin ntdt.$$

Возвращаясь в записанных выше выражениях к старой переменной  $t = \frac{\pi}{l}x$ , получим разложение функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-l; l]$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l}; \quad (1.66)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad (1.67)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.68)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.69)$$

2. Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; a + 2l]$  с периодом  $T = 2l$ . Разложим ее в тригонометрический ряд Фурье на этом отрезке. Свойство (1.62) позволяет нам заменить отрезок  $[-l; l]$  отрезком  $[a; a + 2l]$  (см. замечание 1.16). Тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; a + 2l]$  имеет прежний вид (1.66), а ее коэффициенты Фурье определяются формулами (1.67)–(1.69), в которых пределы  $-l, l$  заменяются пределами  $a, a + 2l$ , т. е.

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) dx; \quad (1.70)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.71)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.72)$$

**Пример 1.32.** Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию  $f(x) = 2x - 1$ ;  $x \in [-1; 1]$ ,  $T = 2$ .

*Решение.* Коэффициенты Фурье найдем по формулам (1.67)–(1.69), в которых  $l = 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 (2x - 1) dx = 2 \int_{-1}^1 x dx - \int_{-1}^1 dx = -2 \int_0^1 dx = -2x \Big|_0^1 = -2; \\ a_n &= \int_{-1}^1 (2x - 1) \cos \pi n x dx = 2 \int_{-1}^1 x \cos \pi n x dx - \int_{-1}^1 \cos \pi n x dx = -2 \int_0^1 \cos \pi n x dx = \\ &= -\frac{2}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_0^1 = 0; \\ b_n &= \int_{-1}^1 (2x - 1) \sin \pi n x dx = 2 \int_{-1}^1 x \sin \pi n x dx - \int_{-1}^1 \sin \pi n x dx = 4 \int_0^1 x \sin \pi n x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin \pi n x dx, \quad v = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n x \end{array} \right\} = -\frac{4}{\pi n} x \cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{4}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n x dx = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \cos \pi n + \frac{4}{(\pi n)^2} \sin \pi n x \Big|_0^1 = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}. \end{aligned}$$

Здесь учли, что интегралы от нечетных функций в симметричных пределах равны нулю, а интегралы от четных функций в симметричных пределах удваиваются, но вычисляются по половине отрезка интегрирования. Подставляя найденные коэффициенты в формулу (1.66), получим искомое разложение:

$$f(x) = -1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \pi n x.$$

*Ответ:* разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = 2x - 1$ ,  $x \in [-1; 1]$ ,  $T = 2$  имеет вид:

$$f(x) = -1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \pi n x.$$

### Тригонометрический ряд Фурье для неперiodической функции

Пусть функция  $f(x)$  – неперiodическая и кусочно-монотонная функция, определенная на отрезке  $[\alpha; \beta]$ . Рассмотрим перiodическую, кусочно-монотонную функцию  $f_1(x)$ , определенную на отрезке  $[a; a + 2\mu]$  с перiodом  $T = 2\mu \geq \beta - \alpha$ , и такую, чтобы на отрезке  $[\alpha; \beta]$ :  $f_1(x) = f(x)$ . Тогда функция  $f_1(x)$  разложима в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[a; a + 2\mu]$ , а следовательно, и функция  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$  также разложима в тригонометрический ряд Фурье, совпадающий с тригонометрическим рядом Фурье функции  $f_1(x)$  на отрезке  $[\alpha; \beta]$ .

**Замечание 1.17.** Если функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[0; l]$ , то ее можно продолжить либо четным, либо нечетным образом, либо произвольно на отрезок  $[-l; 0]$ , но сохраняя условие кусочной монотонности на отрезке  $[-l; 0]$ .

### Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме

Пусть функция  $f(x)$  разложима на отрезке  $[-l; l]$  с перiodом  $T = 2l$  в тригонометрический ряд Фурье (1.66):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Используя формулы

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

представим:

$$\cos \frac{\pi n x}{l} = \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} + e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2i}.$$

Подстановка этих представлений в разложение (1.66) дает:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{i\pi n x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{i\pi n x}{l}}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{a_0}{2} = c_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} + c_{-n} e^{-\frac{i\pi nx}{l}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{i\pi nx}{l}} = \\ &= \{n \rightarrow -n\} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}}. \end{aligned}$$

Итак, тригонометрический ряд Фурье в форме

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} \quad (1.73)$$

называют **тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме** для функции  $f(x)$  на отрезке  $[-l; l]$  с периодом  $T = 2l$ . При этом коэффициенты Фурье  $c_n$  функции  $f(x)$  легко находятся из формул (1.67)–(1.69):

$$\begin{aligned} c_{-n} = c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \frac{\cos \frac{\pi nx}{l} - i \sin \frac{\pi nx}{l}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i\pi nx}{l}} dx, \quad (1.74) \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

## § 1.11. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Рассмотренные выше тригонометрические ряды Фурье представляют собой частные случаи рядов Фурье по ортогональной и полной системе функций.

**Определение 1.16.** Бесконечная последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется **ортогональной** на отрезке  $[a; b]$ , если при  $\forall n \neq k$

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \neq 0.$$



**Определение 1.17.** Ортогональная бесконечная последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется *полной* на отрезке  $[a; b]$ , если для любой функции  $f(x)$ , для которой сходится несобственный интеграл  $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$  (т. е. квадратично интегрируемой), справедливо условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx} = 0. \quad (1.75)$$

Выражение, стоящее под знаком предела в условии (1.75), называют *средним квадратическим отклонением*  $n$ -й частичной суммы

$s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$  от функции  $f(x)$ , разложимой на отрезке  $[a; b]$  в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (1.76)$$

Таким образом, если условие (1.75) выполнено, то функция  $f(x)$  разложима на отрезке  $[a; b]$  в ряд Фурье (1.76), который *сходится к функции  $f(x)$  в среднем*. При этом коэффициенты Фурье  $c_n$  определяются однозначно из разложения (1.76). Для их нахождения, помножим разложение (1.76) на  $\varphi_k(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $a$  до  $b$ . Тогда, принимая во внимание условие ортогональности функций  $\{\varphi_n(x)\}$  на отрезке  $[a; b]$  (см. определение 1.16) и равномерную сходимость ряда Фурье (1.76), получим:

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = c_k \int_a^b \varphi_k^2(x) dx.$$

Отсюда следует

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k(x)\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.77)$$

где  $\|\varphi_k(x)\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx$  называют *квадратом нормы* функций  $\varphi_k(x)$ .

## § 1.12. Интеграл Фурье

Пусть функция  $f(x)$  определена для  $\forall x \in (-\infty; \infty)$  и абсолютно интегрируема на этом интервале, т. е. существует  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ .

**Определение 1.18.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  принадлежит на интервале  $(-\infty; \infty)$  классу  $L_1(-\infty; \infty)$ , если функция  $f(x)$  интегрируема (в смысле Римана) на любом отрезке числовой оси и абсолютно интегрируема на всей числовой оси, и записывать  $f(x) \in L_1(-\infty; \infty)$ .

Рассмотрим интеграл

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} f(x) dx. \quad (1.78)$$

Если  $f(x) \in L_1(-\infty; \infty)$ , то  $\forall p \in (-\infty; \infty)$  существует несобственный интеграл (1.78) и его называют **преобразованием Фурье** или **образом Фурье** функции  $f(x)$ . При этом функция  $F(p)$  непрерывна по переменной  $p$  и

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |F(p)| = 0. \quad (1.79)$$

Более того, представление (1.78) допускает возможность выразить функцию  $f(x)$  через функцию  $F(p)$ . Для того чтобы выразить функцию  $f(x)$  через функцию  $F(p)$ , помножим представление (1.78) на  $\frac{1}{2\pi} e^{-ipx}$  и проинтегрируем по  $p$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Тогда, изменив порядок интегралов в повторном интеграле, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p) dp &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(t-x)} dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-x) dt = f(x), \end{aligned}$$

где функцию

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(t-x)} dp$$

называют  $\delta$ -функцией, и которая обладает тем свойством, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-x)dt = f(x), \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Таким образом, выражение

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(p)dp \quad (1.80)$$

называют **обратным преобразованием Фурье** или **разложением функции  $f(x)$  в интеграл Фурье**. При этом под функцией  $f(x)$  понимают среднее арифметическое ее левого и правого предельных значений в точках разрыва, т. е.

$$\forall x \Rightarrow f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

### **Синус и косинус преобразования Фурье**

1. Пусть функция  $f(x)$  определена для  $\forall x \in (-\infty; \infty)$  и четная:  $f(-x) = f(x)$ . Тогда, принимая во внимание, что  $e^{ipx} = \cos px + i \sin px$ , вместо (1.78) и (1.80) получим:

$$F_c(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos px f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos px f(x) dx; \quad (1.81)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos px F_c(p) dp = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos px F_c(p) dp. \quad (1.82)$$

2. Пусть функция  $f(x)$  определена для  $\forall x \in (-\infty; \infty)$  и нечетная:  $f(-x) = -f(x)$ . Тогда, также принимая во внимание, что  $e^{ipx} = \cos px + i \sin px$ , вместо (1.78) и (1.80) получим:

$$F_s(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin px f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \sin px f(x) dx; \quad (1.83)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin px F_s(p) dp = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin px F_s(p) dp. \quad (1.84)$$

**Пример 1.33.** Найти косинус и синус образы Фурье функции  $f(x) = e^{-ax}$ ;  $x \in [0; \infty)$ ,  $a > 0$ .

*Решение.* 1. Продолжим функцию  $f(x)$  четным образом на область  $(-\infty; 0]$ . Тогда образ Фурье найдем по формуле (1.81). Применяя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле дважды, получим:

$$\begin{aligned}
 F_c(p) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos px dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-ax}, \quad du = -ae^{-ax} dx, \\ dv = \cos pxdx, \quad v = \frac{\sin px}{p} \end{array} \right\} = \\
 &= 2e^{-ax} \frac{\sin px}{p} \Big|_0^{\infty} + \frac{2a}{p} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin pxdx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-ax}, \quad du = -ae^{-ax} dx, \\ dv = \sin pxdx, \quad v = -\frac{\cos px}{p} \end{array} \right\} = \\
 &= -\frac{2a}{p} e^{-ax} \frac{\cos px}{p} \Big|_0^{\infty} - \frac{2a^2}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos pxdx = \frac{2a}{p^2} - \frac{a^2}{p^2} F_c(p).
 \end{aligned}$$

Отсюда, решая уравнение относительно искомого образа, находим:

$$F_c(p) = \frac{2a}{p^2 + a^2}.$$

2. Теперь продолжим функцию  $f(x)$  нечетным образом на область  $(-\infty; 0]$ . Тогда образ Фурье найдем по формуле (1.83). Применяя также формулу интегрирования по частям в определенном интеграле дважды, получим:

$$\begin{aligned}
 F_s(p) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin pxdx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-ax}, \quad du = -ae^{-ax} dx, \\ dv = \sin pxdx, \quad v = -\frac{\cos px}{p} \end{array} \right\} = \\
 &= -2e^{-ax} \frac{\cos px}{p} \Big|_0^{\infty} - \frac{2a}{p} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos pxdx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-ax}, \quad du = -ae^{-ax} dx, \\ dv = \cos pxdx, \quad v = \frac{\sin px}{p} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{2}{p} - \frac{2a}{p} e^{-ax} \frac{\sin px}{p} \Big|_0^{\infty} - \frac{2a^2}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin pxdx = \frac{2}{p} - \frac{a^2}{p^2} F_s(p).
 \end{aligned}$$

Отсюда, решая уравнение относительно искомого образа, находим:

$$F_s(p) = \frac{2p}{p^2 + a^2}.$$

*Ответ:* косинус и синус образы Фурье функции  $f(x) = e^{-ax}$ ;  $x \in [0; \infty)$ ,  $a > 0$  имеют вид:

$$F_c(p) = \frac{2a}{p^2 + a^2}; \quad F_s(p) = \frac{2p}{p^2 + a^2}.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

### Лекция 1

**Задание 1.1.** Исследовать ряды на сходимость:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+4}{3n+2} \right)^n$ . *Ответ:* ряд расходится;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n+1)$ . *Ответ:* ряд расходится;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+2}$ . *Ответ:* ряд расходится.

**Задание 1.2.** Исследовать ряды на сходимость:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{3n^2+2}$ . *Ответ:* ряд сходится;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{2n^3+n+1}$ . *Ответ:* ряд сходится;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{3n+4}$ . *Ответ:* ряд расходится;

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{3n+1}{2n^2+5}$ . *Ответ:* ряд расходится;

5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ . *Ответ:* ряд расходится;

6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ . *Ответ:* ряд расходится.

### Лекция 2

**Задание 2.1.** Исследовать ряды на сходимость:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{2^n}$ . *Ответ:* ряд сходится;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)3^n}{n!}$ . *Ответ:* ряд сходится;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!}$ . *Ответ:* ряд расходится;

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n-1}{3n+2} \right)^{n^2}.$$

*Ответ:* ряд расходится;

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}.$$

*Ответ:* ряд сходится;

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arcsin \frac{n+4}{2n-3} \right)^n.$$

*Ответ:* ряд сходится;

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(3n+2)}.$$

*Ответ:* ряд расходится;

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln^2(4n+3)}.$$

*Ответ:* ряд сходится;

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^{\ln n}}.$$

*Ответ:* ряд сходится;

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3+5n)^9}}.$$

*Ответ:* ряд сходится.

### Лекция 3

**Задание 3.1.** Исследовать на условную и абсолютную сходимость:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+2)4^n}.$$

*Ответ:* ряд сходится абсолютно;

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}.$$

*Ответ:* ряд сходится условно;

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+2)}.$$

*Ответ:* ряд сходится условно;

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{5n^2+1}.$$

*Ответ:* ряд сходится условно;

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-3n}{4n+1} \right)^n.$$

*Ответ:* ряд сходится абсолютно;

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{3n}.$$

*Ответ:* ряд сходится абсолютно.

## Лекция 4

**Задание 4.1.** Найти область сходимости функционального ряда:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ .

Ответ:  $\frac{1}{e} < x < e$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{1-3x}}$ .

Ответ:  $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (0; +\infty)$ ;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{1-3x}}$ .

Ответ:  $x < 0$ ;

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ .

Ответ: расходится при любом  $x$ ;

5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx)^n}$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Задание 4.2.** Доказать равномерную сходимость ряда:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ .

Ответ:  $x \in [0; +\infty)$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n \cdot x}{x^4 + n \sqrt[3]{n}}$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; +\infty)$ ;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}$ .

Ответ:  $x \in [1; +\infty)$ ;

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cos \pi n x$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; +\infty)$ ;

5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n \sqrt{n+x}}$ .

Ответ:  $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ .

## Лекция 5

**Задание 5.1.** Найти область сходимости степенного ряда:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)!}$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; +\infty)$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$ .

Ответ:  $x \in (-3; -1)$ ;

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$ .

Ответ:  $x \in [-2; 0]$ ;



- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^n}{n 2^n}$ .      *Ответ:*  $x \in (2; 6]$ ;
- 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{2n+1}$ .      *Ответ:*  $x \in (2; 4]$ ;
- 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ .      *Ответ:*  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

## Лекция 6

**Задание 6.1.** Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням  $x - a$ , используя соответствующие ряды Маклорена:

- 1)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -2$ ;      2)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ ,  $a = 3$ ;
- 3)  $f(x) = e^{2x}$ ,  $a = 2$ ;      4)  $f(x) = \sin^2 \pi x$ ,  $a = \frac{1}{3}$ ;
- 5)  $f(x) = \ln(x+5)$ ,  $a = -3$ ;      6)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $a = 5$ ;
- 7)  $f(x) = \sin 3x$ ,  $a = -4$ ;      8)  $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ ,  $a = 4$ .

## Лекция 7

**Задание 7.1.** Вычислить с указанной точностью  $\alpha$ , воспользовавшись разложением в ряд Маклорена:

- 1)  $\sin 1$ .      *Ответ:*  $\alpha = 0,001$ ;
- 2)  $\ln 5$ .      *Ответ:*  $\alpha = 0,01$ ;
- 3)  $\frac{1}{e}$ .      *Ответ:*  $\alpha = 0,001$ ;
- 4)  $\int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$ .      *Ответ:*  $\alpha = 0,001$ ;
- 5)  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 3x dx$ .      *Ответ:*  $\alpha = 0,001$ ;
- 6)  $\int_0^1 \sin x^2 dx$ .      *Ответ:*  $\alpha = 0,001$ .

**Задание 7.2.** Найти первые четыре отличные от нуля члена разложения в ряд Маклорена решений нижеследующих дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1)  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 1$ .      *Ответ:*  $y = 1 + x + x^2 + \frac{4x^3}{3} + \dots$ ;

2)  $y'' = yy' - x^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ . *Ответ:*  $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots$

## Лекция 8

**Задание 8.1.** Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом  $\omega = 2\pi$ ) функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[-\pi; \pi]$ :

1)  $f(x) = x + 2$ ;

2)  $f(x) = 2x + 1$ .

## Лекция 9

**Задание 9.1.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[0; 2\pi]$ , продолжив ее четным и нечетным образом:

1)  $f(x) = (x - 1)^2$ ;

2)  $f(x) = e^x$ .

**Задание 9.2.** Разложить в ряд Фурье в указанном интервале функцию  $f(x)$ :

1)  $f(x) = 1 + x$ ,  $0 < x < 2$ ;

2)  $f(x) = 2x - 3$ ,  $-3 < x < 3$ .

## Раздел 2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Тема «Кратные интегралы», безусловно, является одной из самых трудных в курсе высшей математики втуза. Это связано не только с тем, что сам процесс вычисления кратных интегралов требует достаточно глубокого владения навыками интегрального исчисления функций одной переменной (ведь он, как правило, отягощен наличием параметров под знаком интеграла), но и предполагает умение представлять (с последующим построением) области интегрирования. А это, в свою очередь, означает, что студент должен обладать глубокими знаниями аналитической геометрии (в частности, кривых и поверхностей второго порядка), а также умение достаточно быстро исследовать функции при различных способах их задания (явное, неявное, параметрическое) методами дифференциального исчисления.

Подчеркнем также, что техника кратного интегрирования чрезвычайно важна для физики (включая математическую и теоретическую физику) и других наук (особенно технических). Поэтому отдельные параграфы посвящены геометрическим и физическим приложениям кратных интегралов (§ 2.4, 2.8), а также описанием на языке кратных интегралов красивых закономерностей, существующих в теории поля, что будет рассмотрено в ч. 2 курса лекций.

### Лекция 10

#### § 2.1. Двойной интеграл: определение и свойства

В данном параграфе рассматриваются основные вопросы, связанные с интегрированием функций двух независимых переменных. Важно отметить, что установленные в этом и в последующих трех параграфах закономерности без каких-либо существенных трудностей могут быть перенесены и на функции любого числа независимых переменных.

##### *Двойной интеграл в прямоугольных координатах*

Пусть в плоскости  $Oxy$  задана замкнутая область  $D$ , ограниченная линией  $L$ . И пусть в области  $D$  определена функция  $z = f(x, y)$ . Разобьем область  $D$  сеткой координатных линий

$$x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad y = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

на  $m$  частичных областей  $\Delta D_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим:  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ , а площади областей  $\Delta D_{ij}$  – через  $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ . В каждой из областей  $\Delta D_{ij}$  выберем произвольно точку  $\bar{M}_{ij}(\bar{x}_i; \bar{y}_j)$  (рис. 2.1) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta S_{ij},$$

которую и называют **интегральной суммой** для функции  $z = f(x, y)$  по области  $D$ .

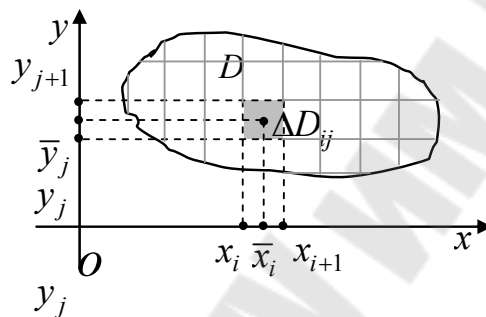


Рис. 2.1

**Определение 2.1.** Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta S_{ij},$$

когда  $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$  и  $\max |\Delta y_j| \rightarrow 0$ , не зависящий как от способа разбиения области  $D$  на частичные области  $\Delta D_{ij}$ , так и от способа выбора точек  $\bar{M}_{ij}(\bar{x}_i; \bar{y}_j)$  в них, то этот предел называют **двойным интегралом** от функции  $z = f(x, y)$  по ограниченной замкнутой области  $D$  плоскости  $Oxy$  и записывают

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (2.1)$$

где суммирование производится по тем значениям  $i$  и  $j$ , для которых точки  $\bar{M}_{ij}(\bar{x}_i; \bar{y}_j)$  принадлежат областям  $\Delta D_{ij}$ , на которые разбивается

область  $D$  координатными линиями  $x = x_i$ ,  $y = y_j$  (рис. 2.1). В случае существования предела (2.1) функция  $z = f(x, y)$  называется интегрируемой в области  $D$ .

**Теорема 2.1.** Если функция  $z = f(x, y)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D$ , то она и интегрируема в ней.

**Замечание 2.1.** Если функция  $z = f(x, y) \geq 0$  в ограниченной замкнутой области  $D$ , то с геометрической точки зрения величина  $f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta S_{ij}$  есть объем малого «цилиндрического» тела, основанием которого является область  $\Delta D_{ij}$ , а высотой служит значение  $f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ .

Тогда интегральная сумма  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta S_{ij}$  представляет собой объ-

ем ступенчатого тела, образованного малыми «цилиндрическими» телами. Следовательно, двойной интеграл (2.1) будет равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ , снизу – плоскостью  $Oxy$ , а сбоку – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси  $Oz$ , а направляющей служит граница  $L$  области  $D$ . Таким образом, задача о нахождении объема такого цилиндрического тела приводит к понятию двойного интеграла.

### **Свойства двойного интеграла**

**Свойство 2.1.** Для любых интегрируемых в области  $D$  функций  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$ , и произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  справедливо *свойство линейности*

$$\begin{aligned} \iint_D [C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)] dx dy &= \\ &= C_1 \iint_D f_1(x, y) dx dy + C_2 \iint_D f_2(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Свойство 2.2.** Если область  $D$  разделена на области  $D_1, D_2, \dots, D_k$  без общих внутренних точек, а функция  $z = f(x, y)$  интегрируема в области  $D$ , то справедливо *свойство аддитивности*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{D_k} f(x, y) dx dy. \quad (2.3)$$

**Свойство 2.3.** Если в замкнутой области  $D$  функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  непрерывны и удовлетворяют неравенству  $g(x, y) < f(x, y)$ ,

то  $\iint_D g(x, y) dx dy < \iint_D f(x, y) dx dy$ , т. е. неравенство можно почленно интегрировать.

**Свойство 2.4** (теорема об оценке интеграла). Абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (2.4)$$

**Свойство 2.5** (обобщенная теорема о среднем значении). Если функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  интегрируемы в ограниченной замкнутой области  $D$  и  $g(x, y) \geq 0$  (или  $g(x, y) \leq 0$ ) в области  $D$ , а функция  $f(x, y)$  – непрерывна в  $D$ , то в этой области существует такая точка  $M_0(x_0; y_0)$ , что имеет место равенство

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

В частности, если функция  $g(x, y) \equiv 1$  в  $D$ , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S_D, \quad (2.6)$$

где  $S_D$  – площадь области  $D$  (теорема о среднем).

### **Геометрический смысл двойного интеграла**

Если функция  $z = f(x, y) \geq 0$  в области  $D$ , то двойной интеграл (2.1) численно равен объему цилиндрического тела  $V$  с основанием  $D$ , образующей, параллельной оси  $Oz$ , и которое ограничено сверху поверхностью  $z = f(x, y)$  (см. замечание 2.1). В частности, когда  $f(x, y) \equiv 1$  в области  $D$ , то двойной интеграл (2.1) равен площади  $S_D$  области  $D$ , т. е.

$$S_D = \iint_D dx dy. \quad (2.7)$$

### **Физический смысл двойного интеграла**

Если область  $D$  – плоская пластинка, лежащая в плоскости  $Oxy$ , а функция  $z = f(x, y) \equiv \gamma(x, y) \geq 0$  в области  $D$  – ее поверхность-

ная плотность, то двойной интеграл (2.1) определяет массу  $m_D$  пластинки, т. е.

$$m_D = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (2.8)$$

## § 2.2. Вычисление двойного интеграла с помощью повторного

Вычисление двойного интеграла (2.1) производится путем сведения его к *повторному интегралу*. При этом различают два основных вида области интегрирования.

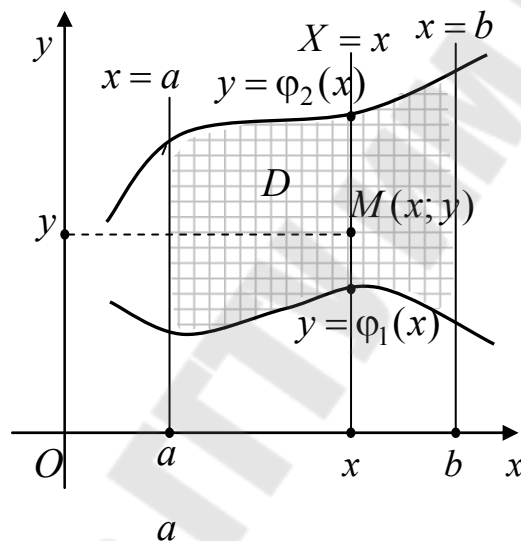


Рис. 2.2

**Область вида 1.** Область интегрирования  $D$  (рис. 2.2) называется *правильной в направлении оси  $Oy$* , если она ограничена слева и справа прямыми  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ), а снизу и сверху непрерывными кривыми  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  [ $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ ]. Это означает, что любая прямая  $X = x$ , параллельная координатной оси  $Oy$  и проходящая через внутреннюю точку  $M(x; y)$  области  $D$ , пересекает ее границу не более чем в двух точках. Тогда вычисление двойного интеграла (2.1) сводится к вычислению *повторного интеграла*.

**Теорема 2.2.** Если для функции  $z = f(x, y)$ , определенной в области  $D$ , существует двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и для каждого

фиксированного  $x \in [a; b]$  существует определенный интеграл

$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ , то существует также и **повторный интеграл**

$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (2.9)$$

где вычисление *повторного интеграла* начинают с вычисления *внут-*

*реннего интеграла*  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ , в котором переменную  $x$  считают

при интегрировании постоянной величиной.

**Область вида 2.** Область интегрирования  $D$  (рис. 2.3) называется **правильной в направлении оси  $Ox$** , если она ограничена снизу и сверху прямыми  $y = c$  и  $y = d$  ( $c < d$ ), а слева и справа непрерывными кривыми  $x = \psi_1(y)$  и  $x = \psi_2(y)$  [ $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ ]. Это означает, что любая прямая  $Y = y$ , параллельная координатной оси  $Ox$  и проходящая через внутреннюю точку  $M(x; y)$  области  $D$ , пересекает ее границу не более чем в двух точках. В этом случае вычисление двойного интеграла (2.1) осуществляется также через *повторный интеграл*.

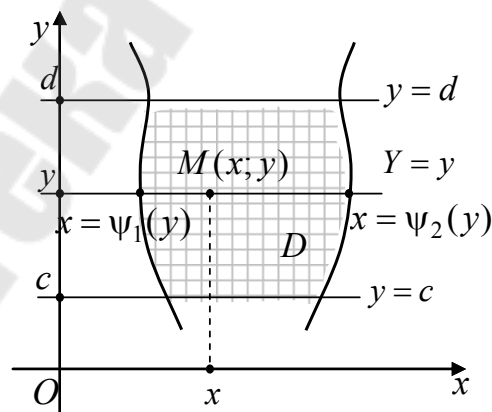


Рис. 2.3

**Теорема 2.3.** Если для функции  $z = f(x, y)$ , определенной в области  $D$ , существует двойной интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и для каждого



фиксированного  $y \in [c; d]$  существует определенный интеграл

$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ , то существует также *повторный интеграл*  
 $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$  и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (2.10)$$

где вычисление *повторного интеграла* также начинают с вычисления

*внутреннего интеграла*  $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ , в котором теперь переменную

$x$  считают при интегрировании постоянной величиной.

**Замечание 2.2.** 1. При вычислении внутреннего интеграла

$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$  в формуле (2.9) можно делать замену переменной

$y = g(t, x)$ , т. е. как в обычном определенном интеграле, причем  $x$  считается постоянной величиной.

2. Аналогично при вычислении внутреннего интеграла

$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$  в формуле (2.10) также можно делать замену перемен-

ной  $x = h(t, y)$ , т. е. как в обычном определенном интеграле, но теперь  $y$  считается постоянной величиной.

3. Если область интегрирования  $D$  не принадлежит ни к одному из рассмотренных видов, то ее разбивают линиями, в частности, горизонтальными или(и) вертикальными прямыми, на части  $D_i$  так, чтобы они не имели общих внутренних точек, и каждая из них относилась к одному из этих двух правильных видов областей. Тогда, принимая во внимание свойство аддитивности (см. свойство 2.2), искомый двойной интеграл представится в виде суммы двойных интегралов по областям  $D_i$ , каждый из которых затем вычисляется с помощью соответствующего повторного интеграла.

**Пример 2.1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 11 - x^2$ ,  $y = -10x$ .

*Решение.* Область интегрирования  $D$  (рис. 2.4) принадлежит к области вида 1.

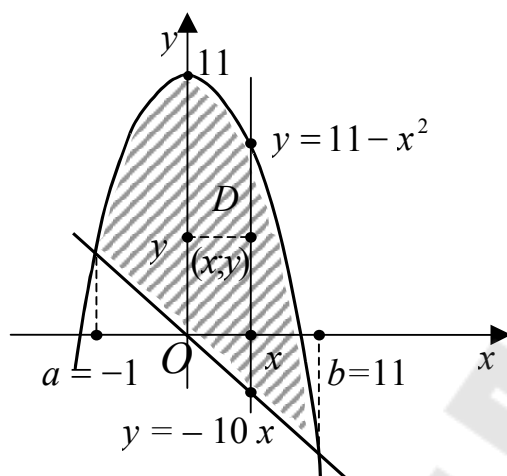


Рис. 2.4

При этом область  $D$  ограничена сверху параболой  $y = 11 - x^2$ , а снизу – прямой  $y = -10x$ . Пределы интегрирования  $a$  и  $b$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 11 - x^2, \\ y = -10x. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение:  $11 - x^2 = -10x$  или  $x^2 - 10x - 11 = 0$ , которое имеет корни  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 11$ . Таким образом, пределы интегрирования  $a = -1$ ,  $b = 11$ . Тогда площадь фигуры находится по формулам (2.7) и (2.9):

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^{11} dx \int_{-10x}^{11-x^2} dy = \int_{-1}^{11} dx y \Big|_{-10x}^{11-x^2} = \\ &= \int_{-1}^{11} dx (11 - x^2 + 10x) = 11x - \frac{x^3}{3} + 5x^2 \Big|_{-1}^{11} = 288. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $S_D = 288$ .

**Пример 2.2.** Вычислить интеграл  $\iint_D \cos(x+y) dx dy$ , где  $D$  – область, ограниченная прямыми  $x = 0$ ,  $y = \pi$ ,  $y = x$ .

*Решение.* Строим область  $D$  (рис. 2.5) и выписываем координаты вершин полученного прямоугольного треугольника  $OKL$ :  $O(0; 0)$ ,  $K(\pi; \pi)$ ,  $L(0; \pi)$ .

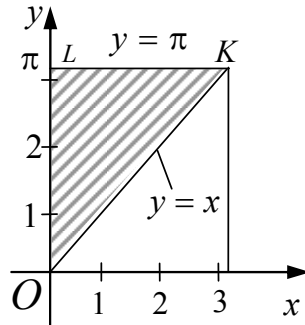


Рис. 2.5

Вычислим искомый интеграл двумя способами.

Способ 1. Будем рассматривать область  $D$  как область вида 1. Выполним замену переменной при вычислении внутреннего интеграла как в обычном определенном интеграле, считая  $x$  постоянной величиной (см. замечание 2.2). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x+y) dx dy &= \int_0^\pi dx \int_{y=x}^{y=\pi} \cos(x+y) dy = \left\{ \begin{array}{l} t = x + y, dt = dy; \\ y = x \Rightarrow t = 2x; \\ y = \pi \Rightarrow t = x + \pi \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^\pi dx \int_{t=2x}^{t=x+\pi} \cos t dt = \int_0^\pi dx \sin t \Big|_{t=2x}^{t=x+\pi} = \int_0^\pi (\sin(x+\pi) - \sin 2x) dx = \\ &= \{ \sin(x+\pi) = -\sin x \} = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi = \\ &= \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 2\pi - \cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 = -1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -2. \end{aligned}$$

Способ 2. Теперь будем рассматривать область  $D$  как область вида 2. Тогда, выполнив замену переменной при вычислении внутреннего интеграла как в обычном определенном интеграле, считая теперь  $y$  постоянной величиной (см. замечание 2.2), получим:

$$\iint_D \cos(x+y) dx dy = \int_0^\pi dy \int_{x=0}^{x=y} \cos(x+y) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x + y, dt = dx; \\ x = 0 \Rightarrow t = y; \\ x = y \Rightarrow t = 2y \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} dy \int_{t=y}^{t=2y} \cos t dt = \int_0^{\pi} dy \sin t \Big|_{t=y}^{t=2y} = \int_0^{\pi} (\sin 2y - \sin y) dy = \\
&= -\frac{1}{2} \cos 2y + \cos y \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \cos 2\pi + \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 0 - \cos 0 = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = -2.
\end{aligned}$$

Ответ:  $-2$ .

## Лекция 11

### § 2.3. Замена переменных в двойном интеграле

В тех случаях, когда вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат является громоздким, то в нем делают замену переменных, т. е. от прямоугольных координат  $x, y$  переходят к криволинейным координатам  $u, v$ , которые связаны с  $x, y$  соотношениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (2.11)$$

причем функции (2.11) определены в области  $D'$  и непрерывны там вместе со своими частными производными. Допустим, кроме того, что формулы (2.11) устанавливают взаимно однозначное соответствие между областями  $D$  и  $D'$ . Это значит, что не только каждой точке  $M'(u; v) \in D'$  соответствует, согласно (2.11), единственная точка  $M(x; y) \in D$ , но и, наоборот, для любой точки  $M(x; y) \in D$  существует единственная точка  $M'(u; v) \in D'$ , для которой выполняются соотношения (2.11). Из сказанного также следует, что для любых заданных  $x, y$  таких, что точка  $M(x; y)$  находится в области  $D$ , система уравнений (2.11) с неизвестными  $u$  и  $v$  имеет единственное решение

$$\{u; v\}, \text{ лежащее в области } D': \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Итак, мы можем утверждать, что любая точка  $M(x; y) \in D$  вполне определяется заданием соответствующей ей точки  $M'(u; v) \in D'$ . Значит, числа  $u$  и  $v$  можно считать новыми координатами точки  $M$ . Такие координаты называются *криволинейными*.

Разобьем область  $D'$  прямоугольной сеткой координатных линий  $u = u_0 = \text{const}$ ,  $v = v_0 = \text{const}$ . Тогда каждая прямая  $u = u_0$  перейдет согласно формулам (2.11) в линию на плоскости  $Oxy$  с параметрическими уравнениями:

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \quad (2.12)$$

где  $v$  – параметр. Аналогично каждая прямая  $v = v_0$  перейдет в линию на плоскости  $Oxy$  с параметрическими уравнениями:

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad (2.13)$$

где  $u$  – параметр. Эти линии называются **координатными линиями** для данной криволинейной системы координат. Линии (2.12) и (2.13) характеризуются тем, что вдоль каждой из них одна из криволинейных координат  $u$  или  $v$  остается постоянной. Если теперь координате  $u$  придавать различные числовые значения, то в плоскости  $Oxy$  мы получим целое семейство координатных линий. Аналогично различным фиксированным значениям координаты  $v$  будет соответствовать другое семейство координатных линий в плоскости  $Oxy$ . Ввиду взаимно однозначного соответствия между областями  $D'$  и  $D$  различные координатные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой и через каждую точку области  $D$  пройдет по одной линии из каждого семейства (рис. 2.6).

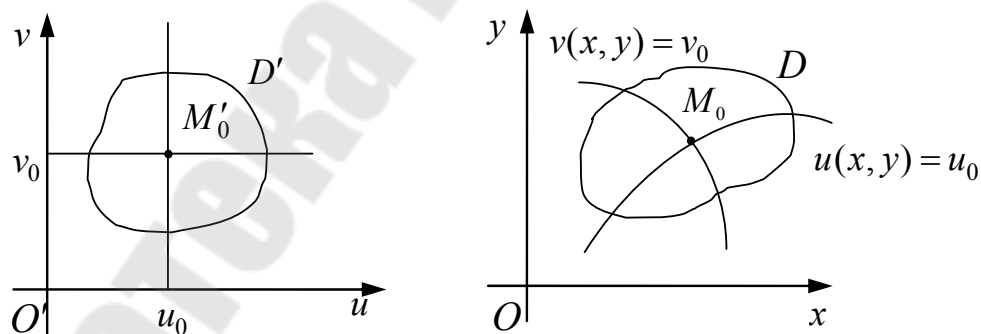


Рис. 2.6

Таким образом, каждой прямоугольной сетке прямых  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  на плоскости  $O'uv$  будет отвечать криволинейная сетка координатных линий на плоскости  $Oxy$ .

Чтобы завершить замену старых переменных на новые, необходимо установить, как изменяется элемент площади  $dS = dx dy$  при пе-

переходе к новым координатам. Для этого рассмотрим в плоскости  $O'uv$  бесконечно малый прямоугольник с вершинами  $A'(u;v)$ ,  $B'(u+du;v)$ ,  $C'(u+du;v+dv)$ ,  $D'(u;v+dv)$ , где  $du = \Delta u > 0$ ,  $dv = \Delta v > 0$  суть приращения независимых переменных  $u$  и  $v$  (рис. 2.7). Тогда вершинам  $A'(u;v)$ ,  $B'(u+du;v)$ ,  $C'(u+du;v+dv)$ ,  $D'(u;v+dv)$  этого прямоугольника в плоскости  $O'uv$  соответствуют, согласно (2.11), точки  $A(x(u,v);y(u,v))$ ,  $B(x(u+du,v);y(u+du,v))$ ,

$$C(x(u+du,v+dv);y(u+du,v+dv)), D(x(u,v+dv);y(u,v+dv))$$

на плоскости  $Oxy$ . Покажем, что  $\overline{AB} = \overline{DC}$  и  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Находим координаты этих векторов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x(u+du,v); y(u+du,v)) - (x(u,v); y(u,v)) = \\ \quad = (x(u+du,v) - x(u,v); y(u+du,v) - y(u,v)), \\ \quad \quad \quad \overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD} = \\ = (x(u+du,v+dv); y(u+du,v+dv)) - (x(u,v+dv); y(u,v+dv)) = \\ = (x(u+du,v+dv) - x(u,v+dv); y(u+du,v+dv) - y(u,v+dv)); \\ \overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (x(u,v+dv); y(u,v+dv)) - (x(u,v); y(u,v)) = \\ \quad = (x(u,v+dv) - x(u,v); y(u,v+dv) - y(u,v)), \\ \quad \quad \quad \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = \\ = (x(u+du,v+dv); y(u+du,v+dv)) - (x(u+du,v); y(u+du,v)) = \\ = (x(u+du,v+dv) - x(u+du,v); y(u+du,v+dv) - y(u+du,v)). \end{array} \right. \quad (2.14)$$

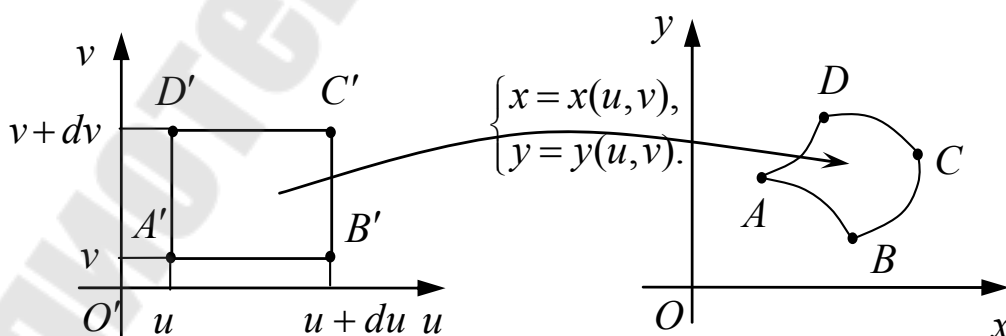


Рис. 2.7

Далее примем во внимание, что связь между частными приращениями функции двух переменных и ее частными производными выражается приближенными равенствами

$$\begin{cases} f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x, \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_y(x, y)\Delta y. \end{cases} \quad (2.15)$$

С этого момента мы не будем учитывать приближенный характер равенств (2.15), полагая, что рассматриваются только бесконечно малые приращения функций. В этом предположении применение равенств (2.15) к координатам векторов (2.14) дает координаты искомым векторов:

$$\overline{AB} : x(u + du, v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad y(u + du, v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u} du; \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \overline{DC} : x(u + du, v + dv) - x(u, v + dv) = \frac{\partial x}{\partial u} du, \\ y(u + du, v + dv) - y(u, v + dv) = \frac{\partial y}{\partial u} du; \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\overline{AD} : x(u, v + dv) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad y(u, v + dv) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \overline{BC} : x(u + du, v + dv) - x(u + du, v) = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ y(u + du, v + dv) - y(u + du, v) = \frac{\partial y}{\partial v} dv. \end{cases} \quad (2.19)$$

Подчеркнем, что все функции, стоящие в правых частях равенств (2.16)–(2.19), вычисляются в точке  $A'(u; v)$ .

Итак, из выражений (2.16)–(2.19) следует, что  $\overline{AB} = \overline{DC}$  и  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Значит, четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм. Конечно, сформулированное утверждение верно с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости (при нахождении координат вершин членами высшего порядка малости мы пренебрегали). Поэтому можно считать, что наш параллелограмм достаточно точно заменил криволинейный четырехугольник с теми же вершинами  $A, B, C, D$ , но образованный координатными линиями. Теперь площадь  $dS$  параллелограмма  $ABCD$  можно найти, используя *геометри-*

ческий смысл векторного произведения. Напомним, что площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  как на сторонах, равна модулю векторного произведения этих векторов

$$S = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array} \right\|. \quad (2.20)$$

В этой формуле две внешние вертикальные черты – знак модуля, а две внутренние – определителя. Чтобы применить формулу (2.20), будем считать, что у векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$  третьи координаты равны нулю. В этом предположении получаем:

$$\begin{aligned} dS &= \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| dudv = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \end{aligned}$$

Здесь при переходе от определителя третьего порядка к определителю второго порядка мы разложили исходный определитель по элементам третьего столбца. Затем мы вынесли общие множители  $du$  и  $dv$  из первой и второй строк определителя второго порядка (соответственно) за его знак. Получившийся у нас в процессе преобразований функциональный определитель называется **определителем Якоби** или **Якобианом**.

Таким образом, для элемента площади параллелограмма  $ABCD$  при переходе от старых координат  $x, y$  к новым криволинейным координатам  $u, v$ , связанных друг с другом соотношениями (2.11), окончательно получаем следующее выражение:

$$dS = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv. \quad (2.21)$$



Наконец, принимая во внимание, что согласно (2.11)  $f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$ , а области  $D$  соответствует область  $D'$ , то окончательно получаем **формулу замены переменных в двойном интеграле**

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (2.22)$$

При этом пределы нового двойного интеграла (2.22) определяются подобно тому, как это делается при вычислении интеграла в декартовых координатах с помощью повторного, т. е. на основании вида области  $D'$ .

**Замечание 2.3.** 1. Формула замены переменных в двойном интеграле (2.22) справедлива, если *якобиан*

$$I(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

сохраняет постоянный знак в области  $D'$ , т. е. не равен нулю в  $D'$ . Однако условие неравенства нулю якобиана может нарушаться в отдельных точках или на отдельных линиях, т. е. на множестве точек области  $D'$  площади ноль.

2. Заметим, что произведение  $du dv$  дает площадь бесконечно малого прямоугольника  $A'B'C'D'$  в плоскости  $O'uv$ . При этом соотношения (2.11) устанавливают взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны соответствие между точками области  $D$  плоскости  $Oxy$  и точками области  $D'$  плоскости  $O'uv$ .

В частности, для *обобщенных полярных (эллиптических) координат*, определяемых соотношениями

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad (\rho \geq 0, \quad a, b > 0), \quad (2.24)$$

якобиан (2.23) и формула (2.22) принимают вид

$$I(\rho, \varphi) = ab\rho, \quad \iint_D f(x, y) dx dy = ab \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (2.25)$$

Отметим, что каждой прямоугольной сетке прямых  $\varphi = \text{const}$  и  $\rho = \text{const}$  на плоскости  $O\rho\varphi$  будет отвечать криволинейная сетка

координатных линий на плоскости  $Oxy$ . При этом в преобразовании (2.24) при  $a = b = 1$  семейству прямых  $\rho = \text{const}$  плоскости  $O\rho\varphi$  отвечает семейство concentрических окружностей радиуса  $\rho$  с центром в начале координат на плоскости  $Oxy$ , а семейству прямых  $\varphi = \text{const}$  плоскости  $O\rho\varphi$  – семейство лучей на плоскости  $Oxy$ , исходящих из той же точки под углом  $\varphi$  к оси  $Ox$  (рис. 2.8).

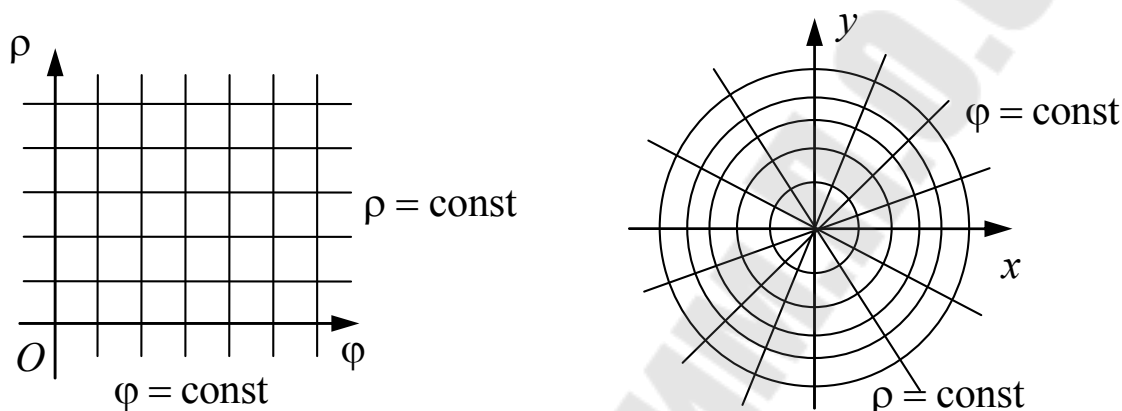


Рис. 2.8

**Пример 2.3.** Вычислить интеграл  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ , где  $D = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

*Решение.* Перейдем в искомом интеграле к полярным координатам по формулам (2.24) и (2.25), в которых  $a = b = R$ . Имеем:  $I(\rho, \varphi) = R^2 \rho$ , а область  $D'$  можно найти, подставляя формулы (2.24) при  $a = b = R$  в выражение для области  $D = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ . Это дает:

$$R^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + R^2 \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R^2 \Rightarrow R^2 \rho^2 \leq R^2 \Rightarrow \rho^2 \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Заметим, что выражение для области  $D' = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  легко определяется, если исходить из геометрического смысла полярных координат:  $\rho$  есть расстояние от начала координат до границы круга радиуса 1, а полярный угол  $\varphi$  для круга, очевидно, изменяется в пределах от 0 до  $2\pi$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_{D'} R \sqrt{1 - \rho^2} R^2 \rho d\rho d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \\
&= R^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} \right) \int_{\rho=0}^{\rho=1} (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 - \rho^2) = 2\pi R^3 \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{2}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\
&= -\frac{2\pi}{3} R^3 \left( 0 - (1)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{2\pi R^3}{3}$ .

## Лекция 12

### § 2.4. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

#### *Геометрические приложения двойных интегралов*

##### *1. Вычисление площадей плоских фигур*

Площадь плоской фигуры  $D$  вычисляется по формуле (2.7) (см. геометрический смысл двойного интеграла и пример 2.1).

**Пример 2.4.** Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

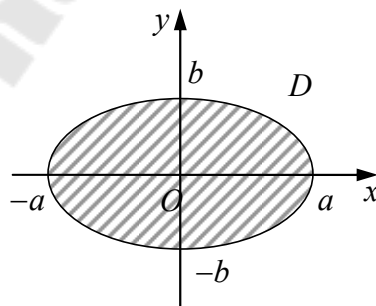


Рис. 2.9

*Решение.* Площадь эллипса можно вычислить и с помощью обычного определенного интеграла. Действительно, учитывая симметрию эллипса (рис. 2.9), получаем:

$$\frac{S_D}{4} = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Этот интеграл можно, к примеру, вычислить с помощью подстановки:  $x = a \cos t$ . Будем теперь решать эту задачу с помощью формулы (2.7). Для этого перейдем к *обобщенным (эллиптическим) координатам*, которые определяются соотношениями (2.24). В новых координатах уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{a^2 \rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

Значит область  $D' = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , а якобиан преобразования дается выражением (2.25). При этом мы, естественно, считаем, что полярная система координат обычным образом совмещена с декартовой: полюс полярной системы совпадает с точкой  $O(0; 0)$ , а полярная ось – с осью  $Ox$ . Тогда для площади эллипса в новых координатах получим:

$$S_D = \iint_D dx dy = \iint_{D'} ab \rho d\rho d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi ab \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 = \pi ab.$$

*Ответ:*  $S_D = \pi ab$ .

**Замечание 2.4.** 1. Прообразом области  $D$  (рис. 2.9) в плоскости  $O\rho\varphi$  служит прямоугольник  $D'$  (рис. 2.10).

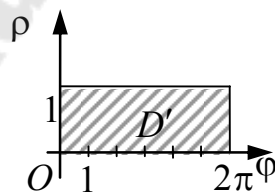


Рис. 2.10

2. Если в уравнении эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   $a = b$  (т. е. эллипс превращается в окружность), то из формулы  $S_D = \pi ab$  вытекает  $S_D = \pi a^2$  – известная формула площади круга.

## 2. Вычисление объемов тел и площадей поверхностей

Согласно геометрическому смыслу двойного интеграла (см. также замечание 2.1), объем цилиндрического тела  $V$ , ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ , снизу – областью  $D$ , а сбоку – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси  $Oz$ , а направляющей служит граница  $L$  области  $D$ , вычисляется по формуле

$$v_V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.25a)$$

В то же время площадь гладкой поверхности  $\sigma$ , заданной уравнением  $z = f(x, y)$ , проекцией которой на плоскость  $Oxy$  является область  $D$ , вычисляется по формуле

$$S_\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (2.25b)$$

Таким образом, формулы (2.25a) и (2.25b) применимы только в рассмотренном частном случае. В случае же тела произвольной формы необходимо использовать тройной и поверхностный (первого рода) интегралы.

### Физические приложения двойных интегралов

#### 1. Вычисление массы плоских фигур

Для того чтобы получить формулы, отражающие физические приложения двойных интегралов, воспользуемся подходом бесконечно малых величин. Для этого выделим бесконечно малую часть плоской области  $D$  площади  $dS = dx dy$ , и будем предполагать, что масса выделенного элемента сосредоточена в одной точке или что плотность  $\gamma = \gamma(x, y)$  в пределах этого элемента постоянна. Тем самым для массы  $dm$  элемента площади  $dS$  будем иметь приближенное выражение вида

$$dm = \gamma dS = \gamma(x, y) dx dy,$$

которое верно до бесконечно малой более высокого порядка, чем площадь  $dS$ . Тогда точное значение массы  $m_D$  выразится двойным интегралом [см. также физический смысл двойного интеграла и формулу (2.8)]:

$$m_D = \iint_D \gamma dS = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (2.26)$$

2. Вычисление статических моментов и моментов инерции плоской области относительно координатных осей и начала координат

Используя этот подход, теперь легко получить элементарные статические моменты и моменты инерции плоской области относительно координатных осей и начала координат:

$$dM_x = y\gamma dS, \quad dM_y = x\gamma dS, \quad dI_x = y^2\gamma dS, \quad dI_y = x^2\gamma dS,$$

$$dI_0 = (x^2 + y^2)\gamma dS.$$

Отсюда для самих моментов сразу получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = \iint_D y\gamma dS = \iint_D y\gamma(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x\gamma dS = \iint_D x\gamma(x, y) dx dy; \\ I_x = \iint_D y^2\gamma dS = \iint_D y^2\gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2\gamma dS = \iint_D x^2\gamma(x, y) dx dy; \\ I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma dS = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y) dx dy. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

3. Вычисление координат центра тяжести плоской области

Теперь обычным образом получаются координаты центра тяжести плоской области:

$$x_c = \frac{M_y}{m_D}, \quad y_c = \frac{M_x}{m_D}. \quad (2.28)$$

**Пример 2.5.** Определить массу круглой пластинки радиуса  $R$ , если поверхностная плотность  $\gamma(x, y)$  материала пластинки в каждой точке  $M(x, y)$  пропорциональна расстоянию точки  $M(x, y)$  от центра круга, т. е.  $\gamma(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ .

*Решение.* По формуле (2.26) имеем:

$$m_D = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

где область  $D$  есть круг  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам  $\rho, \varphi$  по формулам:

$$x = R\rho \cos \varphi, \quad y = R\rho \sin \varphi.$$

В этом случае область  $D = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  будет образом области  $D' = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  (рис. 2.10), а якобиан отображения  $D' \rightarrow D$  равен  $R^2\rho$  [см. формулы (2.24) и (2.25)]. Тогда получим:

$$m_D = k \iint_{D'} R^3 \rho d\rho d\varphi = kR^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = kR^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi k R^3.$$

Ответ:  $m_D = \frac{2}{3} \pi k R^3$ .

**Пример 2.6.** Вычислить координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей и начала координат пластинки  $D$ , ограниченной линиями  $x = 1 - y^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , если поверхностная плотность  $\gamma(x, y)$  в каждой ее точке равна  $xy$  (рис. 2.11).

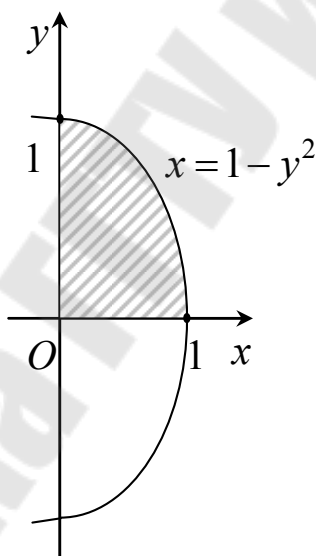


Рис. 2.11

*Решение.* Будем рассматривать область  $D$  как область вида 2. Массу пластинки вычислим по формуле (2.26):

$$m_D = \iint_D xy dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} x dx = \int_0^1 dy y \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dy y (1-y^2)^2 = \left. \begin{cases} t = y^2 - 1, dt = 2y dy; \\ y = 0 \Rightarrow t = -1; \\ y = 1 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dt t^2 = \frac{1}{4} \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{12} (0 - (-1)^3) = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Статические моменты и моменты инерции будем находить по формулам (2.27):

$$\begin{aligned}
M_x &= \iint_D xy dx dy = \int_0^1 dy y^2 \int_0^{1-y^2} x dx = \int_0^1 dy y^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^2 (1-y^2)^2 = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^2 (1-2y^2+y^4) = \frac{1}{2} \int_0^1 dy (y^2-2y^4+y^6) = \frac{1}{2} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{35-42+15}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{8}{2 \cdot 105} = \frac{4}{105};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_D xy dx dy = \int_0^1 dy y \int_0^{1-y^2} x^2 dx = \int_0^1 dy y \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{3} \int_0^1 dy y (1-y^2)^3 = \\
&= \{t = y^2 - 1, \dots \text{(см. вычисление } m_D)\} = -\frac{1}{6} \int_{-1}^0 dt t^3 = -\frac{1}{6} \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{24};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_D y^2 xy dx dy = \int_0^1 dy y^3 \int_0^{1-y^2} x dx = \int_0^1 dy y^3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy y^3 (1-y^2)^2 = \\
&= \{t = y^2 - 1, \dots \text{(см. вычисление } m_D)\} = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dt (t+1)t^2 = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 dt (t^3 + t^2) = \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{48};
\end{aligned}$$

$$I_y = \iint_D x^2 xy dx dy = \int_0^1 dy y \int_0^{1-y^2} x^3 dx = \int_0^1 dy y \frac{x^4}{4} \Big|_0^{1-y^2} = \frac{1}{4} \int_0^1 dy y (1-y^2)^4 =$$



$$= \{t = y^2 - 1, \dots (\text{см. вычисление } m_D)\} = \frac{1}{8} \int_{-1}^0 dt t^4 = \frac{1}{8} \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{40};$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{48} + \frac{1}{40} = \frac{5+6}{5 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{11}{240}.$$

Теперь, используя формулы (2.28), находим координаты центра масс пластинки:

$$x_c = \frac{M_y}{m_D} = \frac{1 \cdot 12}{24 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \quad y_c = \frac{M_x}{m_D} = \frac{4 \cdot 12}{105 \cdot 1} = \frac{16}{35}.$$

$$\text{Ответ: } x_c = \frac{1}{2}, \quad y_c = \frac{16}{35}; \quad I_x = \frac{1}{48}, \quad I_y = \frac{1}{40}, \quad I_0 = \frac{11}{240}.$$

**Замечание 2.5.** В отдельных простых случаях (т. е. для тел, имеющих цилиндрическую форму) двойные интегралы могут быть использованы для вычисления как объемов тел и площадей поверхностей, так и физических величин. В этом случае пространственная плотность распределения масс должна зависеть только от  $x$  и  $y$ . Однако при вычислении объемов тел, площадей поверхностей и физических величин для пространственных тел произвольной формы необходимо использовать тройной и поверхностный (первого рода) интегралы.

**Пример 2.7.** Вычислить координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей пластинки

$$D = \left\{ (x; y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0 \right\}$$

с поверхностной плотностью  $\gamma(x, y) = x^2 y$ .

*Решение.* Введем замену переменных (2.24):  $x = 2\rho \cos \varphi$ ,  $y = 3\rho \sin \varphi$ . Тогда искомые величины, определяемые соотношениями (2.26)–(2.28), запишутся в соответствии с формулой (2.25) в виде [якобиан  $I(\rho, \varphi) = 6\rho$ ]:

$$m_D = \iint_D x^2 y dx dy = 72 \iint_{D'} \rho^4 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi;$$

$$M_x = \iint_D x^2 y^2 dx dy = 216 \iint_{D'} \rho^5 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\rho d\varphi;$$

$$M_y = \iint_D x^3 y dx dy = 144 \iint_{D'} \rho^5 \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi;$$

$$I_x = \iint_D x^2 y^3 dx dy = 648 \iint_{D'} \rho^6 \cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi d\rho d\varphi;$$

$$I_y = \iint_D x^4 y dx dy = 288 \iint_{D'} \rho^6 \cos^4 \varphi \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi.$$

Из неравенств, определяющих область  $D$  (рис. 2.12), после подстановки в них вместо переменных  $x, y$  введенную замену переменных, получим:  $\rho^2 \leq 1$ ,  $3\rho \sin \varphi \geq 0$ ,  $2\rho \cos \varphi \leq 0$ . Решая эту систему неравенств, находим (см. рис. 2.13)  $D' = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, \pi/2 \leq \varphi \leq \pi\}$ .

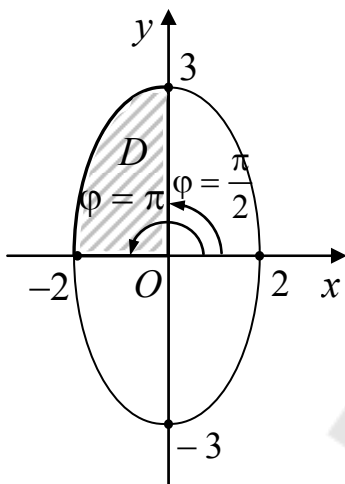


Рис. 2.12

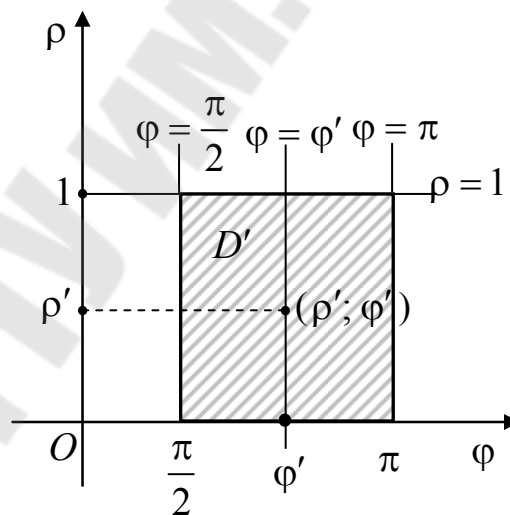


Рис. 2.13

Теперь вычисляем двойные интегралы по области  $D'$  через повторные:

$$\begin{aligned} m_D &= 72 \iint_{D'} \rho^4 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi = 72 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \\ &= -72 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 = -72 \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{5} = \frac{24}{5}; \end{aligned}$$

$$M_x = 216 \iint_{D'} \rho^5 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\rho d\varphi = 54 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho =$$

$$= 27 \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = 27 \left( \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{6} = \frac{9}{4} \pi;$$

$$M_y = 144 \iint_{D'} \rho^5 \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi = 144 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho =$$

$$= -144 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \varphi d(\cos \varphi) \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = -144 \frac{\cos^4 \varphi}{4} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{6} = -6;$$

$$I_x = 648 \iint_{D'} \rho^6 \cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi d\rho d\varphi = 648 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho =$$

$$= -648 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \frac{\rho^7}{7} \Big|_0^1 =$$

$$= -648 \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi) d(\cos \varphi) \frac{1}{7} = -\frac{648}{7} \left( \frac{\cos^3 \varphi}{3} - \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\frac{648}{7} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{432}{35};$$

$$I_y = 288 \iint_{D'} \rho^6 \cos^4 \varphi \cdot \sin \varphi d\rho d\varphi = 288 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^4 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^6 d\rho =$$

$$= -288 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^4 \varphi d(\cos \varphi) \frac{\rho^7}{7} \Big|_0^1 = -\frac{288}{7} \frac{\cos^5 \varphi}{5} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{288}{35}.$$

Отсюда находим:  $x_c = M_y / m_D = -\frac{5}{4}$ ,  $y_c = M_x / m_D = \frac{15}{32} \pi$ .

Ответ:  $x_c = -\frac{5}{4}$ ,  $y_c = \frac{15}{32} \pi$ ,  $I_x = \frac{432}{35}$ ,  $I_y = \frac{288}{35}$ .

## Лекция 13

### § 2.5. Тройной интеграл: определение и свойства

В данном параграфе рассматриваются основные вопросы, связанные с интегрированием функций трех независимых переменных. При этом закономерности, установленные в предыдущих четырех параграфах, без каких-либо существенных трудностей будут перенесены и на функции трех независимых переменных.

#### *Тройной интеграл в прямоугольных координатах*

Пусть в пространстве заданы прямоугольная декартова система координат  $Oxyz$  и замкнутая область  $V$ , ограниченная поверхностью  $\sigma$ . И пусть в замкнутой области  $V$  определена функция  $u = f(x, y, z)$ . Разобьем область  $V$  сеткой координатных плоскостей

$$x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad y = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad z = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

на  $mnl$  частичных областей  $\Delta V_{ijk}$ . Обозначим:  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ ,  $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ , а объемы областей  $\Delta V_{ijk}$  — через  $\Delta v_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ . В каждой из областей  $\Delta V_{ijk}$  выберем произвольно точку  $\bar{M}_{ijk}(\bar{x}_i; \bar{y}_j; \bar{z}_k)$  (рис. 2.14) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta v_{ijk},$$

которую называют **интегральной суммой** для функции  $u = f(x, y, z)$  по области  $V$ .

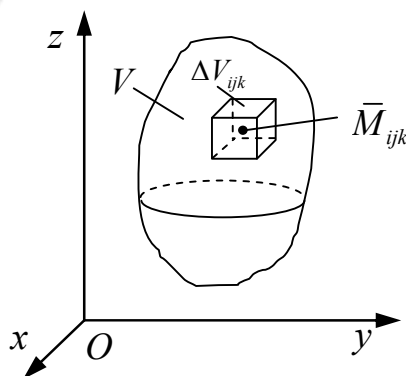


Рис. 2.14

**Определение 2.2.** Если существует предел интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta v_{ijk},$$

когда  $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ ,  $\max |\Delta y_j| \rightarrow 0$  и  $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ , не зависящий как от способа разбиения области  $V$  на частичные области  $\Delta V_{ijk}$ , так и от способа выбора точек  $\bar{M}_{ijk}(\bar{x}_i; \bar{y}_j; \bar{z}_k)$  в них, то этот предел называют **тройным интегралом** от функции  $u = f(x, y, z)$  по ограниченной замкнутой области  $V$  трехмерного пространства  $Oxyz$  и записывают

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k, \quad (2.29)$$

где суммирование производится по тем значениям  $i, j, k$ , для которых точки  $\bar{M}_{ijk}(\bar{x}_i; \bar{y}_j; \bar{z}_k)$  принадлежат областям  $\Delta V_{ijk}$ , на которые разбивается область  $V$  координатными плоскостями  $x = x_i, y = y_j, z = z_k$ .

В случае существования предела (2.29) функция  $u = f(x, y, z)$  называется интегрируемой в области  $V$ .

**Теорема 2.4.** Если функция  $u = f(x, y, z)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $V$ , то она и интегрируема в ней.

**Замечание 2.6.** Если функция  $u = f(x, y, z) \equiv \gamma(x, y, z) \geq 0$  есть объемная плотность вещества, распределенного в ограниченной замкнутой области  $V$ , то с физической точки зрения величина  $\gamma(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta v_{ijk}$  есть масса малого прямоугольного параллелепипеда  $\Delta V_{ijk}$ , объем которого равен  $\Delta v_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ , а  $\gamma(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$  – объемная плотность вещества, распределенного в области  $\Delta V_{ijk}$  (рис. 2.14).

Тогда интегральная сумма  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) \Delta v_{ijk}$  представляет со-

бой массу ступенчатого тела, образованного малыми прямоугольными параллелепипедами  $\Delta V_{ijk}$ . Следовательно, тройной интеграл (2.29) будет равен массе тела  $V$ , ограниченного поверхностью  $\sigma$ . Таким образом, задача о нахождении массы такого тела приводит к понятию тройного интеграла.

### Свойства тройного интеграла

Основные свойства тройных интегралов, а также их геометрический и физический смыслы, аналогичны соответствующим свойствам двойных интегралов.

**Свойство 2.6.** Для любых интегрируемых в области  $V$  функций  $f_1(x, y, z)$  и  $f_2(x, y, z)$  и произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  справедливо **свойство линейности**

$$\begin{aligned} & \iiint_V [C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)] dx dy dz = \\ & = C_1 \iiint_V f_1(x, y, z) dx dy dz + C_2 \iiint_V f_2(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.30)$$

**Свойство 2.7.** Если область  $V$  разделена на области  $V_1, V_2, \dots, V_k$  без общих внутренних точек, а функция  $u = f(x, y, z)$  интегрируема в области  $V$ , то справедливо **свойство аддитивности**

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \\ & + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz + \dots + \iiint_{V_k} f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.31)$$

**Свойство 2.8.** Если в замкнутой области  $V$  функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  являются непрерывными и удовлетворяют неравенству  $g(x, y, z) < f(x, y, z)$ , то

$$\iiint_V g(x, y, z) dx dy dz < \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

т. е. неравенство можно почленно интегрировать.

**Свойство 2.9** (*теорема об оценке интеграла*). Абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dx dy dz. \quad (2.32)$$

**Свойство 2.10** (*обобщенная теорема о среднем значении*). Если функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы в ограниченной замкнутой области  $V$  и  $g(x, y, z) \geq 0$  (или  $g(x, y, z) \leq 0$ ) в области  $V$ , а функ-

ция  $f(x, y, z)$  – непрерывна в  $V$ , то в этой области существует такая точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , что имеет место равенство

$$\iiint_V f(x, y, z)g(x, y, z)dxdydz = f(x_0, y_0, z_0)\iiint_V g(x, y, z)dxdydz. \quad (2.33)$$

В частности, если функция  $g(x, y, z) \equiv 1$  в  $V$ , то

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = f(x_0, y_0, z_0)v, \quad (2.34)$$

где  $v$  – объем области  $V$  (*теорема о среднем*).

### ***Геометрический смысл тройного интеграла***

Если функция  $u = f(x, y, z) \equiv 1$  в области  $V$ , то тройной интеграл (2.29) численно равен объему тела  $V$ , ограниченного поверхностью  $\sigma$ , т. е.

$$v = \iiint_V dxdydz. \quad (2.35)$$

### ***Физический смысл тройного интеграла***

Если область  $V$  – замкнутая трехмерная область, ограниченная поверхностью  $\sigma$ , а функция  $u = f(x, y, z) \equiv \gamma(x, y, z) \geq 0$  в области  $V$  – ее объемная плотность, то тройной интеграл (2.29) определяет массу  $m_V$  тела  $V$  (см. также замечание 2.6), т. е.

$$m_V = \iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz. \quad (2.36)$$

## **§ 2.6. Вычисление тройного интеграла с помощью повторного**

Вычисление тройного интеграла (2.29) производится путем последовательного вычисления одного двойного и одного однократного (определенного) интегралов или трех однократных интегралов. При этом различают три основных вида правильных областей.

**Область вида 1.** Пусть область  $V$  ограничена однозначными и непрерывными поверхностями  $z = f_1(x, y)$  и  $z = f_2(x, y)$ , где  $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$  для всех точек  $M(x, y)$ , принадлежащих облас-

ти  $D_{xy}$  – проекции области  $V$  на плоскость  $Oxy$ . Это означает, что любая прямая, параллельная координатной оси  $Oz$  и проходящая через внутреннюю точку  $(x; y; z)$  области  $V$ , пересекает ее границу не более чем в двух точках. Тогда для вычисления тройного интеграла (2.29) используют следующую теорему.

**Теорема 2.5.** Если для функции  $f(x, y, z)$ , определенной в области  $V$ , существует тройной интеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  и для каждой фиксированной точки  $M(x; y) \in D_{xy}$  существует определенный

интеграл  $\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ , то существует также и *повторный интеграл*  $\iint_{D_{xy}} dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz$  и справедливо равенство

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.37)$$

Подчеркнем, что внутренний интеграл  $\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz$  в формуле (2.37) вычисляется при фиксированных значениях  $x$  и  $y$ , принадлежащих области  $D_{xy}$ . Более того, при его вычислении при необходимости можно делать замену переменной  $z = g(t, x, y)$ , т. е. как в обычном определенном интеграле, причем  $x, y$  считаются постоянными величинами. После вычисления внутреннего интеграла приступают к вычислению двойного интеграла, сводя его к соответствующему повторному. Например, если область интегрирования  $D_{xy}$  является *правильной в направлении оси  $Oy$*  так, что она ограничена слева и справа прямыми  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ), а снизу и сверху непрерывными кривыми  $y = \varphi_1(x)$  и  $y = \varphi_2(x)$  [ $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ ] (см. теорему 2.2 и рис. 2.2), то формула (2.37) принимает вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.38)$$



Если же область интегрирования  $D_{xy}$  является *правильной в направлении оси  $Ox$* , то в этом случае, принимая во внимание теорему 2.3 и рис. 2.3, формула (2.37) принимает вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.39)$$

**Область вида 2.** Пусть область  $V$  ограничена однозначными и непрерывными поверхностями  $x = g_1(y, z)$  и  $x = g_2(y, z)$ , где  $g_1(y, z) \leq g_2(y, z)$  для всех точек  $M(y; z)$ , принадлежащих области  $D_{yz}$  – проекции области  $V$  на плоскость  $Oyz$ . Это означает, что любая прямая, параллельная координатной оси  $Ox$  и проходящая через внутреннюю точку  $(x; y; z)$  области  $V$ , пересекает ее границу не более чем в двух точках. В этом случае для вычисления тройного интеграла (2.29) используют следующую теорему.

**Теорема 2.6.** Если для функции  $f(x, y, z)$ , определенной в области  $V$ , существует тройной интеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  и для каждой фиксированной точки  $M(y; z) \in D_{yz}$  существует определенный

интеграл  $\int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx$ , то существует также и *повторный интеграл*  $\iint_{D_{yz}} dy dz \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx$  и справедливо равенство

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx. \quad (2.40)$$

Также подчеркнем, что внутренний интеграл  $\int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx$

в формуле (2.40) теперь вычисляется при фиксированных значениях  $y$  и  $z$ , принадлежащих области  $D_{yz}$ . Кроме того, при его вычислении также при необходимости можно делать замену переменной  $x = g(t, y, z)$ , т. е. как в обычном определенном интеграле, но теперь  $y, z$  считаются постоянными величинами. После вычисления

внутреннего интеграла приступают к вычислению двойного интеграла, сводя его к соответствующему повторному с помощью теорем 2.2 и 2.3.

**Область вида 3.** Пусть область  $V$  ограничена однозначными и непрерывными поверхностями  $y = \chi_1(x, z)$  и  $y = \chi_2(x, z)$ , где  $\chi_1(x, z) \leq \chi_2(x, z)$  для всех точек  $M(x, z)$ , принадлежащих области  $D_{xz}$  – проекции области  $V$  на плоскость  $Oxz$ . Это означает, что любая прямая, параллельная координатной оси  $Oy$  и проходящая через внутреннюю точку  $(x; y; z)$  области  $V$ , пересекает ее границу не более чем в двух точках. Теперь для вычисления тройного интеграла (2.29) используют следующую теорему.

**Теорема 2.7.** Если для функции  $f(x, y, z)$ , определенной в области  $V$ , существует тройной интеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  и для каждой фиксированной точки  $M(x; z) \in D_{xz}$  существует определенный

интеграл  $\int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$ , то существует также и *повторный интеграл*  $\iint_{D_{xz}} dx dz \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$  и справедливо равенство

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} dx dz \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy. \quad (2.41)$$

Также отметим, что внутренний интеграл  $\int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$

в формуле (2.41) теперь вычисляется при фиксированных значениях  $x$  и  $z$ , принадлежащих области  $D_{xz}$ . Кроме того, при его вычислении также при необходимости можно делать замену переменной  $y = g(t, x, z)$ , т. е. как в обычном определенном интеграле, но теперь  $x, z$  считаются постоянными величинами. И также как и в предыдущих двух случаях, после вычисления внутреннего интеграла приступают к вычислению двойного интеграла, сводя его к соответствующему повторному с помощью теорем 2.2, 2.3.

**Замечание 2.7.** Если область интегрирования  $V$  не принадлежит ни к одному из рассмотренных видов, то ее разбивают поверхно-

стями (или плоскостями) на части  $V_i$  так, чтобы они не имели общих внутренних точек, и каждая из них относилась к одному из этих трех правильных видов областей. Тогда, принимая во внимание свойство аддитивности (см. свойство 2.7), искомый тройной интеграл представится в виде суммы тройных интегралов по областям  $V_i$ , каждый из которых затем вычисляется с помощью соответствующего повторного интеграла.

**Пример 2.8.** Вычислить с помощью тройного интеграла объем  $\nu$  тела  $V : \{z = y^2, z = 4, 2x + z = 6, x = 0\}$ .

*Решение.* Область  $V$  ограничена параболическим цилиндром  $z = y^2$  с образующей, параллельной оси  $Ox$ , и плоскостями  $2x + z = 6$ ,  $x = 0$  и  $z = 4$  (рис. 2.15). Из рисунка следует, что область  $V$  удобно проектировать на плоскость  $Oyz$  (область вида 2), причем  $x = g_1(y, z) = 0$  и  $x = g_2(y, z) = 3 - z/2$  — ограничивающие эту область плоскости, а ее проекция на плоскость  $Oyz$  представляет собой параболический сегмент  $D_{yz} : \{z = y^2, z = 4\}$  (рис. 2.16).

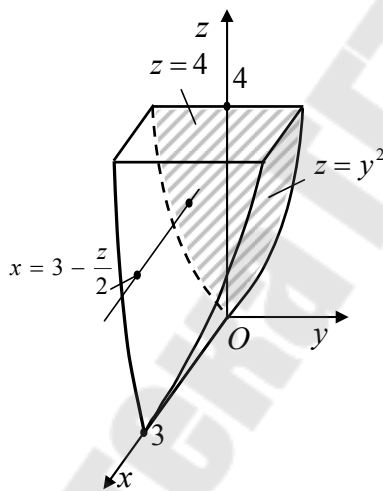


Рис. 2.15

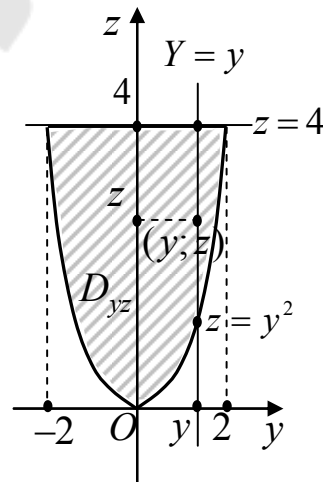


Рис. 2.16

Тогда, принимая во внимание формулы (2.35), (2.40) и учитывая, что область  $D_{yz}$  является правильной в направлении оси  $Oz$ , получим:

$$\nu = \iiint_V dx dy dz = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^{3-z/2} dx = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 dz x \Big|_0^{3-z/2} = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 dz \left(3 - \frac{z}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^2 dy \left( 3z - \frac{z^2}{4} \right) \Big|_{y^2}^4 = \int_{-2}^2 dy \left( 12 - 4 - 3y^2 + \frac{y^4}{4} \right) = \\
&= \left\{ \text{далее учли, что подынтегральная функция четная} \right\} = \\
&= 2 \int_0^2 dy \left( 8 - 3y^2 + \frac{y^4}{4} \right) = 2 \left( 8y - y^3 + \frac{y^5}{20} \right) \Big|_0^2 = 2 \left( 16 - 8 + \frac{8}{5} \right) = \frac{96}{5}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $v = 96/5$ .

## Лекция 14

### § 2.7. Замена переменных в тройном интеграле

В тех случаях, когда вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат является громоздким, то в нем (подобно случаю двойного интеграла) делают замену переменных, т. е. от прямоугольных координат  $x, y, z$  переходят к криволинейным координатам  $u, v, w$ , которые связаны с  $x, y, z$  соотношениями:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (2.42)$$

причем функции (2.42) определены в области  $V'$  и непрерывны там вместе со своими частными производными. Допустим, кроме того, что формулы (2.42) устанавливают взаимно однозначное соответствие между областями  $V$  и  $V'$ . Это значит, что не только каждой точке  $M'(u; v; w) \in V'$  соответствует, согласно (2.42), единственная точка  $M(x; y; z) \in V$ , но и, наоборот, для любой точки  $M(x; y; z) \in V$  существует единственная точка  $M'(u; v; w) \in V'$ , для которой выполняются соотношения (2.42).

Итак, можно утверждать, что любая точка  $M(x; y; z) \in V$  вполне определяется заданием соответствующей ей точки  $M'(u; v; w) \in V'$ . Значит числа  $u, v, w$  можно считать новыми координатами точки  $M$ , а формулы (2.42) можно интерпретировать как формулы перехода к новым, криволинейным координатам  $u, v, w$  в области  $V$ . При этом поверхности  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ ,  $w = \text{const}$  представляют собой коор-

динатные поверхности (вообще говоря, криволинейные) в пространстве переменных  $x, y, z$ . Кривые, на которых две криволинейные координаты имеют постоянные значения, а изменяется только одна из координат, представляют собой координатные линии. Такие координаты называются **криволинейными**.

При переходе в тройном интеграле (2.29) от переменных  $x, y, z$  к переменным  $u, v, w$  с помощью соотношений (2.42) должны выполняться определенные условия, которые сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.8.** Пусть  $V$  и  $V'$  – замкнутые кубируемые области, а функция  $f(x, y, z)$  ограничена в области  $V$  и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль. Допустим далее, что отображение (2.42) удовлетворяет следующим условиям:

1°. Оно взаимно однозначно.

2°. Функции  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$ ,  $z(u, v, w)$  имеют в области  $V'$  непрерывные частные производные первого порядка.

3°. Якобиан отображения  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$  отличен от

нуля в области  $V'$ .

Тогда справедливо равенство (формула замены переменных в тройном интеграле):

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned} \quad (2.43)$$

**Замечание 2.8.** Формула (2.43) остается справедливой, если условия 1° или 3° нарушаются на множестве точек объема нуль.

Приведем два примера наиболее употребительных криволинейных координат.

## I. Цилиндрические координаты

Пусть  $M(x; y; z)$  – произвольная точка в пространстве  $Oxyz$ , а  $N$  – ее проекция на плоскость  $Oxy$  (рис. 2.17). Положение точки  $M$  однозначно задается тройкой чисел  $(\rho; \varphi; z)$ , где  $(\rho; \varphi)$  – полярные координаты точки  $N$  на плоскости  $Oxy$ , а  $z$  – аппликата точки  $M$ . Тройка чисел  $(\rho; \varphi; z)$  носит название **цилиндрических координат** точки  $M$ . Координатные поверхности  $\varphi = \text{const}$  и  $z = \text{const}$  представляют собой плоскости. Координатная же поверхность  $\rho = \text{const}$  представляет собой цилиндрическую поверхность – отсюда, естественно, и название координат. Связь между прямоугольными и цилиндрическими координатами точки  $M$  вполне понятна:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.44)$$

$$(0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty).$$

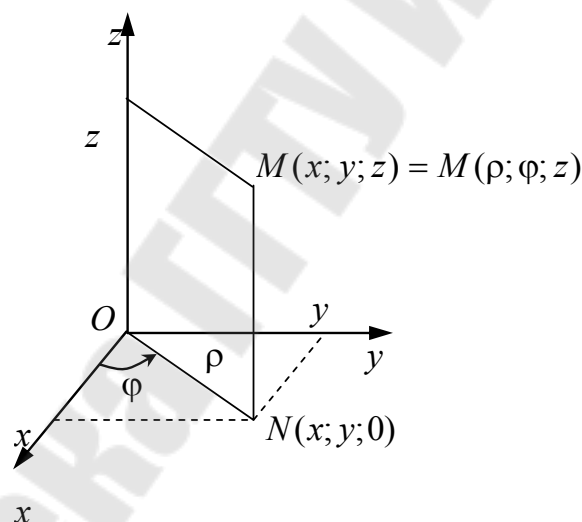


Рис. 2.17

**Замечание 2.9.** Иногда для  $\varphi$  берется промежуток изменения:  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ .

Легко подсчитать, что якобиан отображения (2.44) равен  $\rho$ . Фактически цилиндрические координаты возникают при вычислении тройных интегралов, когда, выполняя вычисление по формуле (2.37), после интегрирования по  $z$  переходят в получившемся двойном интеграле к полярным координатам. Тем не менее, в некоторых ситуациях удобно сразу переходить в тройном интеграле к цилиндрическим ко-

ординатам, сводя его к трем однократным интегралам по аналогии с формулами (2.38) и (2.39).

**Пример 2.9.** Найти массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 6z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  ( $z > 0$ ), если плотность в каждой точке равна сумме квадратов координат точки.

*Решение.* Поверхность

$$x^2 + y^2 = 6z \Rightarrow z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6}$$

есть эллиптический параболоид. Очевидно, что он проходит через начало координат и для него  $z = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6} \geq 0$ . Далее, поверхность  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  есть сфера с центром в начале координат радиуса  $OA = 4$  (рис. 2.18). И поскольку по условию для нее  $z > 0$ , то это – верхняя ее половина.

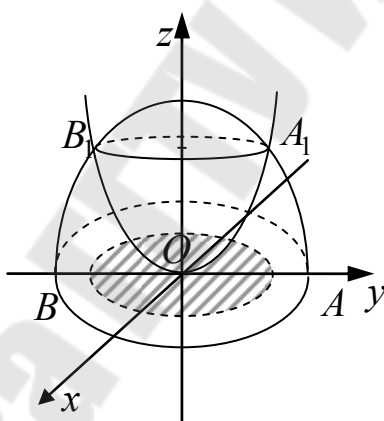


Рис. 2.18

Найдем линию пересечения данных поверхностей. Для этого решим совместно систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ z > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + 6z - 16 = 0, \\ z > 0, \\ x^2 + y^2 = 6z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2, \\ z = -8, \\ z > 0, x^2 + y^2 = 6z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2, \\ x^2 + y^2 = 6z, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 12.$$

Значит линией пересечения служит окружность с центром на оси  $Oz$  и радиуса  $A_1B_1/2 = 2\sqrt{3}$ , а проекцией нашего тела на плоскость  $Oxy$  будет круг с центром в начале координат и радиуса  $2\sqrt{3}$  (рис. 2.18).

Согласно физическому смыслу тройного интеграла [см. формулу (2.36)], масса искомого тела дается выражением

$$m_V = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\begin{aligned} m_V &= \iiint_V (\rho^2 + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{z=\frac{\rho^2}{6}}^{z=\sqrt{16-\rho^2}} (\rho^2 + z^2) dz = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho d\rho \left[ \rho^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=\frac{\rho^2}{6}}^{z=\sqrt{16-\rho^2}} = 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} \rho d\rho \left[ \rho^2 \sqrt{16-\rho^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(16-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\rho^4}{6} - \frac{\rho^6}{3 \cdot 6^3} \right] = 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^2 \sqrt{16-\rho^2} \rho d\rho + \\ &\quad + \frac{2\pi}{3} \int_0^{2\sqrt{3}} (16-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho - \frac{2\pi}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^5 d\rho - \frac{2\pi}{3 \cdot 6^3} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^7 d\rho = \\ &= -\frac{2\pi}{2} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^2 (16-\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(16-\rho^2) - \frac{2\pi}{2 \cdot 3} \int_0^{2\sqrt{3}} (16-\rho^2)^{\frac{3}{2}} d(16-\rho^2) - \\ &\quad - \frac{2\pi}{6} \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3 \cdot 6^3} \frac{\rho^8}{8} \Big|_0^{2\sqrt{3}} = \left. \begin{array}{l} t = 16 - \rho^2, \quad dt = -2\rho d\rho; \\ \rho = 0 \Rightarrow t = 16; \\ \rho = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = 4 \end{array} \right\} = \\ &= -\pi \int_{16}^4 (16-t)t^{\frac{1}{2}} dt - \frac{\pi}{3} \frac{2}{5} (16-\rho^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi(2\sqrt{3})^6}{6^2} - \frac{\pi(2\sqrt{3})^8}{6^3 \cdot 12} = \\ &= \pi \int_4^{16} (16t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}) dt - \frac{2\pi}{15} \left[ (16-12)^{\frac{5}{2}} - 16^{\frac{5}{2}} \right] - \frac{2\pi \cdot 12^3}{6^2} - \frac{\pi \cdot 12^4}{6^3 \cdot 12} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \pi \left( 16 \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_4^{16} + \frac{2\pi}{15} (4^5 - 4^2) - \frac{\pi \cdot 12^3}{6^3} (12+1) = \\
&= \pi \left( \frac{32}{3} \cdot 16^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 16^{\frac{5}{2}} - \frac{32}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{2\pi}{15} (2^{10} - 2^5) - \pi \cdot 2^3 \cdot 13 = \\
&= \pi \left( \frac{32}{3} \cdot 4^3 - \frac{2}{5} \cdot 4^5 - \frac{32}{3} \cdot 2^3 + \frac{2}{5} \cdot 2^5 \right) + \frac{2\pi}{15} (1024 - 32) - 13\pi \cdot 8 = \\
&= \pi \left( \frac{32}{3} \cdot (64 - 8) - \frac{2}{5} \cdot (1024 - 32) \right) + \frac{2\pi}{15} \cdot 992 - 13\pi \cdot 8 = \\
&= \pi \left( \frac{32}{3} \cdot 56 - \frac{2}{5} \cdot 992 \right) + \frac{2\pi}{15} \cdot 992 - 13\pi \cdot 8 = \\
&= \frac{8\pi}{15} (5 \cdot 4 \cdot 56 - 3 \cdot 248 + 248 - 13 \cdot 15) = \\
&= \frac{8\pi}{15} (20 \cdot 56 - 2 \cdot 248 - 195) = \frac{8\pi}{15} (1120 - 496 - 195) = \frac{8\pi}{15} \cdot 429 = \frac{1144\pi}{5}.
\end{aligned}$$

*Ответ:*  $m_V = \frac{1144\pi}{5}$ .

**Замечание 2.10.** Сведение тройного интеграла в цилиндрических координатах к трем однократным осуществляется по аналогии с формулами (2.38) и (2.39). При этом уравнения параболоида

$z = \frac{x^2 + y^2}{6}$  и верхней части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $z > 0$  в цилиндрических координатах принимают вид:

$z = \frac{\rho^2}{6}$  и  $\rho^2 + z^2 = 16$ ,

$z > 0 \Rightarrow z = \sqrt{16 - \rho^2}$ . А уравнение окружности  $x^2 + y^2 = 12$  в полярной системе координат преобразуется к виду  $\rho = 2\sqrt{3}$ , причем  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Таким образом, область  $V'$ , являющаяся прообразом области  $V$ , определяется неравенствами

$$V' = \left\{ (\rho; \varphi; z) \mid \frac{\rho^2}{6} \leq z \leq \sqrt{16 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{3}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Отсюда следуют пределы в трех однократных интегралах.

## II. Сферические координаты

Пусть  $M(x; y; z)$  – произвольная точка в пространстве  $Oxyz$ , а  $N(x; y; 0)$  – проекция точки  $M$  на плоскость  $Oxy$  (рис. 2.19). Положение точки  $M$  однозначно задается тройкой чисел  $(r; \theta; \varphi)$ , где  $r$  – расстояние точки  $M$  от точки  $O(0; 0; 0)$ ;  $\theta$  – угол между лучами  $OM$  и  $Oz$ ;  $\varphi$  – полярный угол точки  $N(x; y; 0)$  на плоскости  $Oxy$ . Тройка чисел  $(r; \theta; \varphi)$  называется **сферическими координатами** точки  $M$ .

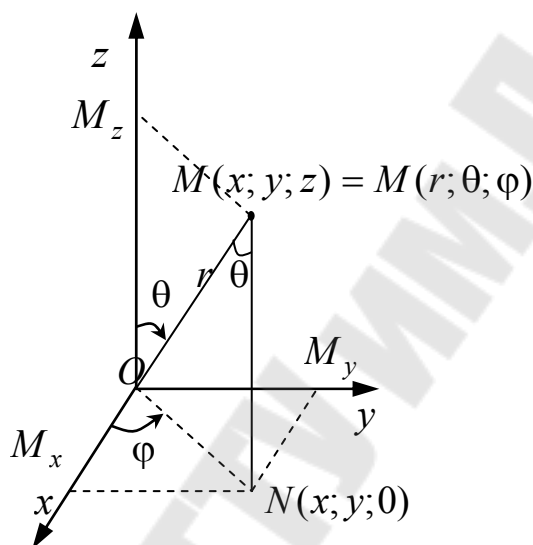


Рис. 2.19

Установим связь между прямоугольными и сферическими координатами. Координатные поверхности  $\varphi = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  представляют собой соответственно плоскости и конические поверхности. Координатная же поверхность  $r = \text{const} > 0$  представляет собой сферу – отсюда название «сферические координаты». Из прямоугольного треугольника  $OM_zM$  находим:

$$z = OM_z = r \cos \theta,$$

$$M_zM = r \sin \theta = ON.$$

Далее из прямоугольного треугольника  $OM_xN$  получаем:

$$x = OM_x = ON \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi;$$

$$y = OM_y = M_xN = ON \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi.$$

Итак,

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi; & y = r \sin \theta \sin \varphi; & z = r \cos \theta, \\ (r \geq 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq \theta \leq \pi). \end{cases} \quad (2.45)$$

**Замечание 2.11.** Иногда в качестве угла  $\theta$  берется угол между лучами  $OM$  и  $ON$  со знаком плюс, если  $z > 0$ , и со знаком минус, если  $z < 0$ . В этом случае  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , а в формулах (2.45) надо заменить  $\sin \theta$  на  $\cos \theta$ , а  $\cos \theta$  на  $\sin \theta$ .

Подсчитаем якобиан преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -r \sin \theta \sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} - \\ &- r \sin \theta \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r \sin \theta \left[ \sin \varphi (-r \sin^2 \theta \sin \varphi - r \cos^2 \theta \sin \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi (-r \sin^2 \theta \cos \varphi - r \cos^2 \theta \cos \varphi) \right] = \\ &= r \sin \theta \left[ r \sin^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r \cos^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right] = \\ &= r \sin \theta (r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi) = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

(Мы разложили определитель третьего порядка по элементам последнего столбца).

Итак,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta. \quad (2.46)$$

Обобщением сферических координат, связанных с декартовыми координатами формулами (2.45), являются *эллипсоидальные*

(или обобщенные сферические) координаты, связанные с декартовыми координатами соотношениями:

$$\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi; & y = br \sin \theta \sin \varphi; & z = cr \cos \theta, \\ (r \geq 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & 0 \leq \theta \leq \pi). \end{cases} \quad (2.47)$$

Якобиан этого преобразования, как видно из нахождения якобиана (2.45), дается выражением

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abc r^2 \sin \theta. \quad (2.48)$$

**Пример 2.10.** Найти объем эллипсоида:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

*Решение.* Объем тела вычисляется по формуле (2.35), т. е.

$$v = \iiint_V dx dy dz.$$

Перейдем в тройном интеграле к обобщенным сферическим координатам по формулам (2.47). Якобиан этого преобразования дается выражением (2.48), а области  $V = \left\{ (x; y; z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$  отвечает область  $V' = \{(r; \theta; \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  ( $r^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$ ). Тогда получим:

$$\begin{aligned} v &= \iiint_V dx dy dz = abc \iiint_{V'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^1 r^2 dr = \\ &= abc \varphi \Big|_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 = 2\pi abc (1+1) \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $v = \frac{4}{3} \pi abc$ .

## Лекция 15

### § 2.8. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

#### *Геометрические приложения тройных интегралов*

##### *Вычисление объемов тел*

Согласно геометрическому смыслу тройного интеграла, объем тела  $V$  вычисляется по формуле (2.35) (см. пример 2.10).

#### *Физические приложения тройных интегралов*

Для того чтобы получить формулы, отражающие физические приложения тройных интегралов, воспользуемся (как и в случае двойного интеграла) подходом бесконечно малых величин.

##### *1. Вычисление массы пространственных тел*

Выделим в области  $V$  бесконечно малую часть  $dV$  объема  $d\upsilon = dxdydz$ , и будем предполагать, что масса выделенного элемента сосредоточена в одной точке или, что объемная плотность  $\gamma = \gamma(x, y, z)$  в пределах этого элемента постоянна. Тем самым для элемента  $dV$  массы  $dm$  и объема  $d\upsilon$  будем иметь приближенное выражение вида

$$dm = \gamma d\upsilon = \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

которое верно до бесконечно малой более высокого порядка, чем объем  $d\upsilon$ . Тогда точное значение массы  $m_V$  выразится тройным интегралом [см. также физический смысл тройного интеграла и формулу (2.36), а также замечание 2.6]:

$$m_V = \iiint_V \gamma(x, y, z) dxdydz. \quad (2.49)$$

##### *2. Вычисление статических моментов и моментов инерции пространственного тела относительно координатных плоскостей (осей) и начала координат*

Будем исходить из элементарных статических моментов тела относительно координатных плоскостей:

$$dM_{yz} = xdm = x\gamma(x, y, z)d\upsilon; \quad dM_{zx} = ydm = y\gamma(x, y, z)d\upsilon;$$

$$dM_{xy} = zdm = z\gamma(x, y, z)d\upsilon.$$

Отсюда получаем формулы для самих статических моментов:

$$\begin{cases} M_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z)dx dy dz; & M_{zx} = \iiint_V y\gamma(x, y, z)dx dy dz; \\ M_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z)dx dy dz. \end{cases} \quad (2.50)$$

Таким же образом выписываем выражения для элементарных моментов инерции относительно координатных плоскостей:

$$dI_{yz} = x^2\gamma(x, y, z)d\upsilon; \quad dI_{zx} = y^2\gamma(x, y, z)d\upsilon; \quad dI_{xy} = z^2\gamma(x, y, z)d\upsilon,$$

и для элементарных моментов инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$dI_x = (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\upsilon = dI_{zx} + dI_{xy};$$

$$dI_y = (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\upsilon = dI_{yz} + dI_{xy};$$

$$dI_z = (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)d\upsilon = dI_{yz} + dI_{zx};$$

$$dI_0 = (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)d\upsilon = dI_{yz} + dI_{zx} + dI_{xy}.$$

Отсюда сразу получаются формулы для моментов инерции тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$\begin{cases} I_{yz} = \iiint_V x^2\gamma(x, y, z)dx dy dz; & I_{zx} = \iiint_V y^2\gamma(x, y, z)dx dy dz; \\ I_{xy} = \iiint_V z^2\gamma(x, y, z)dx dy dz. \end{cases} \quad (2.51)$$

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dx dy dz = I_{zx} + I_{xy};$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dx dy dz = I_{yz} + I_{xy};$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dx dy dz = I_{yz} + I_{zx};$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dx dy dz = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy}.$$

### 3. Вычисление координат центра тяжести пространственного тела

Теперь обычным образом получаются координаты центра тяжести пространственного тела:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m_V}, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m_V}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m_V}. \quad (2.52)$$

### 4. Вычисление силы и потенциала притяжения пространственного тела

Рассмотрим еще одно физическое применение тройных интегралов. Пусть тело  $V$  с заданной в каждой точке  $M(x; y; z)$  пространственной плотностью  $\gamma = \gamma(x, y, z)$  притягивает точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  массы  $m_0$  по закону всемирного тяготения (закону Ньютона:  $fm_0m\vec{r}/r^3$ ). Тогда сила притяжения  $\vec{F} = (X; Y; Z)$  точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  массы  $m_0$  со стороны элемента  $dV$ , сосредоточенного в точке  $M(x; y; z)$  и имеющего объем  $d\upsilon = dxdydz$  и массу  $dm = \gamma(x, y, z)d\upsilon$ , имеет на координатные оси проекции:

$$dX = fm_0 \frac{x-x_0}{r^3} \gamma d\upsilon, \quad dY = fm_0 \frac{y-y_0}{r^3} \gamma d\upsilon, \quad dZ = fm_0 \frac{z-z_0}{r^3} \gamma d\upsilon,$$

где  $f$  – гравитационная постоянная, а

$$r = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (2.53)$$

есть расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до элемента  $dV$  тела массы  $dm$ , сосредоточенного в точке  $M(x; y; z)$ . Суммируя эти выражения по всему телу  $V$ , для проекций полной силы притяжения  $\vec{F}(M_0)$  на координатные оси получим:

$$\begin{cases} X = fm_0 \iiint_V \frac{x-x_0}{r^3} \gamma(x, y, z) dxdydz; \\ Y = fm_0 \iiint_V \frac{y-y_0}{r^3} \gamma(x, y, z) dxdydz; \\ Z = fm_0 \iiint_V \frac{z-z_0}{r^3} \gamma(x, y, z) dxdydz. \end{cases} \quad (2.54)$$

Подобным образом определяется и *потенциал*  $U$  тела  $V$  в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ :

$$U(x_0, y_0, z_0) = fm_0 \iiint_V \gamma(x, y, z) \frac{dx dy dz}{r}. \quad (2.55)$$

Заметим, что если точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  лежит вне тела  $V$ , то все интегралы в формулах (2.54) и (2.55) оказываются собственными. В этом случае можно дифференцировать интеграл в (2.55) по любой из переменных  $x_0, y_0, z_0$  под знаком интеграла. В результате получим соотношение, связывающее силу  $\vec{F}$  с градиентом потенциала, в виде

$$\vec{F} = \text{grad}U \quad (2.56)$$

или в скалярной форме

$$X = \frac{\partial U}{\partial x_0}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y_0}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z_0}. \quad (2.57)$$

Более того, формулы (2.57) остаются справедливыми и в том случае, когда точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  принадлежит телу  $V$ . Очевидно также, что из определения (2.55) следует, что формулы (2.57) совпадают с выражениями (2.54).

**Пример 2.11.** Определить положение центра тяжести шара  $V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\}$ , если плотность в точках шара обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат:  $\gamma(x, y, z) = k / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

*Решение.* Масса тела вычисляется по формуле (2.49) [см. *физический смысл тройного интеграла* и формулу (2.36), а также замечание 2.6]:

$$m_V = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz = k \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В тройном интеграле по области  $V$  перейдем к сферическим координатам  $(r; \theta; \varphi)$  по формулам (2.45):  $x = r \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ . В этом случае область  $V$  является образом области  $V'$ , причем из выражения для области  $V$  находим:



$$r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \leq 2ar \cos \theta \Rightarrow r^2 \leq 2ar \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, \cos \theta \geq 0.$$

Отсюда следует

$$V' = \{(r; \theta; \varphi) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2\},$$

а якобиан отображения  $V' \rightarrow V$  равен  $r^2 \sin \theta$  [см. формулу (2.46)]. Тогда масса  $m_V$  выразится через тройной интеграл по области  $V'$ , который легко вычисляется с помощью повторного:

$$m_V = k \iiint_{V'} \frac{r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r = \\ = k \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{2a \cos \theta} = \pi k \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cdot 4a^2 \cos^2 \theta = \\ = -4\pi k a^2 \int_0^{\pi/2} d(\cos \theta) \cos^2 \theta = -4\pi k a^2 \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \pi k a^2.$$

Для нахождения координат центра тяжести искомого тела вычислим статические моменты по формулам (2.50), переходя в них к сферическим координатам. Тогда получим:

$$M_{yz} = k \iiint_V \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint_{V'} \frac{r \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = \\ = k \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = k \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = 0;$$

$$M_{zx} = k \iiint_V \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint_{V'} \frac{r \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = \\ = k \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = -k \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = 0;$$

$$M_{xy} = k \iiint_V \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint_{V'} \frac{r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta}{r} = \\ = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \int_0^{2a \cos \theta} dr r^2 = k \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \theta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \pi k \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \sin \theta \cdot 8a^3 \cos^3 \theta = -\frac{16}{3} \pi k a^3 \int_0^{\pi/2} d(\cos \theta) \cos^4 \theta = \\
&= -\frac{16}{3} \pi k a^3 \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{15} \pi k a^3.
\end{aligned}$$

Наконец, используя формулы (2.52), находим координаты центра тяжести:

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{16\pi k a^3 \cdot 3}{15 \cdot 4\pi k a^2} = \frac{4}{5} a.$$

*Ответ:*  $x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{4}{5} a.$

**Пример 2.12.** Вычислить моменты инерции прямого кругового цилиндра высоты  $2H$  и радиуса  $R$  относительно осей симметрии, считая плотность постоянной и равной  $\gamma_0$ .

*Решение.* Выберем систему координат так, чтобы ось  $Oz$  была направлена вдоль оси цилиндра, а начало координат поместим в его центре симметрии (рис. 2.20). Тогда задача сведется к вычислению моментов инерции цилиндра относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  по формулам (2.51):

$$I_x = \gamma_0 \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_y = \gamma_0 \iiint_V (z^2 + x^2) dx dy dz,$$

$$I_z = \gamma_0 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

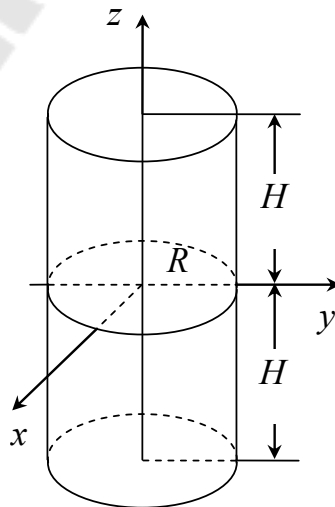


Рис. 2.20

В выбранной системе координат область  $V$  задается неравенствами:  $V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, -H \leq z \leq H\}$ .

В тройных интегралах по области  $V$  перейдем к цилиндрическим координатам  $(\rho; \varphi; z)$  по формулам (2.44):  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . В этом случае якобиан отображения  $V' \rightarrow V$  равен  $\rho$ , а область  $V$  будет иметь прообразом область  $V'$ , причем из выражения для области  $V$  находим:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R^2, -H \leq z \leq H \Rightarrow \rho^2 \leq R^2, -H \leq z \leq H.$$

Отсюда следует:

$$V' = \{(\rho; \varphi; z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -H \leq z \leq H\}.$$

Тогда искомые моменты инерции выразятся через тройные интегралы по области  $V'$ , которые легко вычисляются с помощью повторных:

$$\begin{aligned} I_x &= \gamma_0 \iiint_{V'} (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{-H}^H dz (\rho^3 \sin^2 \varphi + \rho z^2) = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left( \rho^3 \sin^2 \varphi z + \rho \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^H = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left( H\rho^3 \sin^2 \varphi + \frac{H^3}{3} \rho \right) = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( H \frac{\rho^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{H^3}{3} \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^R = 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{HR^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{H^3 R^2}{6} \right) = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{HR^4}{8} (1 - \cos 2\varphi) + \frac{H^3 R^2}{6} \right] = 2\gamma_0 \left[ \frac{HR^4}{8} \left( \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{H^3 R^2}{6} \varphi \right] \Big|_0^{2\pi} = 2\gamma_0 \left( \frac{HR^4}{8} \cdot 2\pi + \frac{H^3 R^2}{6} \cdot 2\pi \right) = \pi HR^2 \gamma_0 \left( \frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} H^2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \gamma_0 \iiint_{V'} (z^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi dz = \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{-H}^H dz (\rho z^2 + \rho^3 \cos^2 \varphi) = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left( \rho \frac{z^3}{3} + \rho^3 \cos^2 \varphi \cdot z \right) \Big|_0^H = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \left( \frac{H^3}{3} \rho + H\rho^3 \cos^2 \varphi \right) = \\
&= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{H^3}{3} \frac{\rho^2}{2} + H \frac{\rho^4}{4} \cos^2 \varphi \right) \Big|_0^R = 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{H^3 R^2}{6} + \frac{HR^4}{4} \cos^2 \varphi \right) = \\
&= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{H^3 R^2}{6} + \frac{HR^4}{8} (1 + \cos 2\varphi) \right] = 2\gamma_0 \left[ \frac{H^3 R^2}{6} \varphi + \frac{HR^4}{8} \left( \varphi + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} = 2\gamma_0 \left( \frac{H^3 R^2}{6} \cdot 2\pi + \frac{HR^4}{8} \cdot 2\pi \right) = \pi HR^2 \gamma_0 \left( \frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} H^2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_z &= \gamma_0 \iiint_{V'} \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho^3 \int_{-H}^H dz = 2\gamma_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R z \Big|_0^H = \\
&= 2\gamma_0 \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} \cdot H = \pi HR^4 \gamma_0.
\end{aligned}$$

Ответ:  $I_x = I_y = \pi HR^2 \gamma_0 \left( \frac{R^2}{2} + \frac{2}{3} H^2 \right)$ ,  $I_z = \pi HR^4 \gamma_0$ .

**Пример 2.13.** Найти притяжение центра основания прямого кругового цилиндра высоты  $h$  и радиуса  $R$  всей его массой, считая плотность постоянной и равной  $\gamma_0$ .

*Решение.* Компоненты силы притяжения будем вычислять по формулам (2.54), в которых плотность  $\gamma = \gamma_0$ ,  $m_0 = 1$ , а  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , т. е.

$$X = f\gamma_0 \iiint_V \frac{xdxdydz}{r^3}, \quad Y = f\gamma_0 \iiint_V \frac{ydx dy dz}{r^3}, \quad Z = f\gamma_0 \iiint_V \frac{zdx dy dz}{r^3}.$$

В выбранной системе координат область  $V$  (рис. 2.21) задается неравенствами:

$$V = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

В тройных интегралах по области  $V$  перейдем к цилиндрическим координатам  $(\rho; \varphi; z)$ , как это делалось в примере 2.12. В этом случае область  $V$  будет образом области

$$V' = \left\{ (\rho; \varphi; z) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq R, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h \end{array} \right\}.$$

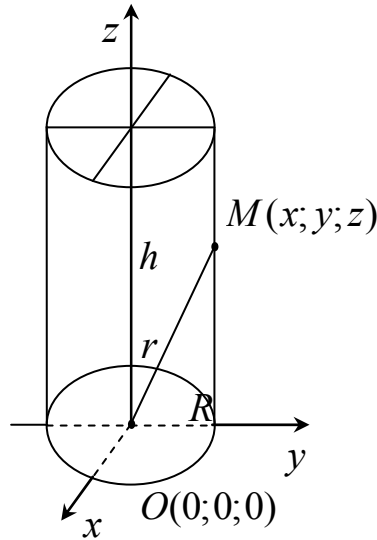


Рис. 2.21

Тогда искомые компоненты силы притяжения выразятся через тройные интегралы по области  $V'$ , которые легко вычисляются с помощью повторных:

$$\begin{aligned}
 X &= f\gamma_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= f\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= f\gamma_0 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0; \\
 Y &= f\gamma_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= -f\gamma_0 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0; \\
 Z &= f\gamma_0 \iiint_{V'} \frac{z \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \int_0^h \frac{dz z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= f\gamma_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \int_0^h \frac{d(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi f\gamma_0 \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \frac{-2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_0^h =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi f \gamma_0 \int_0^R d\rho \rho \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right) = 2\pi f \gamma_0 \left[ \int_0^R d\rho - \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(\rho^2 + h^2)}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] = \\
&= 2\pi f \gamma_0 \left( \rho - \sqrt{\rho^2 + h^2} \right) \Big|_0^R = 2\pi f \gamma_0 \left( R - \sqrt{R^2 + h^2} + h \right).
\end{aligned}$$

Ответ:  $X = Y = 0$ ,  $Z = 2\pi f \gamma_0 \left( R + h - \sqrt{R^2 + h^2} \right)$ .

**Пример 2.14.** Найти притяжение вершины прямого кругового конуса высоты  $h$  и радиуса основания  $R$  всей его массой, считая плотность постоянной и равной  $\gamma_0$ .

*Решение.* В выбранной системе координат область  $V$  (рис. 2.22) задается неравенствами  $V = \{(x; y; z) \mid \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h\}$ .

Поступая, как и в примере 2.13, в формулах (2.54), в которых  $\gamma = \gamma_0$ ,  $m_0 = 1$ ,  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , перейдем к цилиндрическим координатам  $(\rho; \varphi; z)$ . В этом случае область  $V$  будет образом области

$$V' = \{(\rho; \varphi; z) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{h}{R} \rho \leq z \leq h\}.$$

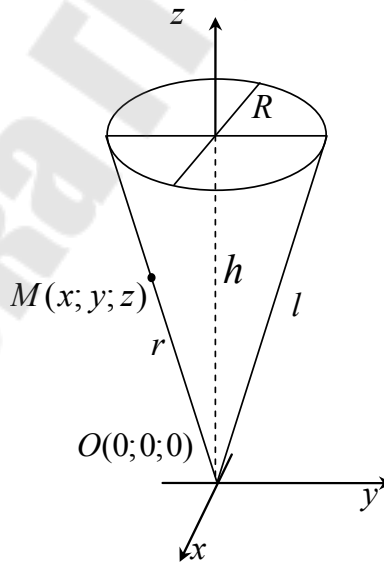


Рис. 2.22

Тогда искомые компоненты силы притяжения выразятся через тройные интегралы по области  $V'$ , которые легко вычисляются с помощью повторных:

$$\begin{aligned}
X &= f\gamma_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
&= f\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
&= f\gamma_0 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0; \\
Y &= f\gamma_0 \iiint_{V'} \frac{\rho \sin \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
&= -f\gamma_0 \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho^2 \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 0; \\
Z &= f\gamma_0 \iiint_{V'} \frac{z \rho d\rho d\varphi dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = f\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{dz z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\
&= f\gamma_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \frac{d(\rho^2 + z^2)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi f\gamma_0 \int_0^R d\rho \rho \frac{1}{2} \frac{-2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{\frac{h}{R}\rho}^h = \\
&= 2\pi f\gamma_0 \int_0^R d\rho \rho \left( \frac{1}{\rho \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right) = 2\pi f\gamma_0 \left[ \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \int_0^R d\rho - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(\rho^2 + h^2)}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] = 2\pi f\gamma_0 \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \rho - \sqrt{\rho^2 + h^2} \right) \Big|_0^R = \\
&= 2\pi f\gamma_0 \left( \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \sqrt{R^2 + h^2} + h \right) = 2\pi f\gamma_0 \left( \frac{l^2 - h^2}{l} - l + h \right) = \\
&= \frac{2\pi f\gamma_0}{l} (l^2 - h^2 - l^2 + hl) = 2\pi f\gamma_0 \frac{h}{l} (l - h).
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $l^2 = h^2 + R^2$ .

Ответ:  $X = Y = 0$ ,  $Z = 2\pi f\gamma_0 \frac{h}{l} (l - h)$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

### Лекция 10

**Задание 10.1.** Вычислить двойной интеграл по области  $D$ , ограниченной данными линиями:

- 1)  $\iint_D xy dx dy$ ,  $D: y = x, y = \sqrt{3}x, x = 1, x = 2$ . Ответ:  $\frac{15}{4}$ ;
- 2)  $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $D: y = x, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = \sqrt{3}$ . Ответ:  $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ .

### Лекция 11

**Задание 11.1.** Вычислить двойной интеграл по области  $D$ , ограниченной данными линиями, путем перехода к полярным координатам:

- 1)  $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  $D: y = 0, y = \sqrt{9 - x^2}, x = 0, x = 3$ .  
Ответ:  $\frac{9\pi}{2}$ ;
- 2)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D: x = 0, x = \sqrt{4 - y^2}, y = 0, y = 2$ .  
Ответ:  $2\pi$ .

### Лекция 12

**Задание 12.1.** Вычислить с помощью двойного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями:

- 1)  $y = x^2 - 2x - 2$ ;  $y = x + 2$ . Ответ:  $\frac{125}{6}$ ;
- 2) треугольник с вершинами в точках  $A(0;0); B(3;3); C(1;5)$ .  
Ответ:  $6$ ;
- 3)  $x^2 + y^2 = 4x$ ;  $x^2 + y^2 = 6x$ ;  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ;  $y = \sqrt{3}x$ . Ответ:  $\frac{5\pi}{6}$ .

**Задание 12.2.** Вычислить координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей пластины  $D$ , где  $\mu(x, y)$  – поверхностная плотность.



$$D: y^2 = x, \quad x = 4; \quad \mu(x, y) = x. \quad \text{Ответ: } x_c = \frac{20}{7}; \quad y_c = 0;$$

$$I_x = \frac{1024}{21}; \quad I_y = \frac{2048}{9}.$$

**Задание 12.3.** Вычислить массу плоской пластины, если область  $D$  ограничена окружностью:  $x^2 + y^2 = 2x$ ;  $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ .

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{8}.$$

### Лекция 13

**Задание 13.1.** Вычислить тройной интеграл по области  $V$ , ограниченной данными поверхностями:

$$1) \iiint_V xyz dx dy dz, \quad V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{720};$$

$$2) \iiint_V xyz dx dy dz, \quad V: x = 2, y = 0, y = x, z = 0, z = y.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3}.$$

### Лекция 14

**Задание 14.1.** Вычислить тройной интеграл по области  $V$ , ограниченной данными поверхностями, путем перехода к цилиндрической или сферической системам координат:

$$1) \iiint_V dx dy dz, \quad V = \left\{ (x; y; z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\pi abc}{3};$$

$$2) \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad V = \left\{ (x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, -3 \leq z \leq 3 \right\}.$$

$$\text{Ответ: } 96\pi.$$

## Лекция 15

**Задание 15.1.** С помощью тройного интеграла вычислить объем тела  $V$ :

1)  $V: z = x^2 + y^2, z = 9.$

*Ответ:*  $364,5\pi$ ;

2)  $V: y^2 = x, y^2 = -x + 3, z = 0, z = 4.$

*Ответ:*  $\frac{256}{3}$ ;

3)  $V: z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

*Ответ:*  $8\pi$ ;

4)  $V: x^2 + y^2 = R^2, x + y + z = a, x + y + z = -a.$

*Ответ:*  $2\pi Ra$ .

**Задание 15.2.** Используя цилиндрические или сферические координаты, вычислить массу тела с плотностью  $\mu(x, y)$ , ограниченного указанными поверхностями:

1)  $\mu(x, y) = x, V: x^2 + y^2 + z^2 = 8, x^2 = y^2 + z^2, x \geq 0.$

*Ответ:*  $8\pi$ ;

2)  $\mu(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}; V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0.$

*Ответ:*  $\frac{16\pi}{3}$ ;

3)  $\mu(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; V: x^2 + y^2 = 2x, z \geq 0, x + z = 2.$

*Ответ:*  $\frac{128}{45}$ .

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Черниченко Юрий Дмитриевич  
Емелин Анатолий Владимирович**

**РЯДЫ. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ  
И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.  
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

**Курс лекций  
по дисциплинам «Высшая математика»  
и «Математика» для студентов всех специальностей  
дневной и заочной форм обучения  
В двух частях**

**Часть 1  
Ряды. Кратные интегралы**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. И. Жукова*  
Компьютерная верстка *М. В. Аникеенко*

Подписано в печать 20.09.10.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Ризография. Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 7,5.

Изд. № 255.

E-mail: [ic@gstu.by](mailto:ic@gstu.by)

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Издательский центр учреждения образования  
«Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.  
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.