Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПОСОБИЕ
по выполнению тестовых заданий по дисциплинам «Математика», «Высшая математика» для студентов всех специальностей заочной формы обучения

Гомель 2014

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161я73
А18

Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 2 от 05.12.2013 г.*)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Промышленная теплоэнергетика и экология» ГГТУ им. П. О. Сухого *А. В. Шаповалов*

Авакян, Е. З.
А18 Теория функции комплексного переменного. Операционное исчисление : пособие по выполнению тестовых заданий по дисциплинам «Математика», «Высшая математика» для студентов всех специальностей заоч. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2014. – 51 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http:// http://library.gstu.by/StartEK/. – Загл. с титул. экрана.

Представлен теоретический материал, приведены примеры типовых задач, дан вариант тестового задания с решением. Предназначено для самостоятельной подготовки студентов к тестированию и экзамену по математике.
Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161я73

1. ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Комплексные числа и действия над ними.

<u>*Определение*</u>. Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y). Первое из этих чисел называется действительной частью комплексного числа z, а вторая – мнимой частью комплексного числа z.

$$z = (x, y)$$
$$\operatorname{Re} z = x \qquad (1.1)$$
$$\operatorname{Im} z = y$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны друг другу тогда и только тогда, когда одновременно равны друг другу их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases} \qquad (1.2)$$

Комплексные числа, действительная часть которых равна нулю, называются мнимыми: $z = (0, y)$. Мнимая единица обозначается как $i = (0;1)$, $i^2 = -1$.

Любое действительное число можно представить в виде $x = (x,0)$.

Число $\bar{z}$ называется комплексно-сопряженным числу z, если

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \end{cases} \qquad (1.3)$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа:

Комплексные числа $z = (x, y)$ изображаются точками с координатами (x, y) на плоскости (см. рис. 1)

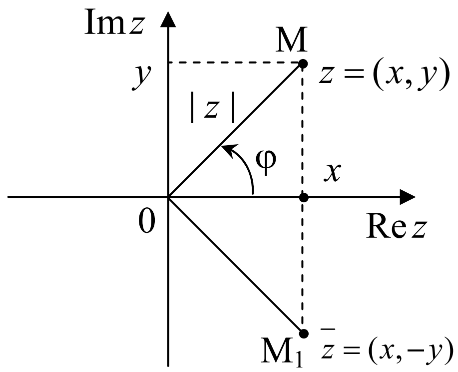

Рис. 1

Действительные числа изображаются точками на оси абсцисс, мнимые числа – точками на оси ординат. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***.

Формы задания комплексного числа.

а) Алгебраическая форма записи комплексного числа:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned} \qquad (1.4)$$

б) Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до точки $M(x, y)$, изображающей на комплексной плоскости число $z = (x, y)$ (рис. 1)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2} \qquad (1.5)$$

Аргументом комплексного числа z называется угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси абсцисс (рис. 1)

$$\varphi = \mathrm{Arg}\,z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2... \qquad (1.6)$$

где $\arg z$ – главная часть аргумента комплексного числа $0 \le \arg z \le 2\pi$, определенная как

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, y < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.8}$$

Для $\bar{z}$ имеем:

$$\begin{gathered} |z| = |\bar{z}| \\ \operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg}\bar{z} \end{gathered} \tag{1.9}$$

в) Показательная форма записи комплексного числа.

Справедлива формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.10}$$

С учетом этой формулы и выражения для комплексного числа в тригонометрической форме (1.8), комплексное число z может быть записано в показательной форме:

$$z = |z| e^{i\varphi} \tag{1.11}$$

где $|z|$ и φ определяются по формулам (1.5) – (1.7)

$$\bar{z} = |\bar{z}| e^{-i\varphi} \tag{1.12}$$

Действия над комплексным числами.

1) Сложение, вычитание

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) \pm i(y_1 \pm y_2) \tag{1.12}$$

2) Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) =$$
$$= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.13)$$

3) Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} =$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.14)$$

4) Возведение в степень

$$z^n = (x + iy)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z| e^{in\varphi} \quad (1.15)$$

5) Извлечение корня n-й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \quad (1.16)$$

Следует заметить, что корень n-й степени из комплексного числа имеет ровно n различных значений.

Пример 1

Заданы комплексные числа $z_1 = 1 + 5i$ и $z_2 = 3 - 2i$.
Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1 + 2z_2}{z_1 - \bar{z}_2}\right)$; д) $\mathrm{Im}\left((\bar{z}_1 + z_2) \cdot z_1\right)$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (1 + 5i) + (3 - 2i) = (1 + 3) + (5i - 2i) = 4 + 3i$

б) $z_1 \cdot z_2 = (1 + 5i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 15i - 10i^2$. Учитывая, что $i^2 = -1$, получаем $z_1 \cdot z_2 = 3 + 13i + 10 = 13 + 13i$.

в) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+5i}{3-2i}$. Домножим числитель и знаменатель на $\bar{z}_2 = 3+2i$

$$\frac{1+5i}{3-2i} = \frac{(1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \left\{i^2 = -1\right\} = \frac{3+2i+15i+10i^2}{3^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{3+17i-10}{9+4} = \frac{-7+17i}{13}.$$

г) Найдем $z_1 + 2z_2$

$$z_1 + 2z_2 = 1+5i+2(3-2i) = 1+5i+6-4i = 7+i.$$

Найдем $z_1 - \bar{z}_2$.

Согласно формуле (1.4)

$$\bar{z}_2 = 3+2i.$$

Тогда $z_1 - \bar{z}_2 = 1+5i-(3+2i) = -2+3i$.

Найдем $\dfrac{z_1+2z_2}{z_1-\bar{z}_2}$

$\dfrac{z_1+2z_2}{z_1-\bar{z}_2} = \dfrac{7+i}{-2+3i} =$ {домножим числитель и знаменатель на $-2-3i$}=

$$= \frac{(7+i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-14-21i-2i-3i^2}{(-2)^2-(3i)^2} = \left\{i^2 = -1\right\} = \frac{-11-23i}{4+9} =$$

$$= \frac{-11-23i}{13} = -\frac{11}{13} - \frac{23i}{13}.$$

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{11}{13} - \frac{23}{13}i\right) = -\frac{11}{13}.$$

д) По формуле (1.4) находим $\bar{z}_1 = 1-5i$

$$\bar{z}_1 + z_2 = 1-5i+3-2i = 4-7i$$

$$(\bar{z}_1 + z_2)z_1 = (4-7i)(1+5i) = 4+20i-7i-35i^2 = \left\{i^2 = -1\right\} = 39+13i$$

$$\operatorname{Im}\left((\bar{z}_1 + z_2)\cdot z_1\right) = 13$$

Ответ: а) $4+3i$; б) $13+13i$; в) $\dfrac{-7+17i}{13}$; г) $-\dfrac{11}{13}$; д) 13.

Пример 2

Задано комплексное число $z=-1-i$.

а) записать его в тригонометрической и показательной формах.

Найти б) z^3; в) $\sqrt[3]{z}$.

Решение.

а) Для того, чтобы записать заданное число в тригонометрической и показательной формах, нам необходимо найти $|z|$ и $\arg z$. Воспользовавшись формулами (1.5) и (1.6), получаем

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{-1} = 1$$

Так как $x<0$ и $y<0$, угол φ найдем согласно (1.7)

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Тогда, согласно (1. 8) запишем $z=-1-i$ в тригонометрической форме:

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

В показательной форме $z=-1-i$ может быть представлено по формуле (1.1)

$$-1-i = \sqrt{2}e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}.$$

б) Для вычисления z^3 воспользуемся формулой (1.15)

$$z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot e^{i3\cdot\frac{5\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{15\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\cdot\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi\right)}.$$

Отбрасывая 2π, окончательно получаем $z^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

в) Корень кубический из z найдем по формуле (1.16)

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi+2\pi k}{12}}, \quad k = 0,1,2 .$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_{k=0} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_{k=1} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi+8\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_{k=2} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi+16\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{21\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} .$$

Ответ: а) $z = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$;

б) $z^3 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$;

в) $\sqrt[3]{z} = \left\{\sqrt[6]{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}; \sqrt[6]{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}; \sqrt[6]{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}$.

1.2. Функция комплексной переменной.

<u>*Определение*</u>. Говорят, что на множестве E комплексной плоскости задана функция комплексной переменной, если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке из множества E комплексное число ω

$$\omega = f(z) \tag{1.17}$$

Если каждому $z \in E$ ставится в соответствие единственное число ω, то функция называется однозначной.

Если каждому $z \in E$ поставлена в соответствие совокупность чисел ω, то задана многозначная функция.

Пусть z задано в алгебраической форме (1.14). Тогда комплексная функция $\omega = f(z)$ может быть представлена в виде

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.18}$$

Действительные функции двух переменных $u(x, y)$ и $v(x, y)$ называются, соответственно, действительной и мнимой частями функции $f(z)$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) \tag{1.19}$$

<u>*Основные элементарные функции комплексной переменной:*</u>

1) Дробно-рациональная функция

$$\omega = f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_n}, \tag{1.20}$$

где a_i, b_i – комплексные числа.

Частные случаи:

Линейная функция

$$\omega = f(z) = az + b \tag{1.21}$$

Степенная функция

$$\omega = f(z) = z^n, \quad n \in N \tag{1.22}$$

Функция Жуковского

$$\omega = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{1.23}$$

2) Показательная функция

$$\omega = f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{1.24}$$

3) Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e - iz\right) \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x \tag{1.25}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{iz}\right) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \tag{1.26}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{1.27}$$

4) Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\operatorname{sh} x \cos y+i \operatorname{ch} x \sin y \tag{1.28}$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\operatorname{ch} x \cos y-i \operatorname{sh} x \sin y \tag{1.29}$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \tag{1.30}$$

5) Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z=\ln |z|+i(\arg z+2\pi k)=\frac{1}{2}\ln(x^{2}+y^{2})+i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2\pi k\right) \tag{1.31}$$

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$ является многозначной.
Выражение

$$\ln z=\ln |z|+i\arg z \tag{1.32}$$

называется главным значением логарифмической функции.

6) Показательная функция общего вида

$$f(z)=a^{z}=e^{z\ln a}=e^{z\ln z+i2\pi k} \tag{1.33}$$

Показательная функция общего вида – многозначна. Главное значение функции определяется как $e^{z\ln z}$.

7) Обратные тригонометрические функции.

Обратные тригонометрические функции $\omega=\operatorname{Arcsin} z$, $\omega=\operatorname{Arccos} z$, $\omega=\operatorname{Arctg} z$ определены таким образом, что

$$\omega=\operatorname{Arcsin} z \Leftrightarrow z=\sin\omega$$
$$\omega=\operatorname{Arccos} z \Leftrightarrow z=\cos\omega$$
$$\omega=\operatorname{Arctg} z \Leftrightarrow z=\operatorname{tg}\omega$$

Обратные тригонометрические функции могут быть связаны с логарифмическими функциями:

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^{2}}\right) \tag{1.34}$$

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right) \tag{1.35}$$

$$\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{iz+1}{iz-1} \tag{1.36}$$

Обратные тригонометрические функции являются многозначными.

1.3. Дифференцирование функции комплексной переменной.

Определение. Если для точки z_0 существует при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z_0

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \qquad (1.37)$$

В этом случае функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0.

Функция, дифференцируемая не только в точке z_0, но и в некоторой окрестности z_0, называется аналитической в точке z_0.

Функция называется аналитической в области, если она является аналитической в каждой точке области.

Условия Коши-Римана:

Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, то в точке (x_0,y_0) существуют частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по переменным x,y, причем имеют место соотношения:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \end{cases} \qquad (1.38)$$

известные как условия Коши-Римана.

Производная функции $f(z)$ может быть найдена по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{dx}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (1.39)$$

Условия Коши-Римана (1.38) могут быть записаны в показательной форме ($x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \tag{1.40}$$

или ($\omega = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = R\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ -R\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \tag{1.41}$$

1.4. Интегрирование функции комплексной переменной.

Пусть на комплексной плоскости z задана кривая C и функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда интеграл от комплексной функции $f(z)$ по кривой C может быть записан в виде:

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C u(x,y)dy + v(x,y)dx \tag{1.42}$$

Справедлива теорема Коши:

Если функция $\omega = f(x)$ является аналитической в области, ограниченной извне контуром C_0 и изнутри контурами $C_1, C_2, ..., C_n$ и непрерывной в замкнутой области. Тогда

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 0, \tag{1.48}$$

где C – полная граница области, состоящая из контуров $C_0, C_1, ..., C_n$, проходимая в положительном направлении.

Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке a области D может быть вычислено по ***формуле Коши***

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (1.49)$$

Производная n-го порядка аналитической в любой точке a области D функции $f(z)$ может быть вычислена по формуле

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad (1.50)$$

1.5. Ряд Лорана. Изолированные особые точки.

Разложением в ряд Лорана функции $f(z)$ в точке z_0 называется ряд вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C-n}{(z-z_0)^n} \qquad (1.51)$$

Причем

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \qquad (1.52)$$

называется правильной частью ряда Лорана,

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C-n}{(z-z_0)^n} \qquad (1.53)$$

называется главной частью ряда Лорана.
Коэффициенты C_n, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, могут быть найдены по формуле

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (1.54)$$

где γ – любой контур, не содержащий внутри себя точек, в которых $f(z)$ не является аналитической.

Областью сходимости ряда Лорана, являющаяся пересечением областей сходимости правильной (1.52) и главной (1.53) частей ряда Лорана.

Если правильная часть ряда Лорана (1.52) сходится внутри круга $|z - z_0| \le R_1$, а главная часть ряда Лорана (1.53) сходится вне круга $|z - z_0| \ge R_2$ и $R_2 < R_1$, то областью сходимости ряда Лорана (1.51) является кольцо $R_2 \le |z - z_0| \le R_1$.

Для разложения функций в ряд Лорана можно использовать стандартные разложения элементарных функций в степенные ряды.

Пример 3

Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 1$

Решение.

Преобразуем заданную функцию, разложив ее на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{1}{(z-5)(z-1)} = \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1) + B(z-5)}{(z-5)(z-1)}$$

Приравняем числители исходной и полученной дробей:

$$(A+B)z + (A - 5B) = 1$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем:

$$z^1: \ A + B = 0$$

$$z^0: \ \mathrm{A - 5B} = 1$$

Тогда $B = -\dfrac{1}{6}$, $A = \dfrac{1}{6}$ и $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{z-1-4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-1}{4}}$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \ , \ |\, q\,| < 1,$$

Тогда при $0 < |\, z-1\,| < 4$ можно записать:

$$f(z) = \frac{1}{6}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

Итак, функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}$ разложена в ряд Лорана в точке $z_0 = 1$

$$f(z) = \frac{1}{6}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^n},$$

причем, главная часть содержит только один член $f_2(z) = \dfrac{1}{6(z-1)}$.

Пример 4

Разложить функцию $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение.

Воспользуемся стандартным разложением функции $f(t) = e^t$ в степенной ряд:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}.$$

Тогда

$$e^{\frac{1}{z}} = \left\{\frac{1}{z} = t\right\} = e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\, z^n}.$$

Тогда

$$z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\, z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\, z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!\, z^{n-2}} = \left\{\begin{matrix} n-2=k \\ n=3 \ \ \mathrm{k}=1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \frac{1}{z^k}.$$

Таким образом, правильная часть разложения в ряд Лорана содержит всего три слагаемых: $z^2 + z + \frac{1}{2}$; в главная часть – бесконечное число $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \frac{1}{z^k}$.

Ответ: $z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \frac{1}{z^k}$.

Классификация изолированных особых точек:

<u>*Определение*</u>. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ – однозначная и аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < R$.

Различают три типа изолированных точек:

1. *Устранимая особая точка.*

Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана $f(z)$ в окрестности z_0 не содержит отрицательных степеней $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \tag{1.55}$$

Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C_0 < \infty \tag{1.56}$$

Пример 5

Установить характер особой точки $z_0 = 0$ функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

Решение.

1 способ.

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$. Воспользуемся разложением $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{z!} + ... + \dfrac{z^n}{n!} + ... + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

Тогда

$$z_0 = 0 \;\; f(z) = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}.$$

Полученное разложение не содержит отрицательных степеней z, следовательно, $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

2 способ.

Вычислим предел $f(z)$ при $z \to z_0 = 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 < \infty,$$

следовательно, точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

2. *Полюс порядка* m.

Точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка m функции $f(z)$, если разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, наибольшая из которых равна m.

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \\ = \frac{C - m}{(z - z_0)^m} + \frac{C - m + 1}{(z - z_0)^{m-1}} + ... + \frac{C - 1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (1.57)$$

Если z_0 является полюсом порядка m, то

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \qquad (1.58)$$

Если z_0 является полюсом порядка m, то ее всегда можно представить в виде:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},\quad \varphi(z_0)\neq 0 \qquad (1.59)$$

Пример 6

Установить характер особой точки $z_0=\pi$ функции

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-\pi)^3}.$$

Решение.

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\pi$. Воспользуемся разложением

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+...+(-1)^n\ \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тогда

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-\pi)^3}=\frac{\sin(z-\pi+\pi)}{(z-\pi)^3}=-\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^3}=\{z-\pi=\eta\}=$$

$$=-\frac{\sin\eta}{\eta^3}=-\frac{1}{\eta^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{\eta^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{\eta^{2n-2}}{(2n+1)!}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{(z-\pi)^{2n-2}}{(2n+1)!}=-\frac{1}{(z-\pi)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{(z-\pi)^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

Оказалось, что разложение содержит один член с отрицательными степенями разности $(z-\pi)$, степень которого $m=2$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что точка $z_0=\pi$ является полюсом второго порядка функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^3}$.

Следует отметить, что формула (1.59) в данном случае неприменима, т.к. $\sin\pi=0$.

3. *Существенно особая точка.*

Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, если разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 содержит бесконечное число членов:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (1.60)$$

Если z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Пример 7

Установить характер изолированной особой точки $z_0 = 0$ функции $f(z) = \cos\frac{1}{z}$.

Решение.

Разложим $f(z) = \cos\frac{1}{z}$ в ряд Лорана, воспользовавшись разложением

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\cos\frac{1}{z} = \left\{\frac{1}{z} = \eta\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\eta^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot z^{2n}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, следовательно, $z_0 = 0$ является существенно особой точкой для функции $f(z) = \cos\frac{1}{z}$.

1.6. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.

<u>*Определение*</u>. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^+} f(z) dz$, взятого по любому контуру γ, целиком лежащему внутри области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0.

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z)dz \qquad (1.61)$$

Из (1.61) и формулы для коэффициентов ряда Лорана (1.54) следует, что вычет в точке z_0 численно равен C_{-1} коэффициенту в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = C_{-1} \qquad (1.62)$$

Основные формулы для вычисления вычетов:

1) Если $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то
$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = 0.$$
2) Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то
$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = 0.$$
3) Если z_0 является полюсом первого порядка функции $f(z)$ и $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \begin{array}{l} \varphi(z_0) \neq 0 \\ \psi(z_0) = 0 \\ \psi'(z_0) \neq 0 \end{array} \qquad (1.63)$$

то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \qquad (1.64)$$

4) Если z_0 является полюсом порядка m, функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \qquad (1.65)$$

Для полюса первого порядка формула (1.65) приобретает вид:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \qquad (1.66)$$

5) Если z_0 – существенно особая точка $f(z)$, то $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$ находится путем непосредственного разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0.
6) Вычет функции в точке $z_0 = \infty$ равен взятому со знаком минус коэффициенту при $z-1$ разложении Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.
7) Справедливо соотношение

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to\infty}(-zf(z)) \qquad (1.67)$$

если предел существует.

Пример 8

Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2-4z+3}$ в ее особых точках.

Решение.

Найдем особые точки функции $f(z)$, приравняв ее числитель к нулю.

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$
$$z_1 = 1 \qquad z_2 = 3$$

Тогда $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{(z-1)(z-3)}$.

Найдем вычеты в точках $z_1 = 1$, $z_2 = 3$.

Т.к. z_1 и z_2 являются полюсами первого порядка, то можно воспользоваться формулой (1.64) или (1.66).

Вычислим вычет в точке $z_1 = 1$ используя, например, формулу (1.64)

$$\varphi(z) = \frac{1-\cos z}{z-3}$$

$$\varphi(1) = \frac{1-\cos 1}{1-3} \neq 0$$

$$\psi(z) = z - 3$$

Тогда

$$\operatorname*{res}_{1}\frac{1-\cos z}{(z-1)(z-3)}=\left.\frac{\dfrac{1-\cos z}{z-3}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{1-\cos z}{z-3}\right|_{z=1}=\frac{1-\cos 1}{1-3}=\frac{\cos 1-1}{2}.$$

Вычислим вычет в точке $z_2=3$, используя формулу (1.66)

$$\operatorname*{res}_{3}\frac{1-\cos z}{(z-3)(z-1)}=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1-\cos z}{(z-3)(z-1)}=\frac{1-\cos 3}{3-1}=\frac{1-\cos 3}{2}.$$

Пример 9

Найти вычет функции $f(z)=z\cos\frac{1}{z}$ в точке $z_0=0$.

Решение.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$

$$f(z)=z\cos\frac{1}{z}=z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}}$$

Точка z_0 является существенно особой точкой. Поэтому для вычисления вычета воспользуемся формулой (1.62).

Из разложения $z\cos\frac{1}{z}$ получаем коэффициент C_{-1} (при $n=1$)

$$C_{-1}=\frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)!}=\frac{-1}{2!}=-\frac{1}{2}$$

Таким образом, $\operatorname*{res}_{0} z\cos\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$.

Основная теорема теории вычетов.

Пусть $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{G}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, лежащих внутри G.

Тогда

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{z_n} f(z) \qquad (1.68)$$

где Γ^+ – полная граница области G.

Пример 10.

Найти $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\ln(2+z)}{z^2} dz$.

Решение.

Внутри круга $|z|=1$ находится единственная особая точка подынтегральной функции $z=0$, являющаяся полюсом второго порядка. Используя (1.68) и формулу (1.65) для вычисления вычета в полюсе второго порядка, получаем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\ln(2+z)}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{0} \frac{\ln(2+z)}{z^2} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 \cdot \frac{\ln(z+2)}{z^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \left(\ln(z+2)\right)' = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{1}{z+2} = \frac{2\pi i}{2} = \pi i .$$

<u>Теорема.</u> Пусть $f(z)$ является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, включая $z_N = \infty$, тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z_N} f(z) = 0 \qquad (1.69)$$

1.7. Приложение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов I рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Пусть на $[a;b]$ действительной оси x задана непрерывная функция комплексной переменной $f(x)$. Тогда в комплексной области G, содержащей отрезок действительной оси $[a;b]$, может существовать единственная аналитическая функция $f(z)$, принимающая значения

$f(x)$ на $[a;b]$. Функция $f(z)$ называется аналитическим продолжением действительной функции $f(x)$ в комплексную область G.

Рассмотрим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{1.70}$$

Пусть $f(x)$, заданная на всей действительной оси $-\infty < x < \infty$, может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$, причем ее аналитическое продолжение $f(z)$ является аналитической повсюду в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$ за исключением конечного числа особых точек, не лежащих на действительной оси. Пусть существуют такие положительные числа R_0, M и δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R_0$, имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0 \tag{1.71}$$

Тогда интеграл (1.70) может быть вычислен по формуле

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \quad \mathrm{Im}\, z_k > 0. \tag{1.72}$$

Пример 11

Вычислить несобственный интеграл, используя теорию вычетов

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 40}.$$

Решение.

Выясним, является ли подынтегральная функция непрерывной. Для этого приравняем знаменатель к нулю.

$$x^2 + 4x + 40 = 0 \qquad D = 16 - 4 \cdot 40 = -144 < 0.$$

Знаменатель подынтегральной функции не имеет нулей на множестве действительных чисел.

Сделаем аналитическое продолжение подынтегральной функции на комплексную плоскость. Для этого заменим действительную переменную x комплексной переменной z.

Функция $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+40}$ убывает при $|z|\to\infty$ как $\dfrac{1}{z^2}$ и не имеет особенностей на действительной оси.

Особыми точками $f(z)$ являются точки, при которых знаменатель обращается в ноль

$$z_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-144}}{2}=\frac{-4\pm 12i}{2}=-2\pm 6i.$$

Для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (1.72), причем вычет будем вычислять в точке $z=-2+6i$ ($\operatorname{Im}(-2+6i)>0$).

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+40}dx=2\pi i\underset{-2+6i}{\operatorname{res}}\frac{1}{z^2+4z+4}.$$

Точка $z=-2+6i$ является полюсом первого порядка, поэтому вычет может быть найден по формуле (1.64)

$$\underset{-2+6i}{\operatorname{res}}\frac{1}{z^2+4z+40}=\left.\frac{1}{\left(z^2+4z+40\right)'}\right|_{z=-2+6i}=\left.\frac{1}{2z+4}\right|_{z=-2+6i}=$$

$$=\frac{1}{2(-2+6i)+4}=\frac{1}{12i}$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+40}dx=2\pi i\cdot\frac{1}{12i}=\frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4x+40}dx=\frac{\pi}{6}.$

2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Определение и свойства преобразования Лапласа.

<u>*Определение*</u>. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если
1. Функция $f(t)=0$ при $t<0$;
2. Существуют вещественные положительные числа M, s такие, что $|f(t)|\le Me^{st}$ при $t\ge 0$;
3. -кусочно непрерывная и интегрируемая на любом конечном отрезке изменения t.

Точная нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых выполняется неравенство $|f(t)|\le Me^{st}$ при $t\ge 0$ называется показателем роста функции $f(t)$.
Если существует несобственный интеграл

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{2.1}$$

где $p=a+ib$, $\operatorname{Re}p=a>0$, то функция $F(p)$ комплексной переменной p называется **изображением Лапласа** или просто изображением функции $f(t)$.

Правило (2.1) получения по заданному оригиналу $f(t)$ изображения $F(p)$ называется **преобразованием Лапласа**.

Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то кратко это записывается в виде

$$f(t)\risingdotseq F(p)$$

Изображения функций может быть найдены с помощью таблицы
Свойства преобразования Лапласа
1.Линейность
Если $f(t)\risingdotseq F(p)$; $g(t)\risingdotseq G(p)$, то

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(t) \tag{2.2}$$

2.Теорема подобия
Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$f(\alpha t)\risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \tag{2.3}$$

3.Теорема смещения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0) \tag{2.4}$$

4.Теорема запаздывания

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p) \tag{2.5}$$

5. Изображение производной

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0) \tag{2.6}$$

Для n-ой производной:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{2.7}$$

6. Производная от изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$tf(t) \risingdotseq -F'(p) \tag{2.8}$$

Для n-ой производной:

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p) \tag{2.9}$$

7. Изображение интеграла

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{1}{p} F(p) \tag{2.10}$$

8.Интеграл от изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q) dq \tag{2.11}$$

9.Теорема Бореля об изображении свертки

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$; $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \risingdotseq F(p)\cdot G(p) \qquad (2.12)$$

10.Изображение периодической функции

Пусть функция $f(t)$ является периодической с периодом T. Тогда ее изображение может быть найдено по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt \qquad (2.13)$$

Изображение функции $f(t)$ может быть найдено с помощью таблицы оригиналов и изображений и перечисленных выше свойств.

Таблица 2.1.

Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал	**Изображение**
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
te^{at}	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
$t\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

2.2. Нахождение оригиналов по изображениям.

Для того, чтобы функция $F(p)$ была изображением функции $f(p)$ достаточно выполнения следующих условий:

1. $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = a > s_0$.
2. $\lim\limits_{|p|\to\infty} F(p) = 0$, если $\operatorname{Re} p > s_0$.
3. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|\,dy$ сходится

Способы отыскания оригиналов:

1. Если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений.

Пример 12

Найти оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p)=\frac{p+1}{p(p+2)(p+5)}$$

Решение.

Разложим дробь $\dfrac{p+1}{p(p+2)(p+5)}$ на простейшие методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{p+1}{p(p+2)(p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p+5}=\frac{A(p+2)(p+5)+Bp(p+5)+Cp(p+2)}{p(p+2)(p+5)}$$

Знаменатели начальной и конечной дробей равны, поэтому равны и их числители:

$$A(p^2+7p+10)+B(p^2+5p)+C(p^2+2p)=p+1$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$p^2: A+B=0$$
$$p^1: 7A+5B+2C=1$$
$$p^0: 5A=1$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 7A+5B+2C=1 \\ 5A=1 \end{cases}$$

получаем значения коэффициентов

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{1}{5} \\ C = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)(p+5)} = \frac{\frac{1}{5}}{p} + \frac{-\frac{1}{5}}{p+2} + \frac{\frac{3}{10}}{p+5}$$

По таблице оригиналов и изображений находим:

Окончательно получаем искомый оригинал

$$f(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{3}{10}e^{-5t}$$

Пример 13

Найти оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+2p+5)}$$

Решение:

Разложим дробь $\dfrac{p+1}{p(p^2+2p+5)}$ на простейшие методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{p+1}{p(p^2+2p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{Mp+N}{p^2+2p+5} = \frac{A(p^2+2p+5)+Mp^2+Np}{p(p^2+2p+5)}$$

Знаменатели начальной и конечной дробей равны, поэтому равны и их числители:

$$A(p^2+2p+5)+Mp^2+Np = p+1$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$p^2 : A + M = 0$$

$$p^1 : 2A + N = 1$$

$$p^0 : 5A = 1$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} A + M = 0 \\ 2A + N = 1 \\ 5A = 1 \end{cases}$$

получаем значения коэффициентов

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ M = -\dfrac{1}{5} \\ N = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p^2 + 2p + 5)} = \frac{\frac{1}{5}}{p} + \frac{-\frac{1}{5} + \frac{3}{10}}{(p^2 + 2p + 5)}$$

По таблице оригиналов и изображений находим:

Выделим в знаменателе второго слагаемого полный квадрат

$$\frac{-\frac{1}{5} + \frac{3}{10}}{(p^2 + 2p + 5)} = \frac{-\frac{1}{5} + \frac{3}{10}}{(p^2 + 2p + 1 + 4)} = \frac{-\frac{1}{5}(p + 1 - 1) + \frac{3}{10}}{(p+1)^2 + 4} = \frac{-\frac{1}{5}(p+1) + \frac{1}{2}}{(p+1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{5}p + \frac{3}{10}}{(p^2 + 2p + 5)} = \frac{-\frac{1}{5}p + \frac{3}{10}}{(p^2 + 2p + 1 + 4)} = \frac{-\frac{1}{5}(p + 1 - 1) + \frac{3}{10}}{(p+1)^2 + 4} = \frac{-\frac{1}{5}(p+1) + \frac{1}{2}}{(p+1)^2 + 4} =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{(p+1)}{(p+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)^2 + 4}$$

Для отыскания оригинала воспользуемся и таблицей изображений. Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{-\frac{1}{5}p + \frac{3}{10}}{(p^2 + 2p + 5)} \fallingdotseq e^{-t}\left(-\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

Искомый оригинал имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{5} + e^{-t}\left(-\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

2. Если $F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p)$ представляет собой произведение изображений, то оригинал $F(p)$ может быть найден по теореме Бореля о свертке (2.12).

Пример 14

Найти оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 9)}$$

Решение:

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 9)} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p^2 + 9}$$

По таблице оригиналов и изображений находим

По формуле (2.12) находим

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{3}\tau \cdot \sin 3(t-\tau)d\tau = \left\{ \begin{aligned} & u = \tau; du = d\tau \\ & dv = \frac{1}{3}\sin 3(t-\tau)d\tau; v = \frac{1}{9}\cos 3(t-\tau) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{93}$$

3. Если $F(p)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то оригинал может быть найден по формуле

$$f(t)=\sum_{p_k}\underset{p_k}{\operatorname{res}} e^{pt}F(p) \qquad (2.14)$$

Пример 15

Найти оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p+2)}$$

Решение:

Функция $F(p)$ имеет две особые точки $p=0$ - полюс второго порядка и $p=-2$ - полюс первого порядка.

Найдем вычеты в особых точках по формулам (1.65) и (1.66)

$$\underset{0}{\operatorname{res}}\frac{e^{pt}}{p^2(p+2)}=\lim_{p\to 0}\left(p^2\cdot\frac{e^{pt}}{p^2(p+2)}\right)'=\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{(p+2)}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{te^{pt}(p+2)-e^{pt}}{(p+2)^2}=\frac{2t-1}{4}$$

$$\underset{-2}{\operatorname{res}}\frac{e^{pt}}{p^2(p+2)}=\lim_{p\to -2}\left((p+2)\cdot\frac{e^{pt}}{p^2(p+2)}\right)'=\lim_{p\to -2}\frac{e^{pt}}{p^2}=\frac{e^{-2t}}{4}.$$

Подставляя найденные вычеты в формулу (2.14), получаем оригинал заданной функции

$$f(t)=\frac{2t-1+e^{-2t}}{4}.$$

2.3. Решение дифференциальных уравнений операционным методом.

Операционное исчисление является удобным инструментом для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем, особенно задачи Коши.

Решение таких уравнений операционным методом рассмотрим на примере уравнения второго порядка

$$a_1 x''(t) + a_2 x'(t) + a_3 x(t) = f(t) \qquad (2.15)$$

Задача Коши для уравнения (2.15) состоит в нахождении решения $x = x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0. \qquad (2.16)$$

Пусть

$$x(t) \doteqdot \mathrm{X}(p) \text{ и } f(t) \doteqdot F(p) \qquad (2.17)$$

По свойству преобразования Лапласа о дифференцировании оригинала (2.7) находим:

$$\begin{aligned} x'(t) &\doteqdot p\mathrm{X}(p) - x(0), \\ x''(t) &\doteqdot p^2\mathrm{X}(p) - px(0) - x'(0). \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Пользуясь свойством линейности изображений и соотношениями (2.17), (2.18), от уравнения (2.15) переходим к **изображаемому уравнению**

$$a_1(p^2\mathrm{X}(p) - px_0 - x'_0) + a_2(p\mathrm{X}(p) - x_0) + a_3\mathrm{X}(p) = F(p),$$

которое перепишем в виде

$$\mathrm{X}(p)(a_1 p^2 + a_2 p + a_3) = F(p) + a_1(px_0 + x'_0) + a_2 x_0. \qquad (2.19)$$

Изображающее уравнение (2.19) – это алгебраическое уравнение первой степени относительно $\mathrm{X}(p)$. Решая его, находим

$$\mathrm{X}(p) = \frac{F(p) + a_1(px_0 + x'_0) + a_2 x_0}{a_1 p^2 + a_2 p + a_3}.$$

Затем по найденному изображению $\mathrm{X}(p)$ отыскиваем соответствующий оригинал $x(t)$, который и будет искомым частным решением уравнения (2.15), удовлетворяющим начальным условиям (2.16).

Пример 16.

Найти решение уравнения

$$x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. В силу соотношений (2.18) с использованием таблицы оригиналов и изображений и заданных начальных условий изображения производных и правой части уравнения

$$x'(t) \risingdotseq pX(p), \quad x''(t) \risingdotseq p^2X(p), \quad e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}.$$

Тогда изображающее уравнение запишется в виде

$$X(p)(p^2 + 6p + 9) = \frac{9}{p-3},$$

откуда

$$X(p) = \frac{9}{(p-3)(p+3)^2}$$

Теперь по полученному изображению находим его оригинал $x(t)$.

<u>*Первый способ.*</u> Полученное изображение представляет собой правильную рациональную дробь. Поэтому разложим ее на сумму простейших дробей

$$\frac{9}{(p-3)(p+3)^2} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{(p+3)^2},$$

откуда

$$9 \equiv A(p+3)^2 + B(p-3)(p+3) + C(p-3).$$

Полагая последовательно $p = 3$ и $p = -3$, получаем $A = \dfrac{1}{4}$ и $C = -\dfrac{3}{2}$.

Коэффициент B можно определить из соотношения

$$0 = A + B, \text{ т.е. } B = -\frac{1}{4},$$

которое получается из сравнения коэффициентов при p^2 в обеих частях тождества.

Таким образом,

$$X(p) = \frac{9}{(p-3)(p+3)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{p-3} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{(p+3)^2}$$

и, согласно таблицы оригиналов и изображений, получаем, что оригинал решения равен

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{3}{2}te^{-3t}.$$

<u>Второй способ</u>. Для функции $X(p)$ точка $p_1 = 3$ – простой полюс, а $p_2 = -3$ – полюс второго порядка.

Найдем вычеты в особых точках по формулам (1.65) и (1.66)

$$\operatorname*{res}_{3} \frac{9e^{pt}}{(p-3)(p+3)^2} = \lim_{p\to 3}\left((p-3)\cdot\frac{9e^{pt}}{(p-3)(p+3)^2}\right) = \lim_{p\to 3}\frac{9e^{pt}}{(p+3)^2} = \frac{9e^{3t}}{36} = \frac{e^{3t}}{4}$$

$$\operatorname*{res}_{-3} \frac{9e^{pt}}{(p-3)(p+3)^2} = \lim_{p\to -3}\left((p+3)^2\cdot\frac{9e^{pt}}{(p-3)(p+3)^2}\right)' = \lim_{p\to -3}\left(\frac{9e^{pt}}{(p-3)}\right)' =$$

$$= 9\lim_{p\to -3}\frac{te^{pt}(p-3) - e^{pt}}{(p-3)^2} = 9\,\frac{-6te^{-3t} - e^{-3t}}{36}.$$

Воспользовавшись формулой (2.14), получаем

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{3}{2}te^{-3t}.$$

3. ВАРИАНТ ТЕСТОВОГО ЗАДАНИЯ

3.1. Пример варианта тестового задания

1. Вычислить $\operatorname{Re}\left(z_1\cdot z_2 - \frac{z_1}{z_2}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$, где $z_1 = 4-2i$, $z_2 = -2+i$

2. Записать данное комплексное число z в тригонометрической и показательной формах, вычислить z^m, $\sqrt[n]{z}$ $z = 3\sqrt{3} - 3i$, $m = 6, n = 3$

3. Найти вычет функции в указанной точке $f(z)=\dfrac{zshz}{z^2+24}$, $\quad z_0=2\sqrt{6}i$

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя основную теорему теории вычетов $\oint\limits_c \dfrac{(z-3)dz}{(z-1)^2(z+2)}$,c:|z+2|=1

5. Вычислить несобственный интеграл, используя теорию вычетов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+10x+34}$

6. Методом операционного исчисления решить задачу Коши

$$x''+5x'+6x=e^{2t},\ x(0)=1,\ x'(0)=-1.$$

3.2. Решение варианта тестового задания

1.*Решение:*

$$z_1\cdot z_2=(4-2i)\cdot(-2+i)=-8+4i+4i-2i^2=\{i^2=-1\}=-6+8i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4-2i}{-2+i}=\frac{(4-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-8-4i+4i+2i^2}{4-i^2}=\frac{-10}{5}=-2$$

$$\mathrm{Re}\left(z_1\cdot z_2-\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Re}\big(-6+8i-(-2)\big)=\mathrm{Re}\big(-4+8i\big)=-4$$

$$z_1+z_2=(4-2i)+(-2+i)=2-i$$

$$z_1-z_2=(4-2i)-(-2+i)=6-3i=3(2-i)$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{2-i}{3(2-i)}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\mathrm{Re}\left(z_1\cdot z_2-\frac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)=-2$$

Ответ: $\mathrm{Re}\left(z_1\cdot z_2-\dfrac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)=-2$.

2.*Решение:*
Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Показательная форма записи комплексного числа

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Главное значение аргумента

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-3}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n$$

По условию $x > 0$, $y < 0$, т.е. точка лежит в IV четверти, поэтому выбираем $n = 2$ и получаем

$$\varphi = \frac{11\pi}{6}$$

Получаем

$$z = 6\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 6e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

При возведении комплексного числа в степень m его модуль возводится в степень m, а аргумент умножается на m. Поэтому

$$z^6 = 6^6 e^{i\frac{11\pi}{6}6} = 6^6 e^{11\pi i} = 6^6 e^{(10\pi+\pi)i} = 6^6 e^{i\pi} = -6^6$$

Корень n- й степени из комплексного числа имеет ровно n значений, которые могут быть найдены по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = \overline{0,(n-1)}$$

Поэтому

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{3}}=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{11\pi+12\pi k}{18}},\ k=0;1;2$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_0=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{11\pi}{18}}$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{11\pi+12\pi}{18}}=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{23\pi}{18}}$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_2=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{11\pi+24\pi}{18}}=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{35\pi}{18}}$$

Ответ:

$$z=6\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=6e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

$$z^6=-6^6$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_0=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{11\pi}{18}}$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{23\pi}{18}}$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_2=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{35\pi}{18}}$$

3.*Решение:*

Определим характер изолированной особой точки $z_0=2\sqrt{6}i$

$$z_0\operatorname{sh}z_0=2\sqrt{6}i\operatorname{sh}(2\sqrt{6}i)=-2\sqrt{6}\sin2\sqrt{6}\neq0$$

$$z_0^2+24=(2\sqrt{6}i)^2+24=-24+24=0$$

$$(z^2+24)z_0=2\sqrt{6}i'\Big|_{z_9}=2z_0=2z_0=4\sqrt{6i}\neq0$$

Следовательно $z_0=2\sqrt{6}i$ является нулем первого порядка знаменателя, поэтому для функции $f(z)=\dfrac{z\operatorname{sh}z}{z^2+24}$ точка $z_0=2\sqrt{6}i$ является полюсом первого порядка.

Найдем вычет в заданной точке. Воспользуемся формулой

$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \left.\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\right|_{z_0}, \quad \varphi(z_0) \neq 0$$

$$\operatorname*{res}_{2\sqrt{6}i} \frac{z\,\mathrm{sh}\,z}{z^2+24} = \left.\frac{z\,\mathrm{sh}\,z}{(z^2+24)'}\right|_{2\sqrt{6}i} = \left.\frac{z\,\mathrm{sh}\,z}{2z}\right|_{2\sqrt{6}i} = \left.\frac{\mathrm{sh}\,z}{z}\right|_{2\sqrt{6}i} = \frac{\mathrm{sh}\,2\sqrt{6}i}{2} = \frac{i}{2}\sin 2\sqrt{6}$$

Ответ: $\operatorname*{res}_{2\sqrt{6}i} \frac{z\,\mathrm{sh}\,z}{z^2+24} = \frac{i}{2}\sin 2\sqrt{6}$.

4.*Решение:*

Найдем особые точки подынтегральной функции. Приравняем знаменатель к нулю

$$(z-1)^2(z+2) = 0$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -2$$

Выясним, лежат ли особые точки внутри контура интегрирования

$$|z+2| = 1$$

$$|z_1+2| = |1+2| = 3 > 1$$

Точка $z_1 = 1$ не лежит внутри контура интегрирования.

$$|z_2+2| = |-2+2| = 0 < 1$$

Точка $z_2 = -2$ лежит внутри контура интегрирования, поэтому

$$\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{(z-3)dz}{(z-1)^2(z+2)} = 2\pi i \operatorname*{res}_{-2} \frac{(z-3)}{(z-1)^2(z+2)}$$

Выясним характер особой точки $z_2 = -2$.

Числитель дроби не равен нулю при $z_2 = -2$ не равен нулю, следовательно, данная точка является полюсом первого порядка.

Поэтому

$$2\pi i \operatorname*{res}_{-2} \frac{(z-3)}{(z-1)^2(z+2)} = 2\pi i \lim_{z\to -2}(z+2)\cdot\frac{(z-3)}{(z-1)^2(z+2)} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to -2} \frac{(z-3)}{(z-1)^2} = 2\pi i \frac{(-2-3)}{(-2-1)^2} = -\frac{10\pi i}{9}$$

Ответ: $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{(z-3)dz}{(z-1)^2(z+2)} = -\frac{10\pi i}{9}$

5.*Решение:*

Сделаем аналитическое продолжение подынтегральной функции на комплексную плоскость

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 10z + 34}$$

Найдем особые точки $f(z)$:

$$z^2 + 10z + 34 = 0$$

$$D = 100 - 136 = -36$$

$$z_{1,2} = \frac{-10 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-10 \pm 6i}{2} = -5 \pm 3i$$

Функция $f(z)$ не имеет особенностей на действительной оси, убывает как $\frac{1}{z^2}$ поэтому несобственный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \quad \operatorname{Im}(z_k) > 0$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(-5+3i) = 3 > 0$$

$$\operatorname{Im}(z_2) = \operatorname{Im}(-5-3i) = -3 < 0$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 10z + 34} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{-5+3i} \frac{1}{z^2 + 10z + 34}$$

Точка $z_1 = -5 + 3i$ является полюсом первого порядка, поэтому

$$2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{-5+3i}\frac{1}{z^2+10z+34}=2\pi i\left.\frac{1}{(z^2+10z+34)'}\right|_{-5+3i}=$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{2z+10}\right|_{-5+3i}=\frac{2\pi i}{2(-5+3i)+10}=\frac{2\pi i}{6i}=\frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2+10z+34}=\frac{\pi}{3}$.

6.*Решение:*
Перейдем к изображениям Лапласа

$$x(t)\doteqdot X(p)$$

Изображения производных найдем по формуле

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

$$x'(t)\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p)-1$$

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p+1$$

$$e^{2t}\doteqdot\frac{1}{p-2}$$

Перейдем к уравнению для изображений

$$p^2X(p)-p+1+5(pX(p)-1)+6X(p)=\frac{1}{p-2}$$

$$X(p)(p^2+5p+6)-p-4=\frac{1}{p-2}$$

$$X(p)(p^2+5p+6)=\frac{1}{p-2}+p+4$$

$$X(p)p(p^2+5p+6)=\frac{1+p^2+4p-2p-8}{p-2}=\frac{p^2+2p-7}{p-2}$$

Тогда

$$X(p)=\frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p^2+5p+6)}=\frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p+2)(+3)}$$

Найдем оригинал, соответствующий полученному операторному решению $X(p)$, как сумму вычетов в особых точках $p = 2,-2,-3$. Все особые точки являются полюсами первого порядка

$$\operatorname*{res}_{2} e^{pt} \frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p+2)(p+3)} = e^{pt} \left. \frac{p^2+2p-7}{(p+2)(p+3)} \right|_{p=2} = e^{2t} \frac{4+4-7}{4\cdot 5} = \frac{1}{20} e^{2t}$$

$$\operatorname*{res}_{-2} e^{pt} \frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p+2)(p+3)} = e^{pt} \left. \frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p+3)} \right|_{p=-2} = e^{-2t} \frac{4-4-7}{(-4)\cdot 1} = \frac{7}{4} e^{-2t}$$

$$\operatorname*{res}_{-3} e^{pt} \frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p+2)(p+3)} = e^{pt} \left. \frac{p^2+2p-7}{(p-2)(p+2)} \right|_{p=-3} = e^{-3t} \frac{9-6-7}{(-5)\cdot(-1)} = -\frac{4}{5} e^{-3t}$$

Тогда решением задачи Коши будет

Ответ: $x(t) = \frac{1}{20} e^{2t} + \frac{7}{4} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-3t}$.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить

1.1. $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2)$, где $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 4i$.

1.2. $\operatorname{Im}(z_1 + i) - \dfrac{z_2}{z_1}$, где $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 4 + i$.

1.3. $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) - \operatorname{Im}(\bar{z}_1^3)$, где $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$.

1.4. $3\bar{z}_1 - \dfrac{z_1}{z_2}$, где $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 2 - i$.

1.5. $\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$, где $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 2 + 5i$.

2. Записать данное комплексное число в тригонометрической и показательной формах, вычислить z^m, $\sqrt[n]{z}$.

2.1. $z = -5 - \sqrt{75}i$, $m = 11$; $n = 2$.

2.2. $z = 5 - 5\sqrt{3}i$, $m = 16$; $n = 3$.

2.3. $z = 6\sqrt{3} + 6i$, $m = 18$; $n = 2$.

2.4. $z = -5\sqrt{3} + 5i$, $m = 19$; $n = 3$.

2.5. $z = 4\sqrt{3} - 4i$, $m = 28$; $n = 2$.

3. Найти вычет функции в указанной точке.

3.1. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - z}$, $z_0 = 1$.

3.2. $f(z) = \dfrac{4e^z}{z^2 = 2zi}$, $z_0 = -2i$.

3.3. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^2 - 5iz}$, $z_0 = 5i$.

3.4. $f(z) = \dfrac{4z + 3}{z^2 + 5z + 4}$, $z_0 = -1$.

3.5. $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}, \qquad z_0 = 0$.

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя основную теорему теории вычетов.

4.1. $\oint\limits_{|z+1|=3} \frac{zdz}{z^2 + 2z + 3}$.

4.2. $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - 4z + 5}$.

4.3. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin zdz}{z^2 + 4}$.

4.4. $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\cos 2zdz}{z^2 - 5z + 6}$.

4.5. $\oint\limits_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z}} dz$.

4.6. $\oint\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$.

5. Вычислить несобственный интеграл, используя теорию вычетов.

5.1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6}$.

5.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 3)}$.

5.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$.

5.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

5.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+6)^2}$.

6. Решить задачу Коши операционным методом.

6.1. $x'' - 2x' + 2x = 1$; $\quad x(0) = 4$; $x'(0) = 3$.

6.2. $x'' + 3x' + 2x = 2t + 1$; $\quad x(0) = 4$; $x'(0) = -3$.

6.3. $x'' - 2x' + x = e^t$; $\quad x(0) = 0$; $x'(0) = 1$.

6.4. $x'' - x' + x = e^{-t}$; $\quad x(0) = 0$; $x'(0) = 1$.

6.5. $x'' + x = \cos t$; $\quad x(0) = -1$; $x'(0) = 1$.

ОТВЕТЫ

1.1. 39; 1.2. $\frac{13}{5} - \frac{9}{5}i$; **1.3.** -1; **1.4.** $\frac{-9}{5} - \frac{67}{5}i$; **1.5.** $\frac{49}{290} - i\frac{443}{290}$.

2.1. $z = 10\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 10e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $10^{11}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $(\sqrt{z})_1 = \sqrt{10}e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

$(\sqrt{z})_2 = \sqrt{10}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

2.2. $z = 10\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 10e^{i\frac{5\pi}{3}}$; $10^{16}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $(\sqrt[3]{z})_1 = \sqrt[3]{10}e^{i\frac{5\pi}{9}}$;

$(\sqrt[3]{z})_2 = \sqrt[3]{10}e^{i\frac{11\pi}{9}}$; $(\sqrt[3]{z})_3 = \sqrt[3]{10}e^{i\frac{17\pi}{9}}$.

2.3. $z = 12\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 12e^{i\frac{\pi}{6}}$; $10^{11}e^{i\frac{2\pi}{3}}$; -12^{18}; $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$; $2\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

2.4. $z = 10\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 10e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $10^{19}e^{i\frac{11\pi}{6}}$; $(\sqrt[3]{z})_1 = \sqrt[3]{10}e^{i\frac{5\pi}{18}}$;

$(\sqrt[3]{z})_2 = \sqrt[3]{10}e^{i\frac{17\pi}{18}}$; $(\sqrt[3]{z})_3 = \sqrt[3]{10}e^{i\frac{29\pi}{18}}$.

2.5. $z = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 8e^{i\frac{11\pi}{6}}$; $8^{28}e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $(\sqrt{z})_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$;

$$(\sqrt{z})_2 = e^{i\frac{23\pi}{12}}.$$

3.1. $\cos 1$; **3.2.** $2ie^{-2i}$; **3.3.** $\dfrac{\sin 5}{5}$; **3.4.** $-\dfrac{1}{3}$; **3.5.** $-\dfrac{1}{6}$.

4.1. $2\pi i$; **4.2.** $2\pi i e^2 \sin 1$; **4.3.** $i\pi \operatorname{sh} 2$; **4.4.** $-2\pi i \cos 4$; **4.5.** πi; **4.6.** πi.

5.1. $\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$; **5.2.** $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)}{18}$; **5.3.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$; **5.4.** $\dfrac{\pi}{6}$; **5.5.** $\dfrac{\pi}{12\sqrt{6}}$.

6.1. $e^t \sin t$; **6.2.** $t-1+6e^{-t}-e^{-2t}$; **6.3.** $e^t\left(\dfrac{t^2}{2}+t\right)$;

6.4. $\dfrac{1}{3}e^t-\dfrac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+3\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; **6.5.** $\dfrac{1}{2}+\sin t+\sin t-\cos t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Мн.: Выш.шк, 1975.
2. Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Т.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.
3. Гурский Е.И.Руководство к решению задач по ВМ, ч.2, Мн.: Выш.шк, 1990.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.
5. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по ВМ, Операционное исчисление.Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика.Мн.: Выш.шк, 2006.
6. Евграфов М. А. Аналитические функции. Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1991.
7. Леонтьева Т. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Научный мир. 2004, 216с.. 53 илл. ISBN 5-89176-255-2.
8. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного (с элементами операционного исчисления).— М.: Лань, 2002.
9. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 3-е изд., исправл. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.
10. Эйдерман В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Пособие
по выполнению тестовых заданий по дисциплинам «Математика», «Высшая математика» для студентов всех специальностей заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 12.06.14.

Рег. № 70Е.
http://www.gstu.by