УДК 62-83: 621.313.333

КРИТИЧЕСКИЙ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. И. ЛУКОВНИКОВ, Ю. А. РУДЧЕНКО, Г. И. СЕЛИВЕРСТОВ
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Последнее время в различных отраслях науки и техники возник интерес к безредукторным автоколебательным электроприводам [5]– [7]. Это связано, прежде всего, с тем, что они обладают по сравнению с другими безредукторными приводами периодического движения [4] низкой материало- и энергоемкостью.

Асинхронные автоколебательные электроприводы чаще всего строятся на базе электромеханической системы «асинхронный электродвигатель – позиционный элемент (АД – ПЭ)», которая относится к автономным системам, близким к линейным консервативным. Для анализа установившегося периодического движения таких систем существует большой ряд методов, как классических, так и появившихся в последнее время [1], [2], [3].

Цель работы

Провести критический сравнительный анализ различных методов исследования автоколебательных систем (Пуанкаре, Ван-дер-Поля, гармонического баланса и авторов), выявить их особенности, достоинства и недостатки, а также область их применимости для исследования автоколебательных систем «АД – ПЭ».

Сравнительный анализ методов

Сравнительный анализ методов будем вести на основе исследования автоколебательной системы «однофазный асинхронный электродвигатель – линейная пружина», описываемой уравнением

$$\ddot{\varphi} + \varphi = f(\dot{\varphi}) = \mu_1\dot{\varphi} - \mu_2\dot{\varphi}^3 - \mu_3\mathrm{Sign}(\dot{\varphi}) - \mu_4\dot{\varphi}, \qquad (1)$$

где $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ – угловое перемещение, скорость и ускорение, соответственно; $f(\dot{\varphi})$ – функция, учитывающая диссипативные силы нагрузки и электромагнитные силы однофазного асинхронного двигателя (ОАД); $\mu_1 - \mu_4$ – коэффициенты, учитывающие параметры автоколебательной системы.

1. Метод Ван-дер-Поля

Метод Ван-дер-Поля [1] является одним из самых известных и распространенных классических методов анализа нелинейных автоколебательных систем, поэтому примем его в качестве базового, с которым будем дальше вести сравнение.

Суть метода заключается в том, что вместо исходного уравнения, описывающего движение нелинейной системы, можно рассматривать другие, составленные по определенному рецепту, вспомогательные, так называемые укороченные уравнения, которые позволяют сравнительно просто получить приближенные решения исходного уравнения (тем более точные, чем меньше параметр μ).

По методу Ван-дер-Поля для системы, описываемой уравнением (1), укороченные уравнения движения в полярных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\frac{d\varphi_{M}}{dt} = \mu\,\Phi(\varphi_{M}) = -\mu\frac{1}{2p}\int_{0}^{2p} f(\dot{\varphi})\sin(u)\,du\,; \tag{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu\,Ш(\varphi_{M}) = -\mu\frac{1}{2p\,\varphi_{M}}\int_{0}^{2p} f(\dot{\varphi})\cos(u)\,du\,, \tag{3}$$

где φ_{M} – амплитуда колебаний; μ – малый параметр $(0<\mu<<1)$; θ – начальная фаза колебаний; $u = t+\theta$ – обобщенное время.

Сначала будем рассматривать первую гармонику закона движения:

$$\varphi = \varphi_{M}\cos(t+\theta)\,.$$

Тогда по принципу гармонической линеаризации из выражения (2) получим основное уравнение радиусов (амплитуд) автоколебательной системы:

$$\frac{d\varphi_{M}}{dt} = -\frac{2\mu_3}{p} + \frac{(\mu_1-\mu_4)\varphi_{M}}{2} - \frac{3\mu_2\varphi_{M}^{3}}{8} = 0\,. \tag{4}$$

В случае, когда бифуркационный параметр $\beta \geq 3/\sqrt[3]{4}$, решение уравнения (4) дает один отрицательный корень, который не имеет физического смысла и два положительных корня, равных

$$\varphi_{M1} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\lambda_1}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right); \tag{5}$$

$$\varphi_{M2} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\lambda_1}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}-120^{\circ}\right), \tag{6}$$

где φ, λ_1, λ_2 – бифуркационные параметры, определяемые по формулам

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{9\lambda_2}{p\sqrt{\lambda_1^{3}}}\right);$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1-\mu_4}{\mu_2};$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_3}{\mu_2}.$$

Анализ устойчивости движения позволяет установить, что φ_{M1} является амплитудой устойчивых предельных циклов колебаний, а φ_{M2} – неустойчивых.

2. Метод гармонического баланса [2]

Метод основан на том, что хотя колебания нелинейных систем редко описываются простыми гармоническими функциями времени, они чаще всего периодичны или близки к периодическим колебаниям. Периодические колебания могут быть представлены в виде ряда Фурье, состоящего из синусных и косинусных гармоник. Во многих случаях существенна лишь амплитуда основной гармоники, а иногда также и амплитуды одной или двух высших гармоник. Согласно методу гармонического баланса первое приближение решения получается при учете лишь составляющей основной частоты и это приближение строится так, чтобы по основной частоте оно удовлетворяло исходному дифференциальному уравнению.

Не вдаваясь в подробности, скажем, что математические выкладки по методу гармонического баланса позволяют получить уравнение радиусов идентичное уравнению (4) по методу Ван-дер-Поля.

3. Метод Пуанкаре (метод малого параметра) [2]

Согласно методу Пуанкаре решение нелинейного уравнения автономной квазилинейной системы ищут в виде степенного ряда по величине малого параметра μ с любой степенью точности, если этот ряд сходится

$$\varphi = \varphi_0 + \text{м}\varphi_1 + \text{м}^2\varphi_2 + \text{м}^3\varphi_3 + \ldots, \tag{7}$$

где φ_0 – решение уравнения нулевого приближения, когда не учитываются нелинейные члены уравнения; φ_i – решение уравнения *i*-й поправки, которая учитывает влияние нелинейных членов уравнения.

Если ограничиться первой поправкой в степенном ряде (7):

$$\varphi = \varphi_0 + \text{м}\varphi_1 = \varphi_{M0}\cos u + \text{м}[\varphi_{M1}^{(1)}\sin u + \varphi_{M1}^{(3)}\sin 3u],$$

то метод Пуанкаре дает два уравнения радиусов для нулевого приближения и первой поправки

$$\frac{4\text{м}_3}{p} - (\text{м}_1 - \text{м}_4)\varphi_{M0} + \frac{3}{4}\text{м}_2\varphi_{M0}^3 = 0; \tag{8}$$

$$-8\varphi_{M1}^{(3)} = \frac{4\text{м}_3}{3p} - \frac{1}{4}\text{м}_2\varphi_{M0}^3. \tag{9}$$

Уравнение радиусов для нулевого приближения идентично уравнению радиусов (4), полученному методом Ван-дер-Поля. Решение уравнений (8) и (9) позволяет найти амплитуды нулевого приближения и первой поправки. В результате общее решение по методу Пуанкаре имеет вид:

$$\varphi = \varphi_{M0}\cos\text{ф} + \mu\,[(\frac{\text{м}_3}{2p} - \frac{3\text{м}_2}{32}\varphi_{M0}^3)\sin\text{ф} + (\frac{\text{м}_2}{32}\varphi_{M0}^3 - \frac{\text{м}_3}{6p})\sin 3\text{ф}], \tag{10}$$

где φ_{M0} – амплитуда нулевого приближения, совпадающая с выражением (5).

Если в методе Пуанкаре ограничиться нулевым приближением, то он дает результаты, точно совпадающие с методом Ван-дер-Поля.

4. Метод компенсации [3]

Данный метод основан на идее полной компенсации в установившемся автоколебательном режиме диссипативных сил нагрузки электромагнитными силами асинхронного двигателя.

Представим уравнение (1) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\varphi - \mu_3 \mathrm{Sign}\omega + (\mu_1 - \mu_4)\omega - \mu_2 \omega^3 . \end{cases} \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение интегральных кривых получится делением второго уравнения на первое:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{-\varphi - \mu_3 \mathrm{Sign}\omega + (\mu_1 - \mu_4)\omega - \mu_2 \omega^3}{\omega} . \tag{12}$$

Путем анализа уравнения (12) методом компенсации [3] найдем условия возникновения, устойчивости и бифуркаций автоколебательного движения.

Проинтегрируем уравнение (12) для начальных условий φ_0, ω_0:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \int_{\varphi_0}^{\varphi} - \varphi - \mu_3 \mathrm{Sign}\,\omega + (\mu_1 - \mu_4)\omega - \mu_2 \omega^3]\, d\varphi$$

и получим

$$(\omega^2 - \omega_0^2) + (\varphi^2 - \varphi_0^2) = Щ(\varphi) , \tag{13}$$

где интеграл, учитывающий влияние сил диссипации и подпитки, равен:

$$Щ(\varphi) = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} [-\mu_3 \mathrm{Sign}\,\omega + (\mu_1 - \mu_4)\omega - \mu_2 \omega^3]\, d\varphi .$$

В установившемся режиме автоколебаний силы подпитки и диссипации компенсируют друг друга, тогда $Щ(\varphi) = 0$ и уравнение (13) сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2) + (\varphi^2 - \varphi_0^2) = 0, \\ \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} [-\mu_3 \mathrm{Sign}\omega + (\mu_1 - \mu_4)\omega - \mu_2 \omega^3]\, d\varphi = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Первое уравнение описывает фазовые траектории свободного движения подпружиненной системы, представляющие собой окружности с центром в точке с координатами $\omega_ц = 0$, $\varphi_ц = 0$ и радиусом

$$\omega_М = \varphi_М = \sqrt{\omega_0^2 + \varphi_0^2} .$$

Второе уравнение по существу описывает условия возникновения предельных циклов автоколебаний и позволяет установить взаимосвязь между начальными условиями пуска (φ_0, ω_0), нагрузкой (μ_3, μ_4), параметрами АД и его электропитания (μ_1, μ_2), определяющую существование этих циклов.

Уравнение фазовой траектории говорит о том, что закон автоколебаний имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\omega_0^2 + \varphi_0^2} \cdot \mathrm{Sin}(\tau + \mathrm{arctg}\frac{\varphi_0}{\omega_0}) . \tag{15}$$

Интеграл $\Omega(\varphi)$ будет равен нулю, поскольку при компенсации сил диссипации силами подпитки будет равна нулю подынтегральная функция.

Прямой подстановкой (15) во второе уравнение (14) получим на основе гармонического баланса по первой гармонике уравнение радиусов:

$$-\frac{4}{p}\mu_3+(\mu_1-\mu_4)\varphi_M-\frac{3}{4}\mu_2\varphi_M^3=0. \qquad (16)$$

Данное выражение полностью совпадает с уравнением радиусов (4), полученное методом Ван-дер-Поля. Приравнивая выражение для амплитуды неустойчивых предельных циклов (6), полученное в результате решения уравнения (4), с амплитудой, записанной через начальные условия в выражении (15), можно получить начальные условия пуска АД в устойчивый автоколебательный режим:

$$\begin{cases}\varphi_0=\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\lambda_1}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}-120°\right)},\\ \omega_0=0\end{cases} \qquad (17)$$

или

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\lambda_1}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{3}-120°\right)}.\\ \varphi_0=0\end{cases} \qquad (18)$$

Рациональными являются два вида запуска ОАД в устойчивый автоколебательный режим. Первый, когда системе придается определенное (достаточное) количество потенциальной энергии за счет поворота вала АД на начальный угол φ_0. Второй, когда системе сообщается определенное (достаточное) количество кинетической энергии за счет придания валу АД начальной скорости ω_0.

Заключение

Анализ показал, что в случае гармонической линеаризации периодического движения все методы дают одинаковые результаты.

Метод компенсации, разработанный авторами, в отличие от других методов, позволяет дополнительно получить аналитические выражения, определяющие условия пуска системы в устойчивый автоколебательный режим.

Исследовать же девиацию амплитуды и частоты автоколебаний в течение периода, представленных в виде ряда Фурье, целесообразно методом Пуанкаре.

Литература

1. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – Москва : Физматгиз, 1959. – 915 с.
2. Канингхэм, В. Введение в теорию нелинейных систем / В. Канингхэм. – Москва : Госэнергоиздат, 1962. – 264 с.
3. Луковников, В. И. Анализ уравнения автоколебательного движения асихронного электродвигателя методом компенсации // Современные проблемы машиноведения : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2002. – С. 122–123.
4. Грачев, С. А. Безредукторный электромашинный привод периодического движения / С. А. Грачев, В. И. Луковников. – Минск : Выш. шк., 1991. – 160 с.
5. Бойко, Л. И. Научные основы механики приводов колеблющихся органов машин : автореф. дис... д-ра техн. наук / Л. И. Бойко.– Минск, 2004 – 42 с.
6. Веппер Л. В. Автоколебательный режим однофазного асинхронного электродвигателя : автореф. дис... канд. техн. наук / Л. В. Веппер. – Гомель, 2001. – 18 с.

7. Сусло, А. П. Автоколебательный асинхронный электропривод // Сб. материалов междунар. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и магистрантов / А. П. Сусло, В. Э. Коган. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2001. – С. 119–121.

Получено 03.11.2006 г.